COLEGIO NACIONAL DE ACTUARIOS

Gestión de riesgo de tasa en una reserva de mercado de seguros dotales puros vía swaps bajo procesos de Liu

David Sánchez Herrera[*,1]
[*]Universidad Anáhuac Veracruz

RESUMEN La gestión de las reservas actuariales para seguros de dotación pura exige estrategias sólidas para garantizar la estabilidad ante la volatilidad del mercado. Este estudio integra bonos cupón cero y swaps de tipos de interés como herramientas de cobertura. Los bonos cupón cero eliminan el riesgo de reinversión y los swaps abordan los desajustes entre activos y pasivos, a la vez que mitigan los casos extremos de tipos de interés altos y bajos. Un análisis comparativo contrasta el marco estocástico, basado en procesos gaussianos, con el marco de incertidumbre, utilizando procesos canónicos de Liu para modelar. Mediante simulaciones numéricas, se evalúa el comportamiento de las cuentas con y sin swaps de tipos de interés en horizontes temporales de 5 y 15 años, lo que dilucida el papel de los swaps en la reducción de la dispersión y la mejora de la estabilidad de los valores terminales de las reservas de mercado. Los hallazgos destacan la relevancia del seguro de dotación pura como análogo actuarial de los bonos cupón cero, ofreciendo una base para modelos más complejos. Las investigaciones futuras podrían explorar mejoras como la calibración de modelos, la incorporación de medidas alternativas como medidas difusas o de posibilidad, y la integración de principios de finanzas cuánticas.

Palabras clave
Reserva de dotación pura, Bono cupón cero, Swap de tipos de interés, Modelo de Vasicek, Proceso de Liu

Derechos reservados © 2025 por el Colegio Nacional de Actuarios
Última actualización del manuscrito: 30 de mayo de 2025
Artículo formateado por el autor. La visión y comentarios contenidos en este documento corresponden exclusivamente a su autor y, por tanto, son ajenos a cualquier entidad pública o privada, incluyendo aquella para la que actualmente colabora. El CONAC no recomienda ni respalda el uso de la información proporcionada en este estudio. El CONAC no ofrece ninguna garantía, expresa o implícita, ni representación de ningún tipo y no asume ninguna responsabilidad en relación con el uso o mal uso de este trabajo.

1. INTRODUCCIÓN

Contexto y Motivación

La gestión de reservas actuariales, especialmente en seguros dotales puros, exige un enfoque matemático riguroso cuando se incorporan tasas de interés aleatorias. Aunque estos productos implican un único pago condicionado a la sobrevivencia, su cobertura representa un reto técnico relevante.

Tradicionalmente, en la formación actuarial se emplean **modelos con tasas deterministas**, conforme a las **bases actuariales de primer orden** que garantizan el principio de equivalencia, pero limitan la capacidad de reflejar dinámicas reales del mercado. Al avanzar hacia **bases de tercer orden**, se incorporan **tasas aleatorias modeladas mediante procesos estocásticos**, como el de Vasicek, dentro del marco probabilístico clásico.

Sin embargo, la teoría de la probabilidad requiere condiciones estructurales que resultan restrictivas cuando no se dispone de muestras suficientemente grandes para estimar frecuencias relativas estables, o cuando los fenómenos a modelar están dominados por la ambigüedad, la escasez de datos. En este contexto, **la Teoría Incierta de Liu ofrece una alternativa no probabilística** para modelar fenómenos aleatorios, utilizando medidas inciertas y procesos asociados que **capturan la aleatoriedad mediante grados de creencia**.

Esta dualidad metodológica entre el enfoque estocástico y el incierto motiva el presente trabajo, cuyo objetivo es comparar ambos esquemas en la modelación de la tasa de interés dentro de un mismo contexto actuarial.

Revisión del Problema

La literatura actuarial ha comenzado a incorporar modelos más complejos que permiten la evolución estocástica de la tasa de interés. Un referente importante es el trabajo de Møller y Steffensen (2007), donde se propone un modelo actuarial de reservas que utiliza instrumentos derivados como bonos cupón cero y swaps, en combinación con procesos estocásticos de tasas de interés como el modelo de Vasicek. Este enfoque permite reflejar de manera más precisa las condiciones de mercado en la estimación de la reserva técnica.

Sin embargo, esta línea de investigación se ha desarrollado exclusivamente dentro del marco probabilístico clásico. En la práctica actuarial, existen situaciones donde la información disponible no es suficiente para definir una probabilidad bien fundamentada, o donde el tomador de decisiones enfrenta ambigüedad y falta de precisión. Ante este tipo de situaciones, surge la necesidad de considerar estructuras matemáticas alternativas a la medida de probabilidad.

[1]Correo electrónico: act.dave.saher@gmail.com

Objetivo

El presente trabajo tiene como objetivo principal evaluar **estrategias de cobertura para la reserva de un seguro dotal puro bajo dos enfoques distintos de modelización de la tasa de interés**:

- Un **marco estocástico**, basado en el modelo de Vasicek, en el cual la evolución de la tasa se modela mediante una medida de probabilidad, la cual puede estimarse empíricamente a partir de datos históricos.
- **Un marco incierto**, basado en el modelo de Chen y Gao, construido sobre el proceso de Liu y la medida incierta, que permite representar fenómenos aleatorios bajo grados de creencias subjetivas coherentes con la lógica humana.

Ambos marcos se implementan dentro de la estructura propuesta por Møller y Steffensen (2007), para hacer una comparación en términos de comportamiento de la reserva ante la sensibilidad de la tasa de interés.

Adicionalmente, se explora de manera preliminar el uso de *swaptions* como instrumentos complementarios de cobertura ante escenarios extremos, ampliando las posibilidades dentro del espacio de derivados financieros aplicados a seguros de vida.

Justificación del Estudio

En la formación actuarial, los modelos de seguros de vida suelen construirse bajo supuestos simplificadores, como una tasa de interés constante, que facilitan la enseñanza pero no capturan la realidad del mercado financiero.

Este estudio surge de una inquietud académica: ¿cómo cambia el modelo de reservas si se sustituye la tasa constante por una tasa aleatoria? Esta exploración llevó a considerar bases actuariales de tercer orden, más acordes con la dinámica del mercado, desarrolladas en Møller y Steffensen (2007).

Una segunda inquietud metodológica cuestionó el uso exclusivo de la medida de probabilidad para modelar la aleatoriedad. La Teoría Incierta de Liu (2015) ofreció una alternativa viable mediante la medida incierta, que permite representar aleatoriedad no probabilística. El modelo propuesto por Chen y Gao adaptó esta perspectiva al caso de tasas inciertas.

Así, **el trabajo demuestra que es posible reformular** el modelo de reserva del seguro dotal puro **bajo una medida incierta**, proponiendo un marco alternativo para modelar la fuerza de interés cuando la probabilidad resulta insuficiente.

Contribuciones

Este estudio realiza tres contribuciones principales al cuerpo teórico y aplicado de las finanzas actuariales:

1. Revisión y análisis del modelo clásico de Møller y Steffensen (2007), **destacando el papel de los bonos cupón cero y los swaps de interés** como mecanismos esenciales **en la gestión de reservas actuariales**.

2. **Extensión del modelo de reserva de mercado de Møller y Steffensen (2007) al marco de la Teoría Incierta** desarrollado por Liu (2015), incorporando la medida incierta y el proceso de Liu Canónico **como herramientas alternativas para modelar fenómenos aleatorios sin necesidad de una estructura probabilística clásica**.

3. Introducción de un análisis sobre el posible uso de *swaptions* como mecanismos de cobertura, ampliando las alternativas para mitigar riesgos asociados a tasas de interés.

Estas aportaciones refuerzan la relevancia del trabajo al situarse en la intersección entre las finanzas estocásticas y las finanzas inciertas, integrando además consideraciones actuariales en el diseño de estrategias de cobertura ante la variabilidad de las tasas de interés.

Estructura del Artículo

El documento se organiza en tres partes principales, cada una de las cuales desarrolla progresivamente los elementos teóricos, metodológicos y aplicados del trabajo:

1. **Parte I**: se presentan los modelos probabilísticos del bono cupón cero y de la tasa de interés estocástica.
   - Se introducen los fundamentos deterministas del bono cupón cero como punto de partida conceptual.
   - Posteriormente, se expone la teoría estocástica correspondiente, incluyendo la valoración del bono bajo medida de probabilidad y la modelación de la tasa de interés mediante el proceso de Vasicek.
2. **Parte II**: se desarrollan los modelos inciertos del bono cupón cero y de la tasa de interés.
   - Se introducen los conceptos esenciales de la Teoría Incierta: medida incierta, variable incierta, expectativa incierta y procesos inciertos.
   - Luego, se formulan los modelos financieros bajo este marco, incluyendo el valor actual incierto del bono cupón cero y la evolución de la tasa mediante el proceso de Liu (modelo de Chen y Gao).
3. **Parte III**: se construyen los modelos actuariales y se implementan numéricamente ambos enfoques.
   - Se define el seguro dotal puro y se desarrollan las reservas bajo distintos supuestos: la reserva clásica de primer orden y la reserva de mercado (de tercer orden).
   - Se integra el modelo de tasas estocásticas al cálculo de la reserva de mercado según Møller y Steffensen.
   - Posteriormente, se adapta dicho modelo al marco incierto, construyendo una versión alternativa de la reserva bajo el proceso de Liu.
   - Finalmente, se realiza una implementación numérica comparativa entre ambos enfoques (estocástico e incierto), analizando los resultados.

Parte I
Finanzas Estocásticas

2. BONO CUPÓN CERO

El objetivo de esta sección es presentar el tratamiento determinista y estocástico del bono cupón cero.

Matemáticas Deterministas

Estas definiciones son extraídas del material presentado en el libro de Vaaler *et al.* (2019), que proporciona una introducción rigurosa a la teoría del interés y sus aplicaciones financieras.

En Teoría del Interés, se estudia el concepto del **valor del dinero en el tiempo**. El valor temporal del dinero es un principio fundamental de las matemáticas financieras que establece que una cantidad de dinero tiene diferente valor dependiendo del momento en el que se disponga de ella, debido a factores como la capacidad de generar intereses o rendimientos. Matemáticamente, este principio se formaliza mediante el uso de tasas de interés, que, dependiendo de su comportamiento, permiten construir funciones de descuento, las cuales son utilizadas para calcular el **valor presente** y el **valor futuro** de un flujo de efectivo.

La **función de descuento**, denotada como $a^{-1}(t)$, es una herramienta fundamental en las matemáticas financieras que permite cuantificar el valor presente de una unidad monetaria futura. Su propósito es capturar la relación intrínseca entre el valor temporal del dinero y el efecto acumulativo de las tasas de interés sobre el tiempo. En términos formales, representa el factor multiplicativo que reduce el valor nominal futuro a su equivalente presente. En un marco general, se define como el **recíproco de la función de acumulación** $a(t)$, esto es

$$a^{-1}(t) = \frac{1}{a(t)},$$

donde $a(t)$, describe el crecimiento de 1 unidad monetaria invertida en $t = 0$ a lo largo de t períodos de tiempo.

Cuando se desea incorporar una **fuerza de interés variable**, $\bar{i}_t$ (**nomenclatura actuarial**), su dinámica determinista está dada por la siguiente sencilla ecuación diferencial

$$a'(t) = \bar{i}_t \cdot a(t), \tag{1}$$

la función de descuento se formaliza elegantemente como

$$a^{-1}(t) = e^{-\int_0^t \bar{i}_s ds}, \tag{2}$$

En el caso particular donde la fuerza de interés deja de ser variable (es constante), $\bar{i}_t = \bar{i}$, la función de descuento se simplifica a

$$a^{-1}(t) = e^{-\int_0^t \bar{i}\, ds} = e^{-\bar{i}\int_0^t ds} = e^{-\bar{i}t}, \tag{3}$$

en **el contexto actuarial** este caso particular es llamado **factor de descuento** y se denota como sigue

$$v^t = e^{-\bar{i}t}. \tag{4}$$

Gracias a la función de acumulación que depende de una fuerza de interés variable, es posible definir la función de monto $A(t)$, cuyo dominio es $\mathscr{D}_{A_\kappa} = \{t : t \in \mathbb{R}^+\}$. Esta función representa el saldo de una inversión inicial $A(0)$ en el tiempo t

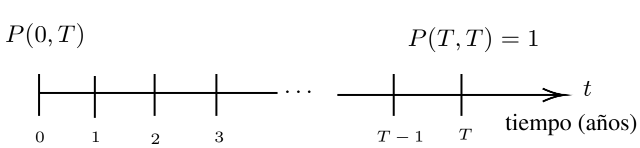
$$A(t) = A(0) \cdot e^{\int_0^t \bar{i}_s ds}, \tag{5}$$

en el contexto de ingeniería financiera, finanzas cuantitativas o finanzas matemáticas, esta función es llamada **cuenta bancaria**. La cual se considera el activo "libre de riesgo" en un portafolio de N activos riesgosos.

Un bono cupón cero (*zero-coupon bond*) es un instrumento de deuda que se distingue por la ausencia de pagos periódicos de interés (cupones), es decir, no realiza cupones durante su vida útil. Estos bonos se comercializan a un descuento respecto a su valor nominal, de manera que el único flujo de efectivo que el inversor recibe es el pago de dicho valor nominal al vencimiento del bono.

El rendimiento del bono se genera a partir de la apreciación del precio de compra inicial hasta el valor de redención al vencimiento. Esta estructura lo convierte en un instrumento financiero puro, donde la única consideración es el tiempo y el efecto de la capitalización compuesta de las tasas de interés.

Un bono descontado que comienza en el tiempo 0 y vence en el tiempo T es un valor con la promesa, por parte del emisor del bono, estableciendo que pague 1 unidad monetaria al tenedor del bono cuando este vence. De esta manera su valor máximo alcanzado en T es 1 unidad monetaria. El flujo de caja de un bono T que paga una unidad monetaria en el momento de vencimiento T se puede visualizar en la figura a continuación:



La relación más esencial, pero profundamente fundamental, para determinar el valor de un bono se expresa en la siguiente definición.

Definición 2.1. *Bono Cupón Cero Continuo.*

Sea $P(T,T)$ el valor nominal a recibir en el tiempo T (vencimiento del bono) e $\bar{i}_t$ la fuerza de interés variable respecto al tiempo. El valor presente en tiempo $t = 0$, $P(0,T)$, de un bono cupón cero se define como sigue

$$P(0,T) = P(T,T) \cdot e^{-\int_0^T \bar{i}_s ds}. \tag{6}$$

La fórmula resulta intuitiva: el valor del reclamo futuro se reduce a su equivalente presente utilizando una función de descuento apropiada, siendo aplicable a cualquier clase de reclamo. Sin embargo, su derivación no es inmediata ni evidente.

Tasas *Spot* & Tasas *Forward*

Las siguientes definiciones están basadas en el material presentado en el libro de Filipović (2009), el cual ofrece una introducción rigurosa a los modelos matemáticos de la estructura temporal de tasas de interés en tiempo continuo, explorando herramientas teóricas como modelos de tasas cortas, el marco de Heath-Jarrow-Morton, y análisis de procesos afines.

Considere un bono con precio a tiempo t denotado por $P(t,t_2)$, que vence en el tiempo t_2. Para entregar este bono en un tiempo t_1, $t < t_1 < t_2$, con la condición de no existencia de oportunidades de arbitraje. La tasa forward implícita $\bar{r}^f(t;t_1,t_2)$ para el período $[t_1,t_2]$, se define como:

$$\frac{P(t,t_2)}{P(t,t_1)} = e^{-(t_2-t_1)\bar{r}^f(t;t_1,t_2)}, \tag{7}$$

resolviendo para la tasa forward se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{r}^f(t;t_1,t_2) &= -\frac{\ln P(t,t_2) - \ln P(t,t_1)}{t_2 - t_1}, \\ &= \frac{(t_2-t)\bar{i}_{[t,t_2]} - (t_1-t)\bar{i}_{[t,t_1]}}{t_2-t_1}, \end{aligned} \tag{8}$$

donde $\bar{i}_{[t,t_j]} = -\frac{\ln\{P(t,t_j)\}}{t_j - t}$.

Al tomar el límite $t_2 - t_1 \to 0$, obtenemos la tasa forward instantánea, que refleja la tasa de interés para un infinitesimal período de tiempo en el futuro, y es denotada como $\bar{f}(t,t_2)$:

$$\begin{aligned} \bar{f}(t,t_2) &\equiv \lim_{t_1 \to t_2} \bar{r}^f(t;t_1,t_2), \\ &= -\frac{\partial}{\partial t_2} \ln P(t,t_2), \\ &= \bar{i}_{[t,t_2]} + (t_2-t)\frac{\partial}{\partial t_2}\bar{i}_{[t,t_2]}. \end{aligned} \tag{9}$$

Ahora es posible definir $\bar{i}_{[t,t]}$. Primero, observe que $\bar{f}(t,t) = \bar{i}_{[t,t]} = \text{lím}_{t_2 \to t} \bar{f}(t,t_2)$. Luego resulta

$$\begin{aligned} \bar{i}_{[t,t]} &= \lim_{t_2 \to t} -\frac{\ln\{P(t,t_2)\}}{t_2 - t}, \\ &= \lim_{t_2 \to t} -\frac{\partial}{\partial t_2} \ln\{P(t,t_2)\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Además, es posible expresar el precio del bono en términos de la tasa forward capitalizable continuamente

$$\begin{aligned} \ln\{P(t,t_2)\} - \ln\{P(t,t)\} &= \int_t^{t_2} \frac{\partial\{P(t,s)\}}{\partial s} ds, \\ &= \int_t^{t_2} -\bar{f}(t,s) ds, \end{aligned}$$

finalmente se obtiene:

$$P(t,t_2) = e^{-\int_t^{t_2} \bar{f}(t,s)ds}, \tag{11}$$

adicionalmente, resulta la siguiente relación entre la tasa forward y el factor de descuento

$$a^{-1}(t,T) = e^{-\int_t^{T} \bar{f}(t,s)ds}. \tag{12}$$

Matemáticas Estocásticas

Estas definiciones son obtenidas del material presentado en el libro de Björk (2020), el cual constituye una referencia completa sobre la teoría de arbitraje en tiempo continuo, abordando tanto los fundamentos de los mercados financieros como las aplicaciones avanzadas de los modelos estocásticos y la valoración de derivados financieros.

Se considera un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, donde Ω es el espacio muestral y $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra que representa el conjunto de eventos. La familia $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ es una filtración, es decir, una colección creciente de σ-álgebras tal que $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ para $s \leq t$. La medida de probabilidad $\mathbb{P}$ está definida en $\mathcal{F}$.

Una **variable aleatoria** es una función $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ que es $\mathcal{F}$-medible, lo cual significa que

$$Y^{-1}(A) \in \mathcal{F} \quad \text{para todo } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

donde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ representa la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$. Esta σ-álgebra es la colección más pequeña de conjuntos que contiene todos los intervalos abiertos de la forma (s,t), con $s \leq t$ y $s, t \in \mathbb{R}$.

De esta forma, la $\mathcal{F}$-medibilidad de Y garantiza que se pueda asignar una probabilidad a cualquier intervalo de valores posibles de Y a través de la estructura de $\mathcal{F}$ en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Un **proceso estocástico** es una colección de variables aleatorias $\{X_t\}_{t \in T}$ indexadas por el tiempo $t \in [0, \infty)$. Decimos que el proceso es adaptado si X_t es $\mathcal{F}_t$-medible para todo $t \geq 0$. Una **trayectoria muestral** de un proceso estocástico es la trayectoria de $X(\cdot, \omega)$, manteniendo ω fijo.

Consideramos un modelo de tiempo continuo con un horizonte finito $[0,T]$, donde las transacciones ocurren en instantes $t \in [0,T)$ y todos los resultados de estas transacciones se realizan en $t = T$. En $t = T$, no se efectúan nuevas transacciones, ya que todos los activos negociados se liquidan y distribuyen en ese momento.

Un **reclamo contingente** es una obligación de pago que depende de la realización de ciertos eventos futuros o del comportamiento de un activo subyacente. El monto y el momento del pago están condicionados a dichas contingencias. Por ejemplo: un seguro de vida, cuyo pago depende del fallecimiento del asegurado. Y una opción financiera, cuyo valor depende del precio del activo subyacente al vencimiento.

Definición 2.2. *Reclamo Contingente.*

Un reclamo contingente con vencimiento en T es un flujo de efectivo aleatorio representado con una variable aleatoria $\mathcal{X}$. Es el valor o el monto que será entregado al titular en el momento T, dependiendo de la información disponible en ese momento.

Para valorar de manera coherente los reclamos contingentes en un mercado sin arbitraje, se utiliza una **medida de martingala** $\mathbb{Q}$ que permite construir un proceso de precios consistente con los precios de los activos subyacentes. Bajo esta medida $\mathbb{Q}$, los precios descontados de los activos actúan como martingalas, lo que asegura que no existen oportunidades de obtener ganancias sin riesgo mediante arbitraje.

La medida $\mathbb{Q}$ transforma la valoración al permitir que el valor presente esperado de los pagos futuros del reclamo contingente bajo esta medida sea igual al precio de mercado. Este ajuste asegura que la estructura de precios en el mercado sea coherente y que los precios reflejen el riesgo inherente de los flujos de efectivo futuros. De esta manera $\mathbb{Q}$ es la medida de probabilidad usada para la valoración de los bonos y los derivados de la tasa de interés, por ello su nombre alternativo es **medida del mercado**.

En este mercado se negocia una cuenta monetaria $A(t)$ y N activos riesgosos. Los mercados son **sin fricciones** y **competitivos**, lo cual implica:

- **Sin fricciones**: no existen costos de transacción, impuestos diferenciales ni límites en la cantidad negociada; los activos son divisibles y no están sujetos a restricciones como ventas en corto, límites de préstamo, o márgenes.

- **Competitividad**: los operadores actúan como tomadores de precios, es decir, pueden negociar cualquier cantidad deseada sin afectar el precio de mercado.

Consideremos un conjunto de N **activos riesgosos**, $\mathbb{S}_t = (\mathbb{S}_{1t}, \ldots, \mathbb{S}_{Nt})^\top > 0$, el vector de precios de los N activos riesgosos en el tiempo t. Note que se excluye el activo $\mathbb{S}_{0t}$, esto se debe a que se define que $\mathbb{S}_{0t}$ representa un activo **libre de riesgo**, en este marco en particular, es una **cuenta monetaria** $A(t)$. Específicamente $\mathbb{S}_{0t}$ juega un papel fundamental como **activo numéraire** en el modelo.

En el contexto de valoración de activos, todos los precios se interpretan en términos de un **numéraire** seleccionado a priori, que sirve como unidad de referencia para expresar el valor de otros activos. Este numéraire suele ser una moneda local, como el peso mexicano (MX). No obstante, se podría utilizar cualquier otro activo o indicador como base, siempre que sea adecuado para el análisis. Para simplificar, en este caso elegimos el activo $\mathbb{S}_{0t}$ como numéraire. Se modela de acuerdo con la siguiente dinámica:

$$d\mathbb{S}_{0t} = \mathbb{S}_{0t}\, \bar{i}_t\, dt, \quad \mathbb{S}_{00} = 1, \quad \mathbb{P}(\mathbb{S}_{0t} > 0) = 1 \;\; \forall t > 0,$$

donde

- $\bar{i}$ es la tasa libre de riesgo, un proceso estocástico adaptado a la filtración $\mathcal{F}$ y que cumple la condición de integrabilidad $\displaystyle\int_0^t |\bar{i}_s|\, ds < \infty$ para todo $t \geq 0$, es decir, es un proceso estocástico adaptado.
- Es importante notar que $A(t) > 0$ para todo $t \geq 0$.
- La cuenta monetaria se inicia con una inversión de una unidad monetaria, es decir, $A(0) = 1$.

Consideramos el mercado "primario" o "subyacente" de activos $\mathbb{S}_{1t}, \ldots, \mathbb{S}_{Nt}$ como dado a priori y fijamos un reclamo contingente $\mathcal{X}$. El objetivo es determinar un proceso de precios "razonable" $\Pi_t[\mathcal{X}]$ para $\mathcal{X}$ asumiendo que el mercado primario está libre de arbitraje.

El precio de un derivado debe ser consistente con los precios de los activos subyacentes. Esto implica que el mercado extendido $\Pi[\mathcal{X}], \mathbb{S}_{1t}, \ldots, \mathbb{S}_{Nt}$ debe estar libre de posibilidades de arbitraje. Para lograrlo, debe existir una medida de martingala $\mathbb{Q}$ para el mercado extendido.

Teorema 2.3. *Fórmula General de Valoración.*

El proceso de precios libre de arbitraje para el reclamo $\mathcal{X}$ de vencimiento T está dado por:

$$\Pi_t[\mathcal{X}] = \mathbb{S}_{0t}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{\Pi_T[\mathcal{X}]}{\mathbb{S}_{0T}}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{S}_{0t}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{\mathcal{X}}{\mathbb{S}_{0T}}\middle|\mathcal{F}_t\right], \tag{13}$$

donde $\mathbb{Q}$ es una medida de martingala (no necesariamente única) para el mercado dado con $\mathbb{S}_{0t}$ como numéraire.

Lema 2.4. *Valoración Neutral al Riesgo.*

Asumiendo la ***existencia de una fuerza de interés estocástica*** *$\bar{i}_t$, la fórmula de valoración toma la forma:*

$$\Pi_t[\mathcal{X}] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T \bar{i}_s ds}\mathcal{X}\middle|\mathcal{F}_t\right], \tag{14}$$

donde $\mathbb{Q}$ es una medida de martingala con la ***cuenta monetaria como numéraire****.*

El mercado de bonos se diferencia de otros mercados financieros en los siguientes aspectos:

- Contiene un número infinito de activos (un bono por cada posible tiempo de vencimiento T).
- Cada bono tiene una trayectoria estocástica específica, dependiendo de su vencimiento.

Bajo una medida martingala neutral al riesgo $\mathbb{Q}$, el precio actual de un reclamo contingente $\mathcal{X}$ pagadero en el tiempo T se calcula mediante (14). Para un bono cupón cero con vencimiento T, el reclamo contingente $\mathcal{X} = 1$, por lo tanto, se obtiene la siguiente definición.

Definición 2.5. *Precio Justo de un Bono Cupón Cero. Considere un reclamo contingente $\mathcal{X} = 1$ con vencimiento T, por definición, es un bono cupón cero. Por lo tanto, bajo una medida martingala neutral al riesgo $\mathbb{Q}$, el precio de un bono cupón cero al instante t se calcula como*

$$P(t,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T \bar{i}_s ds} \mid \mathcal{F}_t\right]. \tag{15}$$

Aplicando Itó a $P(t,T)$ se obtiene su dinámica estocástica

$$dP = \frac{\partial P}{\partial t}dt + \frac{\partial P}{\partial \bar{i}}d\bar{i} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial \bar{i}^2}d\langle \bar{i}\rangle.$$

Asumiendo que **la fuerza de interés** sigue una ecuación diferencial estocástica de la siguiente forma

$$d\bar{i}_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

sustituyendo en la dinámica de P se obtiene

$$dP(t,T) = P(t,T)m_t dt + P(t,T)v_t dW_t^{\mathbb{P}}, \tag{16}$$

donde

- $m_t = \frac{1}{P}\left[\frac{\partial P}{\partial t} + \mu_t\frac{\partial P}{\partial \bar{i}} + \frac{\sigma_t^2}{2}\frac{\partial P}{\partial \bar{i}^2}\right]$.
- $v_t = \frac{1}{P}\sigma_t\frac{\partial P}{\partial \bar{i}}$.

Ahora es de interés cambiar la medida de $\mathbb{P}$ a $\mathbb{Q}$, una medida equivalente, bajo la cual el precio de los bonos cumple con la **ausencia de arbitraje**.

Para garantizar que las medidas $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ sean equivalentes, se asume que γ_t satisface la condición de Novikov. Se define un nuevo movimiento Browniano $W^{\mathbb{Q}}$ bajo la medida $\mathbb{Q}$ como

$$W^{\mathbb{Q}} = W^{\mathbb{P}} + \int_0^t \gamma_s ds,$$

además, la relación entre ambas medidas es

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left\{ -\int_0^T \gamma_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 dt \right\}$$

De esta forma el precio del bono $P(t,T)$ bajo $\mathbb{Q}$ es

$$\begin{aligned} dP(t,T) &= P(t,T)\left[m_t dt + v_t dW_t^{\mathbb{P}}\right], \\ &= P(t,T)\left[m_t dt + v_t(dW^{\mathbb{Q}} - \gamma_t dt)\right], \\ &= P(t,T)\left[(m_t - \gamma_t v_t)dt + v_t dW^{\mathbb{Q}}\right], \end{aligned}$$

recordando que para que sea una martingala bajo la medida de riesgo neutral $\mathbb{Q}$, la deriva debe ser igual a la fuerza de interés, por lo tanto

$$dP(t,T) = P(t,T)\left[\bar{i}_t dt + v_t dW^{\mathbb{Q}}\right]. \tag{17}$$

Manteniendo la asunción que la fuerza de interés $\bar{i}_t$ es modelada mediante la siguiente ecuación diferencial estocástica (en la Sección 3 se definirá de manera detallada)

$$d\bar{i}_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t^{\mathbb{P}},$$

la dinámica estocástica bajo $\mathbb{Q}$ es

$$d\bar{i}_t = \tilde{\mu}_t dt + \sigma_t dW_t^{\mathbb{Q}} = (\mu_t - \gamma_t\sigma_t)dt + \sigma_t dW_t^{\mathbb{Q}},$$

para simplificar el análisis, asumimos que $\gamma_t = 0$, lo que implica que $\mathbb{P}$ es la medida martingala utilizada en el mercado, lo que implica

$$\tilde{\mu}_t = \mu_t.$$

La propiedad de Markov establece que el futuro de $\bar{i}_t$ después de un tiempo t depende únicamente del valor presente $\bar{i}_t$ y no del historial completo

$$\mathbb{E}[f(X_{t_1},\ldots,X_{t_n}) \mid \mathcal{F}t] = \mathbb{E}[f(Xt_1,\ldots,X_{t_n}) \mid X_t],$$

para cualquier función integrable f.

Las soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas como $d\bar{i}_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$ tienen esta propiedad de manera inherente. De esta manera, el precio de un bono cupón cero $P(t,T)$ satisface

$$\begin{aligned} P(t,T) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T \bar{i}_s ds} \mid \mathcal{F}_t\right], \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T \bar{i}_s ds} \mid \bar{i}_t\right], \end{aligned} \tag{18}$$

es decir, depende únicamente de $\bar{i}_t$:

$$P(t,T) = F(t,\bar{i}_t), \tag{19}$$

donde $F(t,\cdot)$ es una función de $\bar{i}_t$ que se determina resolviendo una ecuación diferencial parcial asociada al modelo. Dicho esto, es natural notar que la siguiente relación surge

$$P(t,T) = F(t,\bar{i}_t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T \bar{i}_s ds}\right], \tag{20}$$

para formalizar y verificar este resultado, se hace uso de la representación de Feynman-Kac.

3. FUERZA DE INTERÉS ESTOCÁSTICA

Esta sección está basada en el material presentado en $M\emptyset llery Steffensen$ (2007).

Un **bono cupón cero** es un contrato que tiene un precio de mercado en el tiempo t, denotado como $P(t,T)$, y que promete un pago de 1 unidad monetaria al vencimiento T. La determinación del precio de este bono a partir de un proceso subyacente de tasas de interés a corto plazo $\bar{i}_t$.

1. **Tasa de interés constante y determinista** ($\bar{i}$):

   - Si la fuerza de interés variable es una constante determinista $\bar{i} > 0$, el precio del bono cupón cero debe satisfacer:

$$\begin{aligned} P(t,T) &= 1\cdot e^{-\int_t^T \bar{i}_s = \bar{i}\; ds}, \\ &= 1\cdot e^{-\bar{i}\int_t^T ds}, \\ &= 1\cdot e^{-\bar{i}|_t^T}, \\ &= 1\cdot e^{-\bar{i}(T-t)}, \quad 0 \le t \le T. \end{aligned}$$

2. **Tasa de interés dependiente del tiempo y determinista** ($\bar{i}_t$):

   - Cuando la fuerza interés varía en función del tiempo, pero sigue siendo determinista, se tiene que:

$$P(t,T) = 1\cdot e^{-\int_t^T \bar{i}_s\, ds}, \quad 0 \le t \le T.$$

3. **Tasa de interés estocástica ($\bar{i}_t$):**

   - Si la fuerza de interés se modela como un proceso estocástico, la fórmula anterior ya no es aplicable directamente. En este caso, el precio del bono en el tiempo t sólo puede depender de la información disponible hasta ese instante, lo que significa que $P(t,T)$ se construye considerando la expectativa de la evolución futura de la tasa de interés, condicionada a la información presente en el tiempo t. Su precio es aquel que se obtiene mediante **la valoración neutral al riesgo** (2.5).

La modelización de tasas de interés a corto plazo es fundamental para la valoración de instrumentos financieros derivados y la gestión de carteras de renta fija. La tasa de interés instantánea $\bar{i}_t$ (también conocida como **fuerza de interés**, **tasa de interés a corto plazo** o *tasa de interés spot*) es la tasa aplicable para operaciones de préstamo o inversión a un horizonte temporal infinitesimal alrededor de un instante t. Esta tasa describe el costo del capital en el mercado libre de riesgo a lo largo de intervalos infinitesimales $[t, t+dt]$.

Un **modelo de un factor** se basa en la idea de que hay una única fuente de aleatoriedad que afecta a los precios de los bonos. Esta fuente es generalmente un proceso de Browniano unidimensional, B_t. Si la fuerza de interés $\bar{i}_t$ está determinada por un único factor, entonces conocer cómo cambia $\bar{i}_t$ permite inferir los cambios en los precios de todos los bonos.

Un **modelo multifactorial** considera que hay múltiples fuentes de aleatoriedad que afectan a los precios de los bonos, podrían incluir diferentes procesos estocásticos.

Modelos de un Factor

Los modelos de un factor se utilizan para describir la estructura temporal de las tasas de interés. Estos modelos se basan en un enfoque estocástico para modelar la tasa libre de riesgo, $\bar{i}_t$ mediante una ecuación diferencial estocástica (EDE). En general, se asume que $\bar{i}_t$ sigue un proceso de Itô de la forma

$$d\bar{i}_t = a_t dt + b_t dW_t,$$

para simplificar el análisis, se asume que a_t y b_t dependen únicamente del valor actual de $\bar{i}_t$, es decir: $a_t = a(\bar{i}_t)$ y $b_t = b(\bar{i}_t)$. Bajo esta suposición, $\bar{i}_t$ es un proceso de Markov homogéneo en el tiempo.

Se considera un modelo de estructura temporal en el que la única fuente de aleatoriedad es un movimiento browniano unidimensional. Las tasas de interés libres de riesgo $\bar{i}_t$ y el precio $P(t,T)$ de un bono cupón cero que vence en T están modelados mediante las siguientes ecuaciones diferenciales estocásticas:

1. Para la tasa libre de riesgo $\bar{i}_t$:

$$d\bar{i}_t = a_t dt + b_t dW_t, \tag{21}$$

   donde a_t y b_t son funciones que describen la deriva y la volatilidad de $\bar{i}_t$, respectivamente.

2. Para el precio del bono $P(t,T)$:

$$dP(t,T) = P(t,T)[m(t,T)dt + S(t,T)dW_t], \tag{22}$$

   donde $m(t,T)$ es la tasa esperada de retorno del bono y $S(t,T)$ representa la volatilidad del bono.

Se asocia a estos procesos una cuenta monetaria (el activo libre de riesgo) $A(t)$, cuya evolución está dada por

$$dA(t) = \bar{i}_t A(t) dt, \tag{23}$$

cuya solución es

$$A(t) = A(0) \exp\left(\int_0^t \bar{i}_s ds\right), \tag{24}$$

lo anterior refleja cómo la fuerza de interés afecta la evolución del valor de una inversión libre de riesgo.

Modelo Vasicek

El modelo de Vasicek es un caso particular dentro de los modelos de un factor para la estructura temporal de tasas de interés. Fue introducido en 1977 y es ampliamente utilizado por su simplicidad matemática y capacidad para capturar ciertos comportamientos fundamentales de las tasas de interés. El modelo describe la dinámica de la tasa libre de riesgo $\bar{i}_t$ mediante una ecuación diferencial estocástica (EDE).

La ecuación para $\bar{i}_t$ está dada por:

$$d\bar{i}_t = (\mu - \alpha \bar{i}_t)dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}, \tag{25}$$

- Término de reversión a la media

$$(\mu - \alpha \bar{i}_t)dt,$$

  este término fuerza a $\bar{i}_t$ a regresar hacia su media a largo plazo μ. Los elementos clave son:

  - μ: representa la media a largo plazo de $\bar{i}_t$ bajo la medida $\mathbb{Q}$. Se interpreta como la tasa libre de riesgo esperada a largo plazo.
  - α: es la velocidad de reversión. Un valor alto de α implica que $\bar{i}_t$ regresa rápidamente a μ, mientras que un valor bajo implica una reversión más lenta.

- Término de volatilidad

$$\sigma dW_t^{\mathbb{Q}},$$

este término introduce aleatoriedad en el modelo. Aquí:

  - σ: representa la magnitud de la volatilidad local de $\bar{i}_t$, es decir, cuán sensibles son las tasas de interés a corto plazo a las fluctuaciones aleatorias.
  - $dW_t^{\mathbb{Q}}$: es el incremento infinitesimal del movimiento browniano estándar bajo $\mathbb{Q}$, que introduce la componente estocástica en la evolución de $\bar{i}_t$.

Ahora que ya se tiene la ecuación diferencial estocástica que modela la dinámica de la fuerza de interés, se puede construir la valoración de un bono cupón cero que depende de dicha dinámica.

Definición 3.1. *Bono Cupón Cero de Vasicek*

Si la fuerza de interés estocástica se rige bajo el modelo de Vasicek

$$d\bar{i}_t = (\mu - \alpha\bar{i}_t)dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}, \tag{26}$$

el precio del bono cupón cero es

$$P(t,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T \bar{i}_s ds} \,|\, \mathcal{F}_t\right] = e^{A(t,T) - B(t,T)\bar{i}_t}, \tag{27}$$

1. *La función $B(t,T)$ se define como sigue*

$$B(t,T) = \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}. \tag{28}$$

2. *Para $A(t,T)$ se obtiene*

$$A(t,T) = \frac{[B(t,T) - (T-t)]\left(\alpha\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\alpha^2} - \frac{\sigma^2\,[B(t,T)]^2}{4\alpha}. \tag{29}$$

Parte II

Finanzas Inciertas

4. TEORÍA INCIERTA

El propósito de esta sección es exhibir conceptos básicos de la Teoría Incierta, sin profundizar por fines de no hacer extenso el documento. Se presentan aquellos conceptos necesarios para entender la diferencia entre una medida de probabilidad y una medida incierta.

Estas definiciones son extraídas del material presentado en el libro Liu (2015), el cual ofrece una visión exhaustiva de la Teoría de la Incertidumbre, explorando sus fundamentos axiomatizados, aplicaciones en programación incierta y modelos de ecuaciones diferenciales inciertas.

Medida Incierta

La **Medida Incierta** es un concepto en la teoría matemática de la incertidumbre, que define una medida basada en el **grado de creencia** de la ocurrencia de un evento, en lugar de su frecuencia. Este marco es particularmente útil en situaciones donde el modelo probabilístico tradicional no describe adecuadamente las incertidumbres subyacentes.

Una **medida incierta** $\mathcal{M}$ es una herramienta matemática utilizada para cuantificar el grado de creencia en la ocurrencia de eventos, basada en una σ-álgebra $\mathcal{L}$ sobre un conjunto universal Γ.

Una función de conjunto $\mathcal{M}$ se denomina **medida incierta** si satisface los axiomas de normalidad, dualidad y subaditividad.

- **Axioma de Normalidad:** la medida de todo el espacio es uno, es decir

$$\mathcal{M}(\Gamma) = 1,$$

  esto asegura que la creencia completa no puede superar uno, ya que Γ es completamente creíble.
- **Axioma de Dualidad:** la suma de las medidas de un evento y su complemento es siempre uno

$$\mathcal{M}(A) + \mathcal{M}(A^c) = 1,$$

  para cualquier evento A. Indica que la suma de la creencia en un evento y su complemento siempre es uno. .
- **Axioma de Subaditividad:** para cualquier secuencia contable de eventos $A_1, A_2, \ldots$, la medida de la unión es menor o igual que la suma de las medidas individuales

$$\mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}\{A_i\},$$

  la creencia combinada de eventos no debe exceder la suma de las creencias individuales, lo que se demuestra con un argumento de comisiones negativas.

Observaciones:

- La medida incierta no es una frecuencia, sino una representación del grado de creencia, que puede cambiar con nueva información.
- El axioma de dualidad es una manifestación del principio de no contradicción y el tercero excluido en lógica clásica, asegurando que la suma de la creencia y la duda sobre un evento siempre suma uno.
- No existe una regla general para determinar la creencia sobre la unión de eventos a partir de sus creencias individuales, destacando la flexibilidad y la complejidad de la teoría de la medida incierta en contraste con la probabilidad clásica.

- La violación del axioma de subaditividad puede llevar a resultados paradójicos o contradictorios, evidenciando su importancia para la coherencia del sistema de medidas.
- Aunque las medidas de probabilidad cumplen con los axiomas básicos, no son casos especiales de medidas inciertas debido a diferencias en axiomas adicionales como el axioma de producto.

Definición 4.1. *Espacio de Incertidumbre.*

Un espacio de incertidumbre $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ *es un conjunto no vacío* Γ*, una* σ*-álgebra* $\mathcal{L}$ *sobre* Γ*, y una medida incierta* $\mathcal{M}$*. Este trío define completamente un espacio de incertidumbre.*

Para propósitos prácticos, el estudio de espacios de incertidumbre a veces se limita a espacios de incertidumbre completos.

Definición 4.2. *Espacio de Incertidumbre Completo.*

Un espacio de incertidumbre $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ *) se considera completo si para cualquier* $A_1, A_2 \in \mathcal{L}$ *con* $\mathcal{M}(A_1) = \mathcal{M}(A_2)$ *y cualquier subconjunto* A *con* $A_1 \subseteq A \subseteq A_2$*, se tiene* $A \in \mathcal{L}$ *y*

$$\mathcal{M}\{A\} = \mathcal{M}\{A_1\} = \mathcal{M}\{A_2\}.$$

Sea $(\Gamma_k, \mathcal{L}_k, \mathcal{M}_k)$ espacios de incertidumbre para $k = 1, 2, \ldots$. Se define

$$\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \ldots \quad ,$$

que es el conjunto de todas las tuplas ordenadas de la forma $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$, donde $\gamma_k \in \Gamma_k$ para $k = 1, 2, \ldots$ Un rectángulo medible en Γ es un conjunto

$$\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \ldots \quad ,$$

donde $\Lambda_k \in \mathcal{L}_k$ para $k = 1, 2, \ldots$ La menor σ-álgebra que contiene todos los rectángulos medibles de Γ se llama la σ-álgebra producto, denotada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2 \times \ldots \quad ,$$

entonces, la medida incierta de producto $\mathcal{M}$ sobre la σ-álgebra producto $\mathcal{L}$ se define por el siguiente axioma de producto.

Teorema 4.3. *Axioma de Producto*

Sea $(\Gamma_k, \mathcal{L}_k, \mathcal{M}_k)$ *espacios de incertidumbre para* $k = 1, 2, \ldots$ *La medida incierta de producto* $\mathcal{M}$ *es una medida incierta que satisface*

$$\mathcal{M}\left\{\prod_{k=1}^{\infty} \Lambda_k\right\} = \bigwedge_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\},$$

donde Λ_k *son eventos arbitrariamente elegidos de* $\mathcal{L}_k$ *para* $k = 1, 2, \ldots$*, respectivamente.* $\wedge$ *representa el mínimo de las medidas individuales.*

Se asume que $(\Gamma_k, \mathcal{L}_k, \mathcal{M}_k)$ son espacios de incertidumbre para $k = 1, 2, \ldots$. Se define

$$\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \ldots, \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2 \times \ldots, \quad \mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \wedge \mathcal{M}_2 \wedge \ldots$$

Entonces, la tripleta $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ se denomina *espacio de incertidumbre de producto*.

Ahora, ya conocida la media incierta, se puede comparar con la medida de probabilidad.

Probabilidad vs Incertidumbre

Medida del producto de eventos.

- Teoría de probabilidad (Kolmogorov): La probabilidad de un producto de eventos es el producto de las probabilidades individuales

$$\mathbb{P}\{A \times B\} = \mathbb{P}\{A\} \times \mathbb{P}\{B\}.$$

- Teoría de incertidumbre (Liu): la medida de incertidumbre de un producto de eventos es el mínimo de las medidas de incertidumbre individuales

$$\mathcal{M}\{A \times B\} = \mathcal{M}\{A\} \wedge \mathcal{M}\{B\}.$$

Teorema del Producto.

- Producto de Probabilidad: en un espacio de probabilidad $(\Omega_k, \mathcal{A}_k, \mathbb{P}_k)$ para $k = 1, 2, \ldots$, la medida de probabilidad producto se define como una medida que satisface la siguiente propiedad:

$$\mathbb{P}\left(\prod_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_k(A_k),$$

  donde A_k son eventos arbitrarios seleccionados de $\mathcal{A}_k$, el sigma-álgebra asociado al espacio Ω_k.
- Producto de Medidas Inciertas: en un espacio incierto $(\Gamma_k, \mathcal{L}_k, \mathcal{M}_k)$ para $k = 1, 2, \ldots$, la medida incierta producto sigue un principio análogo pero definido bajo el marco de la teoría de incertidumbre. Esta medida satisface la relación

$$\mathcal{M}\left(\prod_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \bigwedge_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k(\Lambda_k),$$

  donde Λ_k son eventos arbitrarios pertenecientes a $\mathcal{L}_k$, la colección de conjuntos medibles asociados al espacio incierto Γ_k.

En lugar de usar productos (como en probabilidad), la teoría de incertidumbre emplea el operador mínimo $\wedge$, consistente con su definición de medida incierta.

La **teoría de probabilidad se interpreta en términos de frecuencia** (relacionada con eventos repetibles).

La **teoría de incertidumbre se interpreta como el grado de creencia** (subjetiva).

Independencia

Al igual que en la Teoría de Probabilidad, se define el concepto de independecia.

Definición 4.4. *Independencia.*

Los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se consideran independientes si

$$\mathcal{M}\left\{\bigcap_{i=1}^{n} A_i^*\right\} = \bigvee_{i=1}^{n} \mathcal{M}\{A_i^*\},$$

donde A_i^* son elegidos arbitrariamente de $\{A_i, A_i^c, \Gamma\}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, y Γ es el evento seguro. $\vee$ representa el máximo de las medidas individuales.

Especialmente, dos eventos A_1 y A_2 son independientes si y solo si

$$\{A_1^* \cap A_2^*\} = \mathcal{M}\{A_1^*\} \wedge \mathcal{M}\{A_2^*\},$$

donde A_i^* son elegidos arbitrariamente de $\{A_i, A_i^c\}$ para $i = 1, 2$, y se cumplen las siguientes cuatro ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\{A_1 \cap A_2\} &= \mathcal{M}\{A_1\} \wedge \mathcal{M}\{A_2\},\\
\mathcal{M}\{A_1 \cap A_2^c\} &= \mathcal{M}\{A_1\} \wedge \mathcal{M}\{A_2^c\},\\
\mathcal{M}\{A_1^c \cap A_2\} &= \mathcal{M}\{A_1^c\} \wedge \mathcal{M}\{A_2\},\\
\mathcal{M}\{A_1^c \cap A_2^c\} &= \mathcal{M}\{A_1^c\} \wedge \mathcal{M}\{A_2^c\}.
\end{aligned}$$

Teorema 4.5. *Los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son independientes si y solo si*

$$\mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i^*\right\} = \bigvee_{i=1}^{n} \mathcal{M}\{A_i^*\},$$

donde A_i^* son elegidos arbitrariamente de $\{A_i, A_i^c, \emptyset\}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, y $\emptyset$ es el evento imposible.

Teorema 4.6. *Sea $(\Gamma_k, \mathcal{L}_k, \mathcal{M}_k)$ espacios de incertidumbre para $k = 1, 2, \ldots, n$. Entonces los eventos*

$$\Gamma_1 \times \cdots \times \Gamma_{k-1} \times \Lambda_k \times \Gamma_{k+1} \times \cdots \times \Gamma_n \quad .$$

son siempre independientes en el espacio de incertidumbre de producto. Es decir, los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son siempre independientes si provienen de espacios de incertidumbre diferentes.

Variables Inciertas

En probabilidad existen variables aleatorias, en este marco, se definen las variables inceirtas.

Definición 4.7. *Variable Incierta*

Una variable incierta ξ es una función del espacio de incertidumbre $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ a los números reales tal que para cualquier conjunto de Borel B, el conjunto $\{\xi \in B\}$ es un evento, es decir, $\{\gamma \in \Gamma : \xi(\gamma) \in B\} \in \mathcal{L}$.

Una variable incierta ξ es:

- *No negativa* si $\mathcal{M}\{\xi < 0\} = 0$. Es decir, no existe creencia alguna (o esta es nula) de que ξ pueda adoptar valores estrictamente negativos.
- *Positiva* si $\mathcal{M}\{\xi \leq 0\} = 0$. Restringiendo aún más la medida incierta de una variable, el evento en que la variable incierta ξ toma un valor menor o igual a cero es considerado "imposible" o, más precisamente, tiene un grado de creencia nulo. Se está imponiendo que ni siquiera el caso extremo $\xi = 0$ es creíble; es decir, la totalidad de la "masa" de creencia se concentra en los valores estrictamente positivos, $\{\xi > 0\}$. La consecuencia inmediata es que la totalidad del grado de creencia se concentra en el intervalo $(0, +\infty)$, la variable ξ es estrictamente positiva. Ya que ni la posibilidad de ser negativa ni la posibilidad de ser cero son admitidas.
- Decimos que dos variables inciertas ξ y η son *iguales* si $\xi(\gamma) = \eta(\gamma)$ para casi todos $\gamma \in \Gamma$ respecto a $\mathcal{M}$.
- Si $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ son variables inciertas y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función medible, entonces la variable incierta ξ definida por $\xi(\gamma) = f(\xi_1(\gamma), \xi_2(\gamma), \ldots, \xi_n(\gamma))$ para todo $\gamma \in \Gamma$ es también una variable incierta.

Definición 4.8. *Las variables inciertas $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ se consideran independientes si, para cualquier conjunto de Borel $B_1, B_2, \ldots, B_n$, se cumple*

$$\mathcal{M}\left\{\bigcap_{i=1}^{n} (\xi_i \in B_i)\right\} = \bigwedge_{i=1}^{n} \mathcal{M}\{\xi_i \in B_i\},$$

esto indica que la medida incierta conjunta es el mínimo de las medidas inciertas individuales.

Definición 4.9. *Las variables inciertas $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ son independientes si y sólo si para cualquier conjunto de Borel $B_1, B_2, \ldots, B_n$, se cumple*

$$\mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=1}^{n} (\xi_i \in B_i)\right\} = \bigvee_{i=1}^{n} \mathcal{M}\{\xi_i \in B_i\}.$$

Distribuciones Inciertas

Una vez ya conocida la variable incierta, se puede construir una distribución incierta.

Definición 4.10. *Distribución incierta.*

La distribución incierta Φ de una variable incierta ξ se define por

$$\Phi(x) = \mathcal{M}\{\xi \leq x\},$$

para cualquier número real x.

Dos variables inciertas ξ y η se dicen *distribuidas idénticamente* si tienen la misma distribución incierta, aunque esto no implica que $\xi = \eta$. Por ejemplo, si ξ y η pueden tomar valores con los mismos grados de creencia pero en diferentes contextos o configuraciones, aún así tendrán la misma distribución incierta.

Teorema 4.11. *Teorema Peng-Iwamura.*

Una función $\Phi : \mathbb{R} \to [0,1]$ es una distribución incierta si y solo si es una función monótona creciente tal que $\Phi(x) = 0$ para x suficientemente pequeño y $\Phi(x) = 1$ para x suficientemente grande.

Definición 4.12. *Variable Incierta Normal.*

*Una variable incierta ξ se dice **normal** si posee una distribución incierta normal, dada por la función:*

$$\Phi(x) = \left(1 + \exp\left(-\frac{\pi(e-x)}{\sqrt{3}\sigma}\right)\right)^{-1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

denotada por $\mathcal{N}(e, \sigma)$, donde e y σ son números reales con $\sigma > 0$.

Sean ξ_1 y ξ_2 variables inciertas normales independientes con distribuciones $\mathcal{N}(e_1, \sigma_1)$ y $\mathcal{N}(e_2, \sigma_2)$, respectivamente. Entonces:

1. Suma de variables inciertas normales: la suma $\xi_1 + \xi_2$ es también una variable incierta normal, con parámetros

$$\mathcal{N}(e_1, \sigma_1) + \mathcal{N}(e_2, \sigma_2) = \mathcal{N}(e_1 + e_2, \sigma_1 + \sigma_2).$$

2. Producto por un escalar: el producto de una variable incierta normal $\mathcal{N}(e, \sigma)$ y un escalar positivo $k > 0$ es también una variable incierta normal, con parámetros modificados

$$k \cdot \mathcal{N}(e, \sigma) = \mathcal{N}(ke, k\sigma).$$

Definición 4.13. *Variable Incierta Lognormal*

*Una variable incierta ξ se considera **lognormal** si es una variable normal $\mathcal{N}(e, \sigma)$ transformada mediante el logaritmo, es decir, su distribución está definida como:*

$$\Phi(x) = \left(1 + \exp\left(\frac{\pi(e - \ln\{x\})}{\sqrt{3}\sigma}\right)\right)^{-1}, \quad x \geq 0,$$

denotada por $\mathcal{LOGN}(e, \sigma)$.

Sean ξ_1 y ξ_2 variables inciertas lognormales independientes con distribuciones $\mathcal{LOGN}(e_1, \sigma_1)$ y $\mathcal{LOGN}(e_2, \sigma_2)$, respectivamente. Entonces:

1. Producto de variables inciertas lognormales: El producto $\xi_1 \cdot \xi_2$ es también una variable incierta lognormal, con parámetros

$$\mathcal{LOGN}(e_1, \sigma_1) \cdot \mathcal{LOGN}(e_2, \sigma_2) = \mathcal{LOGN}(e_1 + e_2, \sigma_1 + \sigma_2).$$

2. Producto por un escalar: El producto de una variable incierta lognormal $\mathcal{LOGN}(e, \sigma)$ y un escalar positivo $k > 0$ es también una variable incierta lognormal, con parámetros modificados

$$k \cdot \mathcal{LOGN}(e, \sigma) = \mathcal{LOGN}(e + \ln\{k\}, \sigma).$$

Para cualquier variable incierta ξ con distribución Φ:

$$\mathcal{M}\{\xi \leq x\} = \Phi(x), \quad \mathcal{M}\{\xi > x\} = 1 - \Phi(x).$$

Si Φ es continua, también se cumplen las siguientes relaciones para ξ:

$$\mathcal{M}\{\xi < x\} = \Phi(x), \quad \mathcal{M}\{\xi \geq x\} = 1 - \Phi(x).$$

La **distribución incierta inversa** Φ^{-1} de una variable incierta con distribución regular Φ se define como la función inversa de Φ, que existe en el intervalo abierto (0,1).

Una función Φ^{-1} es una distribución incierta inversa de una variable incierta ξ si y solo si para cualquier $\alpha \in [0,1]$,

$$\mathcal{M}\{\xi \leq \Phi^{-1}(\alpha)\} = \alpha,$$

esto implica que Φ es la distribución incierta de ξ y Φ^{-1} es su inversa.

Asumiendo que la función inversa Φ^{-1} satisface la siguiente relación para todo $\alpha \in [0,1]$:

$$M\{\xi \leq \Phi^{-1}(\alpha)\} = \alpha,$$

esto implica que si escribimos $x = \Phi^{-1}(\alpha)$, entonces $\alpha = \Phi(x)$ y así:

$$M\{\xi \leq x\} = \Phi(x),$$

demostrando que Φ es la distribución incierta de ξ y Φ^{-1} es su distribución incierta inversa. Esta relación confirma que la distribución y su inversa están correctamente definidas y operan como se espera dentro del marco de la teoría de la incertidumbre.

Definición 4.14. *Valor Esperado de una Variable Incierta*

Para una variable incierta ξ, el valor esperado $E[\xi]$ se define mediante la integral:

$$E[\xi] = \int_0^{+\infty} M\{\xi \geq x\}\, dx - \int_{-\infty}^{0} M\{\xi \leq x\}\, dx,$$

suponiendo que al menos uno de los dos integrales es finito. Esta definición capta tanto la contribución de los valores positivos como la de los valores negativos de ξ bajo la medida incierta M.

El valor esperado bajo la teoría de incertidumbre difiere del concepto clásico en probabilidad, pues no presupone una distribución de probabilidad subyacente, sino que se basa directamente en la medida de incertidumbre asignada a los eventos definidos por la variable ξ. Este enfoque permite considerar situaciones donde la incertidumbre no se puede cuantificar claramente mediante probabilidades.

Definición 4.15. *Si ξ es una variable incierta con distribución Φ, el valor esperado se calcula como:*

$$E[\xi] = \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(x))\, dx - \int_{-\infty}^{0} \Phi(x)\, dx.$$

De manera alternativa, el valor esperado se puede expresar utilizando la integral de la derivada de la distribución Φ:

$$E[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, d\Phi(x),$$

si $\Phi(x)$ tiene una derivada $\phi(x)$, entonces:

$$E[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\phi(x)\, dx,$$

pero no es apropiado considerar $\phi(x)$ como una función de densidad de probabilidad, dado que la **medida incierta no es aditiva**.

Definición 4.16. *Para variables inciertas con una distribución regular Φ, el valor esperado también se puede calcular como:*

$$E[\xi] = \int_0^1 \Phi^{-1}(\alpha)\, d\alpha.$$

Procesos Inciertos

A continuación se presenta la contraparte de los procesos estocásticos (teoría de probabilidad) en su versión incierta.

Un **proceso incierto** X_t sobre un espacio de incertidumbre $(T, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ es una función medible desde $T \times (\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M}))$ a los números reales tal que para cualquier conjunto Borel B de números reales, $\{X_t \in B\}$ es un evento en cada instante t. El proceso tiene incrementos independientes si:

- Los incrementos $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ son independientes para cualquier secuencia de tiempos $t_1 < t_2 < \cdots < t_k$.
- Tiene incrementos estacionarios si $X_{s+t} - X_s$ son idénticamente distribuidos para todo $s > 0$.

Se dice que los procesos inciertos $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$ son independientes para cualquier entero positivo k y tiempos $t_1, t_2, \ldots, t_k$ si, para vectores inciertos

$$\boldsymbol{\xi} = (X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}),$$

donde $i = 1, 2, \ldots, n$, son independientes; es decir, para cualquier conjuntos Borel $B_1, B_2, \ldots, B_n$ de vectores reales k-dimensionales, tenemos

$$\mathcal{M}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{\boldsymbol{\xi} \in B_i\}\right) = \bigwedge_{i=1}^{n} \mathcal{M}\{\boldsymbol{\xi} \in B_i\}.$$

Definición 4.17. *Proceso de Liu Canónico.*

Un proceso incierto es un proceso de Liu Canónico C_t si cumple con las siguientes condiciones:

1. *$C_0 = 0$ y casi todas las trayectorias son continuas de Lipschitz.*

2. *Los incrementos $C_{t+s} - C_t$ son estacionarios e independientes.*

3. *$C_{t+s} - C_t$ es una variable incierta normal con distribución $\mathcal{N}(0, t^2)$:*

$$\Phi_t(x) = \left(1 + \exp\left(-\frac{\pi x}{\sqrt{3t}}\right)\right)^{-1},$$

con distribución incierta inversa

$$\Phi_t^{-1}(\alpha) = \frac{t\sqrt{3}}{\pi} \ln\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha}\right\}.$$

¿Algún parecido con el poceso de Wiener?

Definición 4.18. *Integral Incierta.*

Para un intervalo cerrado $[a, b]$, y un proceso incierto X_t con respecto a un proceso de Liu C_t, la integral incierta se define como:

$$\int_a^b X_t \, dC_t = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{k} X_{t_i} \cdot (C_{t_{i+1}} - C_{t_i}),$$

donde $\Delta = \text{máx}_{1 \leq i \leq k} |t_{i+1} - t_i|$ y $t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ son particiones del intervalo $[a, b]$.

Definición 4.19. *Ecuación Diferencial Incierta.*

Un proceso de Liu C_t se usa para definir una ecuación diferencial incierta de la forma:

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dC_t,$$

donde f y g son funciones medibles que representan las dinámicas determinista y estocástica del sistema, respectivamente, y C_t es un proceso de Liu que describe la incertidumbre.

La ecuación diferencial incierta

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dC_t,$$

donde C_t es un proceso de Liu, es equivalente a la siguiente ecuación integral incierta:

$$X_s = X_0 + \int_0^s f(t, X_t)dt + \int_0^s g(t, X_t)dC_t,$$

donde X_s es un proceso de Liu con deriva $f(t, X_t)$ y difusión $g(t, X_t)$.

Teorema 4.20. *Trayectoria α de Yao y Chen.*

Consideremos una ecuación diferencial incierta definida por un proceso de Liu C_t. La trayectoria α para $\alpha \in (0, 1)$, es la solución de la ecuación diferencial ordinaria correspondiente:

$$dX_t^\alpha = f(t, X_t^\alpha)dt + |g(t, X_t^\alpha)|\Phi^{-1}(\alpha)dt,$$

donde $\Phi^{-1}(\alpha) = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \ln \frac{\alpha}{1-\alpha}$ es la función inversa de la distribución incierta normal estándar para el parámetro α. Sea X_t la solución de la ecuación diferencial incierta y X_t^α el camino α. Entonces, para cualquier tiempo t, se cumple que:

$$\mathcal{M}\{X_t \leq X_t^\alpha, \forall t\} = \alpha, \quad \mathcal{M}\{X_t \geq X_t^\alpha, \forall t\} = 1 - \alpha.$$

De esta manera X_s tiene una función de incertidumbre inversa

$$\psi^{-1}(a) = X_s^a, \quad 0 < a < 1$$

.

5. FINANZAS INCIERTAS

Acciones Inciertas

El modelo supone que el precio de las acciones sigue una ecuación diferencial incierta, y se describe junto con el precio del bono de la siguiente manera

$$\begin{cases} dX_t = \bar{i} X_t dt, \\ dY_t = eY_t dt + \sigma Y_t dC_t, \end{cases}$$

- X_t : Precio del bono.
- Y_t : Precio de la acción.
- $\bar{i}$: Tasa de interés libre de riesgo.
- e: Deriva logarítmica del precio de la acción.
- σ: Difusión logarítmica.
- C_t : Proceso de Liu canónico.

El precio del bono está dado por

$$X_t = X_0 e^{\bar{i}t}, \tag{30}$$

el precio de la acción sigue la expresión

$$Y_t = Y_0 e^{et + \sigma C_t}.$$

La distribución de incertidumbre inversa del precio de la acción está dada por

$$\Phi_t^{-1}(\alpha) = Y_0 \exp\left\{ et + \frac{\sigma t \sqrt{3}}{\pi} \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \right\}.$$

Modelo General de Acciones

El precio de las acciones Y_t está determinado por la siguiente ecuación diferencial incierta

$$dY_t = F(t, Y_t)dt + G(t, Y_t)dC_t,$$

donde $F(t, Y_t)$ es una función que describe la deriva del precio de las acciones. $G(t, Y_t)$ es una función que describe la difusión incierta en el precio de las acciones.

El α -trayecto del precio de la acción Y_t^α puede calcularse mediante métodos numéricos.

Valoración del Bono Cupón Cero

Definición 5.1. *Valoración del Bono Cupón Cero Incierto*

Sea $\tilde{i}_t$ la tasa de interés incierta. El precio de un bono cupón cero con vencimiento en T está dado por

$$\tilde{P}(0, T) = E\left[\exp\left(-\int_0^T \tilde{i}_t dt \right) \right]. \tag{31}$$

Sea $\tilde{i}_t^\alpha$ el α-trayecto de la tasa de interés incierta $\tilde{i}_t$. Entonces, el precio de un bono cupón cero con vencimiento en T es

$$\tilde{P}(0,T) = \int_0^1 \exp\left(-\int_0^T \tilde{i}_t^\alpha dt\right) d\alpha. \tag{32}$$

Fuerza de Interés Incierta

Los modelos de tasas de interés inciertas describen cómo las tasas reales evolucionan con el tiempo bajo incertidumbre, siguiendo ecuaciones diferenciales inciertas.

La tasa de interés incierta puede ser descrita por

$$d\tilde{i}_t = F(t, \tilde{i}_t)dt + G(t, \tilde{i}_t)dC_t, \tag{33}$$

donde F y G son funciones que modelan la dinámica de la tasa de interés.

Modelo de Chen y Gao

Definición 5.2. *Fuerza de Interés Incierta de Chen y Gao.*

La fuerza de interés $\tilde{i}_t$ evoluciona según la ecuación diferencial incierta

$$d\tilde{i}_t = (\mu - a\tilde{i}_t)dt + \sigma dC_t, \tag{34}$$

- *μ, a, σ son constantes positivas.*
- *C_t es un proceso de Liu canónico.*
- *El término σdC_t captura la incertidumbre.*

La fuerza de interés incierta que satisface dicha ecuación diferencial incierta es expresada por

$$\tilde{i}_t = \frac{\mu}{a} + e^{-at}\left(\tilde{i}_0 - \frac{\mu}{a}\right) + \sigma e^{-at}\int_0^t e^{as}\, dC_s, \tag{35}$$

donde C_s es un proceso canónico de Liu.

Este modelo es una contraparte del modelo de **Vasicek** en el ámbito de las ecuaciones diferenciales inciertas, y es utilizado frecuentemente para capturar la dinámica en entornos financieros donde la incertidumbre juega un papel crucial.

El valor esperado de la tasa incierta es

$$E(\tilde{i}_t) = \frac{\mu}{a} + e^{-at}\left(\tilde{i} - \frac{\mu}{a}\right), \tag{36}$$

su varianza

$$\mathrm{Var}(\tilde{i}_t) = \frac{\sigma}{a}\left(1 - e^{-at}\right). \tag{37}$$

Bono Cupón Cero de Chen y Gao

En el artículo *Pricing Longevity Bonds Under the Uncertainty Theory Framework* Gao y Liu (2019), se demuestra el precio de un bono cupón cero, cuya fuerza de interés se modela mediante el modelo de Chen y Gao definido anteriormente.

Definición 5.3. *Bono Cupón Cero de Chen y Gao*

El precio de un bono cupón cero que involucra una fuerza de interés incierta, cuya dinámica se rige bajo el modelo de Chen y Gao

$$d\tilde{i}_t = (\mu - a\tilde{i}_t)dt + \sigma dC_t, \tag{38}$$

es

$$\tilde{P}(t,T) = E\left[e^{-\int_t^T \tilde{i}_s ds}\right] = A(t,T)B(t,T). \tag{39}$$

1. *$A(t,T)$:*

$$A(t,T) = \alpha \csc(\alpha), \tag{40}$$

donde ρ se define como

$$\alpha = \sqrt{3}\left[\frac{\sigma(T-t)}{a} + \frac{\sigma}{a^2}\left(e^{-aT} - e^{-at}\right)\right]. \tag{41}$$

2. *$B(t,T)$:*

$$B(t,T) = e^{-\frac{\mu(T-t)}{2a} - \frac{1}{a}(\tilde{i}_0 - \frac{\mu}{a})(e^{-at} - e^{-aT})}. \tag{42}$$

Parte III
Modelos Actuariales

6. MODELOS ACTUARIALES PARA SEGUROS DE VIDA

Variables Principales

Un modelo actuarial típico incluye:

1. Componente biométrico: Relacionado con suposiciones sobre mortalidad o longevidad. En el contexto actuarial es la **fuerza de mortalidad**, μ_t.

2. Componente financiero: Relacionado con suposiciones sobre tasas de interés. En el contexto actuarial es la **fuerza de interés**, $\tilde{i}_t$.

Cuando las evaluaciones se realizan en un contexto de tiempo continuo, ambos componentes requieren modelos en tiempo continuo.

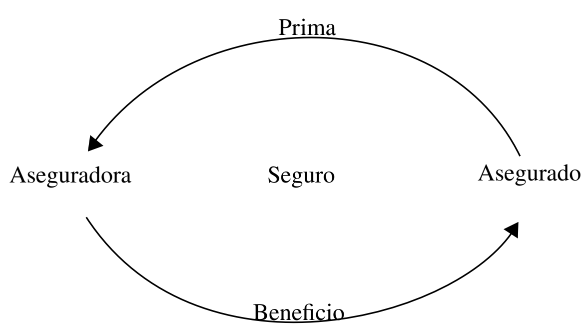
Modelar los aspectos financieros en tiempo continuo es relativamente sencillo. Si se dispone de un modelo biométrico en tiempo continuo, las evaluaciones actuariales son directas. Para tiempos y edades enteros, basta con tabular funciones biométricas continuas.

Los seguros convencionales son formas tradicionales de seguros de vida que se han utilizado durante mucho tiempo, en algunos casos desde la invención del sistema de primas niveladas. Características principales:

- Término de la póliza: Es el período durante el cual el seguro está vigente y el asegurador asume el riesgo.
- Suma asegurada: Es el monto que será pagado al ocurrir, o poco después, de la muerte del asegurado. Generalmente es un monto constante durante el término de la póliza.

Una **póliza de seguro** es un contrato financiero que garantiza el pago de una indemnización (suma asegurada), b_t al asegurado o beneficiario si ocurre un evento específico (llamado siniestro) durante un período de tiempo definido (término de la póliza).

Una póliza de seguro es un acuerdo contractual entre dos partes principales: el tomador del seguro (*policyholder*) y la aseguradora (*insurer*). Este contrato define las obligaciones de ambas partes, estableciendo un intercambio económico y una transferencia de riesgos bajo términos específicos.



La prima (*premium*) es el pago estipulado que el tomador del seguro acuerda realizar a la aseguradora como contraprestación por la cobertura ofrecida. La prima puede ser única, periódica o ajustada en función del tipo de producto asegurador y las características del riesgo asegurado.

El seguro (*insurance*) representa la cobertura contractual provista por la aseguradora. Esta cobertura implica el compromiso de la aseguradora de pagar un beneficio (o una serie de beneficios) definidos al ocurrir un evento específico.

El beneficio (*benefit*) es la prestación económica que la aseguradora otorga al tomador del seguro o a un beneficiario designado. Este beneficio puede ser una suma asegurada fija, una renta periódica o cualquier otra forma de compensación establecida en la póliza.

El evento asegurado es el desencadenante del beneficio, es un evento específico (por ejemplo, fallecimiento, invalidez, accidente, entre otros). Este evento debe estar claramente definido en los términos del contrato.

Cálculo Actuarial

El **cálculo actuarial** se puede explicar como un marco matemático diseñado para evaluar de manera justa y precisa los compromisos financieros asociados a **productos de seguro y pensiones**. Este enfoque se centra en tres aspectos principales: determinar el valor justo de la póliza, calcular las primas justas que debe pagar el asegurado, y establecer las reservas matemáticas necesarias para que la aseguradora cumpla con sus obligaciones futuras.

El proceso sigue un flujo lógico que comienza con el cálculo del **valor presente actuarial**, el cual se convierte en la base para determinar la prima justa y las reservas matemáticas.

El **valor presente actuarial (VPA)** es el punto de partida del cálculo actuarial. Representa el valor esperado, descontado al presente, de todos los flujos de efectivo futuros relacionados con una póliza, ya sean pagos de beneficios (compromisos de la aseguradora) o pagos de primas (ingresos para la aseguradora). Este concepto captura tanto el riesgo del evento asegurado como el valor del dinero en el tiempo. El cálculo del valor presente actuarial implica:

1. Modelar la probabilidad de ocurrencia del evento asegurado (como la muerte en un seguro de vida) utilizando funciones de supervivencia o mortalidad.

2. Aplicar el descuento financiero adecuado para reflejar el valor del dinero en el tiempo.

3. Evaluar el valor esperado de los flujos de efectivo futuros.

Una vez calculado el valor presente de los beneficios futuros, el siguiente paso es determinar la **prima justa** que el asegurado debe pagar. La prima justa asegura que el contrato sea equilibrado, es decir, que el valor presente actuarial de los ingresos esperados de primas sea igual al valor presente actuarial de los beneficios esperados, a este equilibrio, es llamado el **principio de equivalencia actuarial**.

Finalmente, una vez que se establecen los compromisos futuros (beneficios) y los ingresos (primas), el cálculo actuarial se enfoca en determinar la **reserva matemática** que es el monto que la aseguradora debe mantener para garantizar que puede cumplir con sus obligaciones futuras en cualquier momento durante el término de la póliza.

7. SEGURO DOTAL PURO

Estas definiciones están basadas en el material presentado en el libro Bowers *et al.* (1997), que proporciona una base exhaustiva para los modelos matemáticos utilizados en la ciencia actuarial, abordando conceptos fundamentales como los seguros de vida, anualidades y cálculos de reservas técnicas.

Modelo del Seguro

Un **seguro dotal puro a n años** proporciona un pago al final de los n años si, y sólo si, el asegurado **sobrevive** al menos n años desde la emisión de la póliza. Si el monto pagadero es una unidad, entonces

$$b_{T_x} = \begin{cases} 0 & T_x \leq n, \\ 1 & T_x > n, \end{cases} \tag{43}$$

Dado que se asume una de interés constante (fija) y determinista entonces

$$a^{-1}(t) = v^t = e^{-\bar{i}t} \quad t \geq 0. \tag{44}$$

Por lo tanto la variable aleatoria que denota el valor presente del pago del beneficio de un dotal puro es

$$Z_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \begin{cases} 0 & T_x \leq n, \\ v^n \cdot b_n & T_x > n, \end{cases} \tag{45}$$

donde T_x es la variable aleatoria de **tiempo hasta fallo** de un asegurado de edad x.

El único elemento de incertidumbre en el seguro dotal puro es si se producirá o no una reclamación. El tamaño y el momento del pago, si ocurre una reclamación, están predeterminados.

La expresión (45) puede escribirse como

$$Z_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = v^n \mathbb{1}_{\{T_x > n\}}, \tag{46}$$

donde $\mathbb{1}_{\{T_x > n\}}$ es el indicador del evento de supervivencia hasta la edad $x + n$. Entonces

$$\mathbb{1}_{\{T_x > n\}} = 1,$$

si el asegurado sobrevive hasta la edad $x + n$ y toma el valor de 0 en caso contrario. El valor actuarial presente del seguro dotal puro a n años tiene dos símbolos

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \text{ ó } {}_nE_x.$$

Calculando la esperanza matemática de $Z_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$:

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \mathbb{E}[Z_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}] = v^n \cdot \mathbb{E}[\mathbb{1}_{T_x > n}] = v^n \cdot {}_np_x, \tag{47}$$

donde ${}_np_x = \mathbb{P}[T_x > 0]$ es la función de supervivencia, la probabilidad que un asegurado de edad x sobreviva al menos n años.

Sintetizando el desarrollo, se obtiene la siguiente definición.

Definición 7.1. *Seguro Dotal Puro Continuo a n años*

Un seguro dotal puro continuo a n años, es aquel que proporciona un pago único de 1 unidad monetaria al final de n años, sujeto a la condición que el asegurado sobreviva al menos n años desde la emisión de la póliza. Su variable aleatoria de valor presente del pago del beneficio es

$$Z_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = v^n \mathbb{1}_{\{T_x > n\}}, \tag{48}$$

cuyo factor de descuento depende de una fuerza de interés determinista y constante $\bar{i}$:

$$v^n = e^{-\bar{i}n}. \tag{49}$$

El valor actuarial presente es

$${}_nE_x = A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \mathbb{E}\left[Z_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\right] = v^n \cdot {}_np_x. \tag{50}$$

Primas de Beneficio

Las primas constituyen los pagos realizados por los tomadores de la póliza para acceder a la cobertura ofrecida por la aseguradora. Existen varios tipos de primas, las cuales se clasifican dependiendo de los elementos considerados en su cálculo. En esta sección se hace uso sólo de la prima de beneficio.

La **prima neta**, también conocida como prima de riesgo, prima de beneficio o prima matemática, es aquella que está diseñada exclusivamente para cubrir los beneficios asegurados. Este cálculo no incluye ninguna consideración por los gastos operativos o administrativos de la aseguradora.

En el cálculo actuarial de primas, el **principio de equivalencia** es un fundamento técnico esencial que asegura el balance financiero entre los beneficios futuros y las primas cobradas. Este principio es clave para determinar las primas netas en productos de seguro, asegurando que los compromisos futuros de la aseguradora estén respaldados por los ingresos de las primas.

Según el principio de equivalencia, la prima se establece de tal manera que:

$$\text{VPA de los beneficios futuros (en } t = 0) = \text{VPA de las primas futuras (en } t = 0) \tag{51}$$

El principio de equivalencia establece que el valor presente esperado de las primas debe ser igual al valor presente esperado de los beneficios de una póliza de seguro.

Modelo para la Reserva

Estas definiciones son extraídas en el material presentado en el libro de Møller y Steffensen (2007), el cual explora técnicas modernas de valoración de mercado aplicadas a los seguros de vida y pensiones, destacando el uso de modelos financieros para la evaluación de pasivos y la gestión del riesgo.

Como se describió anteriormente, una reserva es el monto que una aseguradora necesita mantener en un momento dado para cumplir con las obligaciones futuras asociadas a las pólizas en vigor. Se determina considerando:

1. Flujos de efectivo futuros: incluyen pagos de beneficios (siniestros, vencimientos) y primas futuras.

2. Bases actuariales: conjunto de supuestos sobre tasas de interés, mortalidad, morbilidad y costos.

Se clasifican las reservas según su propósito y método de cálculo. Los principales tipos tratados son

1. Reserva Retrospectiva: se calcula acumulando las primas pagadas hasta el momento, menos los beneficios ya pagados y los costos asociados.

2. Reserva Prospectiva: representa el valor actual esperado de los flujos de efectivo futuros de la póliza, desde el momento actual hasta el vencimiento.

3. **Reserva de Mercado**: es una reserva prospectiva calculada bajo supuestos realistas o de tercer orden, considerando las tasas de interés libres de riesgo y los riesgos de mercado actuales.

El objetivo del estudio es **desarrollar una reserva de mercado** para un portafolio de seguros dotales puros.

Las bases actuariales son conjuntos de supuestos o parámetros utilizados para calcular valores actuariales como primas, reservas técnicas y otros componentes clave en seguros y pensiones. Estas bases son fundamentales porque determinan cómo se modelan los flujos de efectivo y los riesgos asociados con contratos de seguros y pensiones.

Existen varios tipos de bases actuariales, clasificadas según el propósito y el nivel de realismo que incorporan. Los principales tipos son:

1. **Base de Primer Orden** (conservadora): es una base extremadamente conservadora, diseñada para garantizar el principio de equivalencia actuarial. En esta base se fija una tasa de interés constante que satisfaga el principio de equivalencia. La función de descuento correspondiente es

$$a^{-1}(t) = v^t = e^{-\bar{i}^* t},$$

donde $\bar{i}^*$ es la tasa que se usa en esta base.

2. Base de Segundo Orden: representa una aproximación más realista de los flujos de efectivo esperados, utilizada para reflejar mejor las condiciones actuales del mercado.

3. **Base de Tercer Orden** o Base Real: refleja las condiciones reales de mercado y se utiliza para valoraciones de mercado. Se basa en datos reales y fluctuaciones del mercado. En esta base, se intenta modificar la función de descuento que se usa en la base de primer orden, de tal manera que dicha modificación refleje el valor del mercado.

El análisis principal de este trabajo es ver la construcción de una reserva de un portafolio de seguros dotales puros usando una base actuarial de tercer orden. **¿Qué modificación se implementa para reflejar las condiciones del mercado? El uso de bonos cupón cero**. Esto se debe a que tanto el seguro dotal puro como el bono cupón cero comparten una estructura similar que los hace particularmente atractivos en términos de planificación financiera y gestión de riesgos:

1. Pago único garantizado al vencimiento:

   - Ambos instrumentos están diseñados para realizar un único pago en una fecha específica y conocida desde el inicio. En el caso del seguro dotal puro, este pago se realiza al asegurado al vencimiento de la póliza, siempre que sobreviva; mientras que, en el bono cupón cero, el emisor entrega el valor nominal del bono al vencimiento.

2. Ausencia de flujos intermedios:

   - Ninguno genera pagos periódicos durante su vigencia, eliminando el riesgo de reinversión asociado a los flujos intermedios. Esto simplifica la gestión del pasivo, ya que únicamente se necesita garantizar que los recursos estén disponibles en el momento del pago.

3. Facilidad en la gestión del pasivo:

   - Dado que el monto y la fecha de pago son ciertos, la aseguradora o el emisor solo deben concentrarse en fondear ingresos suficientes para cubrir el pasivo en el vencimiento. Esto permite enfocarse exclusivamente en la gestión del riesgo de la tasa de interés (para garantizar retornos adecuados) y el riesgo de mortalidad (en el caso del seguro dotal puro). Además el riesgo de mortalidad se puede reducir aumentando el número de asegurados en el portafolio.

Reserva Prospectiva con Base de Primer Orden

Se utiliza el enfoque propuesto en $M\emptyset llerySteffensen$ (2007) para construir el portafolio y reserva para los seguros dotales puros. Se considera un portafolio compuesto por ℓ_x asegurados, todos con la misma edad inicial x en tiempo 0. Se emiten pólizas idénticas de seguros dotales puros a n años (usando la definición 7.1) con una suma asegurada de 1 unidad monetaria. De esta manera se establece las siguientes suposiciones estándar:

1. Todos los asegurados del portafolio $T_x^1, T_x^2, \ldots, T_x^{\ell_x}$ tienen la misma ley de supervivencia

$$ {}_tp_x = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x} = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}, $$

donde μ_x es la fuerza de mortalidad

$$ \mu_{x+t} := \lim_{dt \to 0^+} \frac{1}{dt} \mathbb{P}[t < T_x < t + dt | T_x > t]. $$

2. La fuerza de mortalidad μ es una función determinista.

3. Los contratos están financiados mediante una prima única π_0 pagada al inicio.

Dado que no es posible predecir exactamente el número de asegurados que sobrevivirán hasta el tiempo n, se considera el comportamiento esperado. En un portafolio suficientemente grande, la **Ley de los Grandes Números**

$$ \overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu, \quad \mu = \mathbb{E}[X_i], \quad n \to \infty, $$

asegura que el número real de supervivientes converge al número esperado.

- Se introduce el indicador

$$ \mathbb{1}_{\{T_x^j > n\}}, \tag{52} $$

que indica si el asegurado j-ésimo sobrevive hasta el tiempo n.
- El número promedio de supervivientes en el portafolio es

$$ \frac{1}{\ell_x} \sum_{j=1}^{\ell_x} \mathbb{1}_{\{T_x^j > n\}}. \tag{53} $$

- Por la Ley de los Grandes Números

$$ \frac{1}{\ell_x} \sum_{j=1}^{\ell_x} \mathbb{1}_{\{T_x^j > n\}} \xrightarrow{\ell_x \to \infty} {}_np_x = \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x}. \tag{54} $$

Esto implica que, para un portafolio suficientemente grande, el número de asegurados que sobreviven está dado aproximadamente por

$$ \frac{1}{\ell_x} \sum_{j=1}^{\ell_x} \mathbb{1}_{\{T_x^j > n\}} \approx \ell_x \cdot {}_np_x = \ell_{x+n}. \tag{55} $$

Cada asegurado paga una prima única π_0 al tiempo $t = 0$. Los siguientes supuestos se aplican al análisis:

1. El número de sobrevivientes al tiempo n está dado por ℓ_{x+n}
$$ \ell_{x+n} = \ell_x \cdot {}_np_x. $$

2. Cada sobreviviente al tiempo n recibe una unidad de beneficio.

De lo anterior, el beneficio total pagado a los sobrevivientes al tiempo n es igual a ℓ_{x+n}. El valor presente de este beneficio al tiempo 0 se denota por

$$ a^{-1}(n) \cdot \ell_{x+n}, $$

donde $a^{-1}(n) = e^{-\int_0^n \bar{i}_s ds}$. Por otro lado, dado que las primas $\ell_x \cdot \pi_0$ se pagan en la emisión de las pólizas $t = 0$, su valor presente es simplemente igual a

$$ \ell_x \cdot \pi_0. $$

Por lo tanto, la pérdida en emisión del asegurador es

$$ {}_0\mathcal{L} = \ell_{x+n} \cdot a^{-1}(n) - \ell_x \cdot \pi_0. \tag{56} $$

Para garantizar que el contrato sea justo desde el punto de vista financiero, el principio de equivalencia requiere que la pérdida del asegurador sea igual a cero. Es decir

$$ {}_0\mathcal{L} = 0 \to \ell_{x+n} a^{-1}(n) = \ell_x \cdot \pi_0, $$

resolviendo para la prima π_0, se obtiene la prima única justa al tiempo 0

$$ \pi_0 = \frac{\ell_{x+n} \cdot a^{-1}(n)}{\ell_x} = {}_np_x \cdot e^{-\int_0^n \bar{i}_s ds}. \tag{57} $$

Es importante recalcar esta prima se cumple si y solo si la función de descuento es determinista, en caso contrario las tasas o tasa de interés futuras no son conocidas en tiempo 0, lo que implicaría que no se conoce $a^{-1}(t)$ en el momento de vender el contrato (tiempo de emisión). Por lo tanto no se puede establecer esta prima.

Definición 7.2. *Portafolio de Seguros Dotales Puros Continuos con base actuarial de primer orden.*

*Un **portafolio de seguros dótales puros continuos** está compuesto por ℓ_x asegurados, cada uno de ellos con la misma edad inicial (x) en tiempo de la emisión de la póliza ($t=0$), bajo las siguientes condiciones:*

1. *El número de asegurados que sobreviven hasta un tiempo n está dado por*

$$\ell_{x+n} = \ell_x \cdot {}_np_x, \tag{58}$$

donde ${}_np_x = \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x} = e^{\int_0^t \mu_{x+s} ds}$, y μ es determinista.

2. *Cada asegurado sobreviviente al tiempo n recibe un **beneficio unitario**.*

El beneficio total pagado a los sobrevivientes al tiempo n es

$$\ell_{x+n} = \ell_x \cdot {}_np_x. \tag{59}$$

*Cada asegurado paga una prima única π_0 al inicio del contrato ($t=0$), la cual satisface el **principio de equivalencia actuarial***

$$\pi_0 = {}_np_x \cdot e^{-\int_0^n \bar{i}_s ds}. \tag{60}$$

La variable de pérdida del asegurador en la emisión está dada por

$${}_0\mathcal{L} = \ell_{x+n} \cdot a^{-1}(n) - \ell_x \cdot \pi_0. \tag{61}$$

8. RESERVA DE MERCADO (BASE ACTUARIAL DE TERCER ORDEN)

Se modifica la reserva prospectiva con base de primer orden desarrollada anteriormente. Se busca crear una reserva con base de tercer orden, es decir, que refleje las condiciones "reales" del mercado. En libro Møller y Steffensen (2007), se demuestra que esto se logra vía una **cobertura con bonos cupón cero**. A continuación se describe dicha cobertura.

Cobertura vía Cupón Cero

La estrategia busca replicar los pasivos del asegurador mediante la inversión en instrumentos financieros.

El siguiente desarrollo se asume una **fuerza de interés determinista**. Se considera un asegurador que invierte al tiempo $t=0$ en $\ell_x\kappa$ unidades de un bono cupón cero con vencimiento en n. La **pérdida en emisión ajustada del asegurador**, considerando la cobertura mediante bonos cupón cero, está dada por

$${}_0\hat{\mathcal{L}} = \ell_{x+n}a^{-1}(n) - \ell_x \cdot \pi_0 + l_x\kappa \left[P(0,n) - 1 \cdot a^{-1}(n)\right] \tag{62}$$

al reorganizar los términos en la ecuación anterior

$${}_0\hat{\mathcal{L}} = (\ell_{x+n} - \ell_x\kappa)\, a^{-1}(n) + \ell_x\left[\kappa P(0,n) - \pi_0\right] \tag{63}$$

para que ${}_0\hat{\mathcal{L}} = 0$, se deben cumplir dos condiciones:

1. $\kappa = \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x} = {}_np_x$, es decir, el asegurador debe adquirir bonos en proporción al número esperado de sobrevivientes.

2. $\pi_0 = {}_np_x \cdot P(0,n)$, lo que implica que la prima justa al tiempo $t=0$ es igual al precio del bono cupón cero multiplicado por la probabilidad de supervivencia hasta n.

Por lo tanto, la prima justa obtenida,

$$\pi_0 = {}_np_x \cdot P(0,n),$$

corresponde al precio al tiempo 0 de un bono cupón cero con vencimiento n, ponderado por la probabilidad de supervivencia de los asegurados hasta ese tiempo, lo cual es intuitivo.

En un portafolio con ℓ_x asegurados, el asegurador debe adquirir $\ell_x \cdot {}_np_x = \ell_{x+n}$ bonos cupón cero para igualar exactamente el número esperado de sobrevivientes. Al cumplir las condiciones anteriores, se logra replicar los pasivos del asegurador. Esto significa que el valor de los bonos adquiridos al tiempo t satisface

$$\ell_x \cdot {}_np_x \cdot P(t,n) = \ell_{x+n} \cdot P(t,n),$$

de esta manera, el valor de los activos (bonos cupón cero) es igual al valor de los pasivos (beneficios garantizados) para cualquier desarrollo futuro de los precios de los bonos.

El valor de mercado de los pagos garantizados no depende de la estrategia de inversión específica de la compañía aseguradora. Esto se deriva del argumento de cobertura: cualquier desviación de los precios de los bonos respecto a su valor de mercado permitiría generar ganancias libres de riesgo (arbitraje). Por lo tanto:

- El valor de mercado de los pasivos es igual al de los activos replicantes.
- Cambios en el precio de los bonos afectan de manera simétrica tanto los activos como los pasivos.

Finalmente, el valor de mercado de los pagos futuros garantizados, $V^g(t)$ es

$$V^g(t) = \ell_{x+t} \cdot {}_{T-t}p_{x+t} \cdot P(t,T). \tag{64}$$

La implementación del bono cupón cero $P(t,n)$ en la pérdida en emisión (la pérdida en emisión ajustada), permite hacer la valoración mediante el enfoque de la base actuarial de tercer orden, pues $P(t,n)$ puede ser observado en el mercado.

En el desarrollo anterior se estableció el convenio que la fuerza de interés, $\bar{i}_t^*$, que se utiliza en la función de descuento,

$a^{-1}(t)$, es determinista, lo que implica que la prima usada para cada póliza debe ser forzosamente

$$\pi_0 = {}_T p_x \cdot e^{-\int_0^T \bar{i}_s^* ds}.$$

Es de interés el caso donde las tasas de interés son **estocásticas**, lo que introduce mayor complejidad en el cálculo de la pérdida en emisión de la aseguradora. Para el mismo portafolio que se ha desarrollado previamente con base actuarial de primer orden, se establece que la fuerza de interés utilizada, $\bar{i}_t$ es estocástica, es decir

$${}_0\mathcal{L} = \ell_{x+T} \cdot e^{-\int_0^T \bar{i}_s ds} - \ell_x \cdot \pi_0,$$

donde $\bar{i}_s$ es un proceso estocástico.

Entonces, los cálculos relacionados con la cobertura del seguro dotal puro continuo se realizan utilizando la **tasa de interés del mercado**, que es un proceso estocástico. Este análisis se centra en cómo estas tasas afectan la acumulación de primas y la valoración de los pagos futuros garantizados. Aunque se ha demostrado en la sección previa que el riesgo del asegurador podría cubrirse perfectamente invirtiendo en bonos cupón cero con vencimiento T, en la práctica, **estos bonos podrían no estar disponibles**. Como alternativa, se considera la inversión de las primas en una **cuenta bancaria** que genera intereses a corto plazo (o instrumentos financieros equivalentes, como **swaps**). Este planteamiento considera la realidad del mercado, donde puede ser complicado acceder a bonos con características específicas.

Si las primas se invierten en una **cuenta de ahorro** (cuenta monetaria) desde el tiempo $t = 0$, su valor acumulado al tiempo t está dado por:

$$A_{\text{prima}}(t) = (\ell_x \cdot \pi_0) e^{\int_0^t \bar{i}_s ds}, \tag{65}$$

donde $\bar{i}_s$ es un proceso estocástico.

Cuenta Total sin *Swap*

En lugar de analizar la pérdida en emisión de la aseguradora

Obligaciones de la Aseguradora (Beneficio del Dotal Puro)-
Activos Totales (Primas cobradas al Asegurado)

se hace análisis de la cuenta total de la aseguradora $U(t)$. Cuando la compañía no participa en contratos de *swaps*, la cuenta total $U(t)$ es la diferencia entre las primas acumuladas y el valor de mercado de los pasivos al vencimiento T:

1. En el tiempo t: La cuenta total sin la implementación del swap es

$$\begin{aligned} U(t) &= A_{\text{prima}}(t) - V^g(t), \\ &= \ell_x \cdot \pi_0 \cdot e^{\int_0^t \bar{i}_s ds} - \ell_{x+t} \cdot {}_{T-t}p_{x+t} \cdot P(t,T), \\ &= \ell_{x+T} \cdot e^{\int_0^t (\bar{i}_s - \bar{i}_s^*) ds} - \ell_{x+T} \cdot P(t,T), \\ &= \ell_{x+T} \left[e^{\int_0^t (\bar{i}_s - \bar{i}_s^*) ds} - P(t,T) \right]. \end{aligned} \tag{66}$$

2. En su vencimiento T:

$$\begin{aligned} U(t) &= A_{prima}(t) - V^g(t), \\ &= \ell_{x+T} \left(e^{\int_0^T (\bar{i}_s - \bar{i}_s^*)\, ds} - 1 \right). \end{aligned} \tag{67}$$

esta ecuación describe el valor terminal de la cuenta en una estrategia en la que las primas se invierten en una cuenta de ahorro o en bonos de muy corto plazo, sin participación en *swaps*.

Añadiendo la implementación del swap de interés, la cuenta total se define como sigue

$$U(t) = A_{\text{prima}}(t) + \Pi_{\text{swap}}(t) - V^g(t), \tag{68}$$

de esta manera, se consideran tanto los pagos realizados como los recibidos, así como el valor de mercado de los flujos futuros.

La razón principal para analizar esta cuenta, y no directamente la variable de pérdida $\mathcal{L}$, radica en:

1. Actúa como un indicador de la suficiencia de los activos frente a las obligaciones. Una cuenta $U(t)$ no negativa indica que los activos disponibles (incluyendo los derivados financieros) son suficientes para cubrir las obligaciones garantizadas.

2. Permite evaluar cómo las estrategias de cobertura vía instrumentos financieros (como swaps de tasas de interés) afectan la capacidad de la aseguradora para cubrir sus obligaciones. En este caso, se compara la cuenta con swap y sin swap, para cuantificar en términos de ganancias, el impacto de implementar dicha cobertura.

3. A diferencia de la variable de pérdida $\mathcal{L}$, que se enfoca únicamente en la discrepancia entre las obligaciones futuras descontadas y las primas recolectadas, $U(t)$ permite incorporar efectos dinámicos del mercado, como cambios en las tasas de interés y ajustes en la estrategia de cobertura.

La razón del análisis de las variables de pérdida en emisión con una base actuarial de primer orden ($\mathcal{L}$) y de tercer orden ($\hat{\mathcal{L}}$), es para identificar la correcta estructura de los pasivos contingentes (obligaciones/valores garantizados) y de los activos (primas) de la aseguradora.

9. COBERTURA VÍA SWAP

En esta sección se analiza el uso de **swaps de tasa de interés** como una estrategia de cobertura para gestionar las obligaciones financieras de una aseguradora en contratos de dotación pura continuos. A continuación se describe la cobertura vía swaps de tasa de interés presentada en Møller y Steffensen (2007).

Swap

Un *swap* es un contrato financiero mediante el cual dos contrapartes acuerdan intercambiar flujos de pagos en el futuro, basados en diferentes estructuras de tasas. La tasa *swap* $\kappa(t,T)$ se define como la tasa que iguala el valor presente de dos flujos de pagos

$$\kappa(t,T) = \frac{1 - P(t,T)}{\int_t^T P(t,\tau)\, d\tau}.$$

Cuando los precios de los flujos de pagos coinciden en t, los valores de mercado de los flujos intercambiados son equivalentes. Esto implica que dos partes pueden realizar un intercambio de flujos sin realizar pagos adicionales.

Un ***receiver swap*** es un contrato de *swap* en el cual una contraparte paga una tasa variable $c = \bar{i}$ y recibe los cupones acumulados a una tasa fija $c = \kappa$. Esto ocurre cuando la contraparte recibe los pagos basados en la tasa fija κ.

Un ***payer swap*** el propietario del contrato recibe los cupones calculados con $c\bar{i}$ (tasa variable) y paga los cupones basados en $c = \kappa$ (tasa fija). La contraparte paga la tasa fija.

Relación entre Tasas de *Swap* y Tasas *Forward*

La tasa *swap* puede ser reescrita utilizando las tasas *forward* instantáneas $f(t,\tau)$, que representan las tasas de interés instantáneas implícitas para el período $[t,\tau]$:

$$\begin{aligned}
1 - P(t,T) &= 1 - e^{-\int_t^T f(t,\tau)\, d\tau}, \\
&= \int_t^T f(t,\tau) e^{-\int_t^\tau f(t,s)\, ds}\, d\tau, \\
&= \int_t^T f(t,\tau) P(t,\tau)\, d\tau.
\end{aligned}$$

Al sustituir la expresión anterior en la ecuación de la tasa *swap* $\kappa(t,T)$ se expresa como

$$\kappa(t,T) = \frac{\int_t^T f(t,\tau) P(t,\tau)\, d\tau}{\int_t^T P(t,\tau)\, d\tau},$$

esta expresión muestra que la tasa de *swap* está directamente relacionada con la curva de tasas *forward*, y describe cómo las tasas de *swap* pueden considerarse promedios ponderados de las tasas *forward* en el intervalo $[t,T]$.

Los precios de los bonos cupón cero $P(t,T)$ pueden ser determinados recursivamente a partir de una curva de tasas de *swap* $k(t,\tau)$

$$\int_t^{T-h} P(t,\tau)\, d\tau + P(t,T)h,$$

para un pequeño h , se puede escribir la aproximación del precio de bono como

$$P(t,T) \approx \frac{1 - \kappa(t,T) \int_t^{T-h} P(t,\tau)\, d\tau}{1 + \kappa(t,T)h}.$$

Los precios de los bonos cupón cero también pueden expresarse en términos de la curva de tasas de *swap* como

$$P(t,T) = 1 - \kappa(t,T) \int_t^T e^{-\int_t^\tau \kappa(t,s)\, ds}\, d\tau. \tag{69}$$

Swap de la Aseguradora

Se asume que la compañía entra en una posición de *receiver swap*, con $N = \ell_x \cdot \pi_0(1+\epsilon)$ contratos, donde ϵ es un factor adicional para ajustar el tamaño del contrato swap. En este *swap*, la aseguradora

1. **Recibe una tasa fija** κ, denominada **tasa *strike* del *swap***.

2. **Paga una tasa flotante** $\bar{i}_t$, correspondiente al mercado.

Este esquema asegura que los flujos de ingresos (tasa fija) se utilicen para cubrir las obligaciones futuras, mientras que los pagos flotantes representan un riesgo financiero.

El valor presente al tiempo $t = 0$ de los flujos de un *swap* unitario está dado por

$$\int_0^T e^{-\int_0^\tau \bar{i}_s\, ds} (\kappa - \bar{i}_\tau)\, d\tau. \tag{70}$$

Cuenta *swap*

El valor del swap en el tiempo t se denota por $\Pi_{\text{swap}}(t)$, y representa una cuenta en la empresa que acumula los flujos pasados y descuenta los flujos futuros, ajustados al interés de mercado $\bar{i}$. Inicialmente, en $t = 0$, se establece

$$\Pi_{swap}(0) = 0.$$

En el tiempo t, el valor de la cuenta *swap* se define como

$$\begin{aligned}\Pi_{\text{swap}}(t) =& N \int_0^t e^{\int_\tau^t \bar{i}_s\, ds} (\kappa - \bar{i}_\tau)\, d\tau, \\ &+ N\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\int_t^T e^{-\int_t^\tau \bar{i}_s\, ds} (\kappa - \bar{i}_\tau)\, d\tau \mid \mathcal{F}_t \right].\end{aligned} \tag{71}$$

- $N \int_0^t e^{\int_\tau^t \bar{i}_s\, ds} (\kappa - \bar{i}_\tau)\, d\tau$ representa los flujos netos acumulados desde el inicio del contrato hasta t.
- $N\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\int_t^T e^{-\int_t^\tau \bar{i}_s\, ds} (\kappa - \bar{i}_\tau)\, d\tau \mid \mathcal{F}_t \right]$ refleja el valor presente esperado de los flujos futuros del swap, descontados al tiempo actual t.

El primer término, relacionado con los flujos acumulados hasta t, se transforma a

$$\begin{aligned}N \int_0^t e^{\int_\tau^t \bar{i}_s\, ds} (\kappa - \bar{i}_\tau)\, d\tau =& N\kappa \int_0^t e^{\int_\tau^t \bar{i}_s\, ds}\, d\tau \\ &- N \int_0^t e^{\int_\tau^t \bar{i}_s\, ds} \bar{i}_\tau\, d\tau, \\ =& N\kappa \int_0^t e^{\int_\tau^t \bar{i}_s\, ds}\, d\tau \\ &- N \left[\int_0^t d\left(e^{\int_\tau^t \bar{i}_s ds} \right) \right], \\ =& N\kappa \int_0^t e^{\int_\tau^t \bar{i}_s\, ds}\, d\tau \\ &- N \left[e^{\int_0^t \bar{i}_s ds} - 1 \right].\end{aligned} \tag{72}$$

El segundo término, el valor presente de los flujos futuros del *swap* en t se reformula como

$$\begin{aligned}N\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\int_t^T e^{-\int_t^\tau \bar{i}_s\, ds} (\kappa - \bar{i}_\tau)\, d\tau \mid \mathcal{F}_t \right] =& N\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\int_t^T e^{-\int_t^\tau \bar{i}_s ds} \kappa\, d\tau \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &- N\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\int_t^T e^{-\int_t^\tau \bar{i}_s ds} \bar{i}_\tau\, d\tau \mid \mathcal{F}_t \right], \\ =& N\kappa \int_t^T P(t,\tau)\, d\tau \\ &- N\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[1 - e^{-\int_t^T \bar{i}_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right], \\ =& N\kappa \int_t^T P(t,\tau)\, d\tau - N(1 - P(t,T)).\end{aligned} \tag{73}$$

Finalmente, la cuenta *swap* es

$$\begin{aligned}\Pi_{\text{swap}}(t) =& N\kappa \left(\int_0^t e^{\int_\tau^t \bar{i}_s ds} d\tau + \int_t^T P(t,\tau) d\tau \right) \\ &- N \left(e^{\int_0^t \bar{i}_s ds} - P(t,T) \right).\end{aligned} \tag{74}$$

Cuenta Total

La cuenta total $U(t)$ se define como

$$\begin{aligned}U(t) =& A_{\text{prima}}(t) + \Pi_{\text{swap}}(t) - V^g(t), \\ =& \ell_x \cdot \pi_0 e^{\int_0^t \bar{i}_s ds} + N\kappa \left(\int_0^t e^{\int_\tau^t \bar{i}_s ds} d\tau + \int_t^T P(t,\tau) d\tau \right) \\ &- N \left(e^{\int_0^t \bar{i}_s ds} - P(t,T) \right) - \ell_{x+t} \cdot {}_{T-t}p_{x+t} \cdot P(t,T).\end{aligned} \tag{75}$$

Si se asume que $\epsilon = 0$, lo que implica que $N = \ell_x \cdot \pi_0$, la ecuación de $U(t)$ se simplifica a

$$\begin{aligned}U(t) =& \ell_x \cdot \pi_0 P(t,T) - \ell_{x+t} \cdot {}_{T-t}p_{x+t} \cdot P(t,T) \\ &+ \ell_x \cdot \pi_0 \kappa \left(\int_0^t e^{\int_\tau^t \bar{i}_s ds} d\tau + \int_t^T P(t,\tau) d\tau \right), \\ =& \kappa \ell_{x+T} e^{-\int_0^t \bar{i}^*_s ds} \left(\int_0^t e^{\int_\tau^t \bar{i}_s ds} d\tau + \int_t^T P(t,\tau) d\tau \right) \\ &- \ell_{x+T} \cdot P(t,T) \left(1 - e^{-\int_0^T \bar{i}^*_s ds} \right).\end{aligned} \tag{76}$$

el valor inicial de la cuenta $t=0$ de la cuenta total es

$$\begin{aligned} U(0) &= \ell_x \cdot \pi_0 - \ell_x \cdot {}_T p_x P(0,T), \\ &= \ell_{x+T}\left[e^{-\int_0^T \bar{i}_s^* ds} - P(0,T)\right], \end{aligned} \tag{77}$$

al vencimiento $t=T$, la cuenta total es

$$\begin{aligned} U(T) =& \ell_{x+T}\kappa e^{-\int_0^T \bar{i}_s^* ds}\int_0^T e^{\int_\tau^T \bar{i}_s ds} d\tau \\ & - \ell_{x+T}\left(1 - e^{-\int_0^T \bar{i}_s^* ds}\right). \end{aligned} \tag{78}$$

La cuenta total $U(t)$ es una herramienta esencial para monitorear la solvencia de una aseguradora. Su formulación permite un análisis del impacto de las primas, *swaps* y el valor de los pasivos en el tiempo. Este modelo conecta directamente las matemáticas actuariales con la gestión del riesgo financiero mediante el uso de derivados financieros.

Swaption

Un swaption es una opción financiera que da al titular el derecho, pero no la obligación, de entrar en un contrato de swap en una fecha futura predefinida T_0. En esta sección, se analiza de la cuenta swaption. En el trabajo de $M\emptyset llery Steffensen$ (2007) se brinda el desarrollo del valor del mercado del swaption, empero no desarrolla la implementación del swpation para la cuenta de la aseguradora.

Un **receiver swaption** otorga al titular el derecho, pero no la obligación, de entrar en un **receiver swap** en una fecha futura determinada T_0. En este tipo de swap, el titular paga flujos flotantes basados en la tasa de interés de mercado y recibe flujos fijos al tipo κ. Un agente adquiere una receiver swaption para cubrirse contra caídas en las tasas de interés o especular sobre una baja futura en estas tasas, esto pues una disminución en las tasas reduciría los flujos de ingresos provenientes de inversiones o contratos de deuda. En caso de que la cuenta del swap Π_{swap} sea negativa en su vencimiento T ($\Pi_{\text{swap}}(T) < 0$), es racional no ejercer la opción sobre dicho swap subyacente.

El valor presente en T_0 de un receiver swap se calcula como la diferencia entre el valor presente de los flujos fijos a recibir y los flujos flotantes a pagar. Matemáticamente, se expresa como

$$\int_{T_0}^T (\kappa - \bar{i}_\tau) e^{-\int_{T_0}^\tau \bar{i}_s \, ds} d\tau,$$

el precio de un receiver swap en T_0 es

$$P(T_0,T) - 1 - \kappa \int_{T_0}^T P(T_0,\tau)\, d\tau, \tag{79}$$

por lo tanto, el precio antes de la fecha de ejercicio T_0 (es decir, en $t < T_0$) es

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^{T_0} \bar{i}_s \, ds}\left(P(T_0,T) - 1 - \kappa \int_{T_0}^T P(T_0,\tau)\, d\tau\right)^+ \middle| \mathcal{F}_t\right],$$

donde $(\cdot)^+ = \text{máx}(\cdot, 0)$, indica que sólo se considera el valor positivo, ya que el swaption no se ejerce si no resulta favorable.

Es de importancia notar que, aunque la aseguradora decida no ejercer el derecho, deberá cubrir la prima para adquirir el contrato swaption. Por lo cual, la aseguradora debe contemplar esta obligación.

La cuenta del swaption se define en dos etapas dependiendo del tiempo t, en relación con la fecha de ejercicio T_0:

- Antes del ejercicio: para $t < T_0$, la cuenta refleja el valor del contrato receiver swap para entrar al contrato swap. Se calcula como:

$$\mathbb{E}^{Q}\left[e^{-\int_t^{T_0} \bar{i}_s ds}\left(\kappa \int_{T_0}^T P(T_0,\tau) d\tau - [1 - P(T_0,T)]\right)^+ \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

- Después del ejercicio: para $t \geq T_0$, si el swaption es ejercido, la cuenta del swaption coincide con la cuenta de un receiver swap $\Pi_{\text{swap}}(t = T_0)$, la cual ya se definió anteriormente.

Cuenta Swap Incierta

En las secciones anteriores se ha demostrado que se puede implementar una tasa de interés que participe en el mercado, haciendo uso de procesos estocásticos para la fuerza de interés. Ahora se pretende demostrar que es posible adaptar el modelo actuarial bajo el marco de procesos inciertos. Se utiliza la misma estructura de flujos de la cuenta swap desarrollada bajo una medida de probabilidad $\mathbb{Q}$, $\Pi_{\text{swap}}(t)$. Para crear la cuenta swap incierta $\tilde{\Pi}_{\text{swap}}(t)$, sólo se establece que la fuerza de interés siga un proceso incierto, es decir, su dinámica se rige bajo el modelo de Chen y Gao

$$d\tilde{i}_t = (\mu - a\tilde{i}_t)dt + \sigma dC_t.$$

El valor presente en t de los flujos futuros que dependen de una fuerza de interés incierta $\tilde{i}$ es

$$
\begin{aligned}
E\left[\int_t^T e^{-\int_t^\tau \tilde{i}_s\,ds}(k-\tilde{i}_\tau)d\tau\right] =& E\left[\int_t^T e^{-\int_t^\tau \tilde{i}_s\,ds}\kappa\,d\tau\right] \\
&-E\left[\int_t^T e^{-\int_t^\tau \tilde{i}_s\,ds}\tilde{i}_\tau\,d\tau\right], \\
=&\kappa\int_t^T E\left[e^{-\int_t^\tau \tilde{i}_s\,ds}\right]d\tau \\
&-E\left[\int_t^T d\left(e^{-\int_t^\tau \tilde{i}_s\,ds}\right)\right], \\
=&\kappa\int_t^T \tilde{P}(t,\tau)d\tau \\
&-E\left[1-e^{-\int_t^T \tilde{i}_s\,ds}\right], \\
=&\kappa\int_t^T A(t,\tau)B(t,\tau)d\tau \\
&-\left[1-\tilde{P}(t,T)\right], \\
=&\kappa\int_t^T A(t,\tau)B(t,\tau)d\tau \\
&-\left[1-A(t,T)B(t,T)\right],
\end{aligned}
\tag{80}
$$

definiendo lo siguiente:

1. $A(t,\tau)$:
$$A(t,\tau)=\alpha\csc(\alpha), \tag{81}$$
y α se define como
$$\alpha=\sqrt{3}\left[\frac{\sigma(\tau-t)}{a}+\frac{\sigma}{a^2}\left(e^{-a\tau}-e^{-at}\right)\right]. \tag{82}$$

2. $B(t,\tau)$:
$$B(t,\tau)=e^{-\frac{\mu(\tau-t)}{2a}-\frac{1}{a}(\tilde{i}_0-\frac{\mu}{a})(e^{-at}-e^{-a\tau})}. \tag{83}$$

El valor acumulado a tiempo t de los flujos pasados es

$$
\begin{aligned}
\int_0^t e^{\tau^t\tilde{i}_s ds}(\kappa-\tilde{i}_\tau)d\tau &= \kappa\int_0^t e^{\int_\tau^t \tilde{i}_s ds}d\tau-\int_0^t e^{\int_\tau^t \tilde{i}_s ds}\tilde{i}_\tau d\tau, \\
&= \kappa\int_0^t e^{\int_\tau^t \tilde{i}_s ds}d\tau-\left[e^{\int_0^t \tilde{i}_s ds}-1\right],
\end{aligned}
\tag{84}
$$

donde $\int_\tau^t \tilde{i}_s ds$ se desarrolla como sigue

$$
\begin{aligned}
\int_\tau^t \tilde{i}_s ds &= \int_\tau^t\left[\frac{\mu}{a}+e^{-as}\left(\tilde{i}_0-\frac{\mu}{a}\right)+\sigma\int_0^s e^{av-as}dC_v\right]ds, \\
&= \int_\tau^t\left[\frac{\mu}{a}+e^{-as}\left(\tilde{i}_0-\frac{\mu}{a}\right)\right]ds+\sigma\int_\tau^t\int_0^s e^{av-as}dC_v ds, \\
&=\frac{\mu}{2a}(t-\tau)+\left(\tilde{i}_0-\frac{\mu}{a}\right)\left(\frac{e^{-a\tau}-e^{-at}}{a}\right) \\
&\quad-\frac{\sigma}{a}\int_\tau^t\left[e^{av-at}-1\right]dC_v, \\
&=\frac{\mu}{2a}(t-\tau)+\left(\tilde{i}_0-\frac{\mu}{a}\right)\left(\frac{e^{-a\tau}-e^{-at}}{a}\right) \\
&\quad-\frac{\sigma}{a}\left[e^{-at}\int_\tau^t e^{av}dC_v+\int_\tau^t dC_v\right],
\end{aligned}
\tag{85}
$$

además, se observa que

$$\int_\tau^t e^{av}dC_v\sim\mathcal{N}\left(0,\frac{e^{-at}-e^{-a\tau}}{a}\right), \tag{86}$$

y

$$\int_\tau^t dC_v\sim\mathcal{N}(0,t-r). \tag{87}$$

Por lo tanto, la cuenta del swap incierto en t es

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Pi}_{\text{swap}}(t) =& N\kappa\int_0^t e^{\int_\tau^t \tilde{i}_s ds}d\tau-N\left[e^{\int_0^t \tilde{i}_s ds}-1\right] \\
&+N\kappa\int_t^T A(t,\tau)B(t,\tau)d\tau-N\left[1-A(t,T)B(t,T)\right], \\
=& N\kappa\left[\int_0^t e^{\int_\tau^t \tilde{i}_s ds}d\tau+\int_t^T A(t,\tau)B(t,\tau)d\tau\right] \\
&-N\left[e^{\int_0^t \tilde{i}_s ds}-A(t,T)B(t,T)\right].
\end{aligned}
\tag{88}
$$

Cuenta Total Incierta

Al igual que en su homólogo probabilista, la cuenta total de la aseguradora bajo el marco incierto es

$$\tilde{U}(t)=\tilde{A}_{\text{prima}}(t)+\tilde{\Pi}_{\text{swap}}(t)-\tilde{V}^g(t), \tag{89}$$

donde

$$\begin{cases} \tilde{A}_{\text{prima}}(t) = (\ell_x \cdot \pi_0) \cdot e^{\int_0^t \tilde{i}_s ds}, \\ \pi_0 = {}_T p_x \cdot e^{-\int_0^T \bar{i}^*_s \, ds}, \\ d\tilde{i}_t = (\mu - a\tilde{i}_t)dt + \sigma C_t, \\ \tilde{V}^g(t) = \ell_{x+t} \cdot {}_{T-t}p_{x+t} \cdot \tilde{P}(t,T), \\ \tilde{P}(t,T) = E\left[e^{-\int_t^T \tilde{i}_s \, ds}\right] = A(t,T)B(t,T), \end{cases} \tag{90}$$

recordando que $\bar{i}^*_t$ es la fuerza de interés de la base actuarial de primer orden. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \tilde{U}(t) =& (\ell_x \cdot \pi_0) \cdot e^{\int_0^t \tilde{i}_s ds} \\ &+ N\kappa \left[\int_0^t e^{\int_\tau^t \tilde{i}_s ds} d\tau + \int_t^T A(t,\tau)B(t,\tau)d\tau\right] \\ &- N\left[e^{\int_0^t \tilde{i}_s ds} - A(t,T)B(t,T)\right] \\ &- \ell_{x+t} \cdot {}_{T-t}p_{x+t} \cdot A(t,T)B(t,T), \end{aligned} \tag{91}$$

estableciendo que $N = \ell_x \cdot \pi_0$, entonces

$$\begin{aligned} \tilde{U}(t) =& (\ell_x \cdot \pi_0) \cdot e^{\int_0^t \tilde{i}_s ds} \\ &+ \ell_x \cdot \pi_0 \cdot \kappa \left[\int_0^t e^{\int_\tau^t \tilde{i}_s ds} d\tau + \int_t^T \tilde{P}(t,\tau)d\tau\right] \\ &- \ell_x \cdot \pi_0 \left[e^{\int_0^t \tilde{i}_s ds} - \tilde{P}(t,T)\right] \\ &- \ell_{x+t} \cdot {}_{T-t}p_{x+t} \cdot \tilde{P}(t,T), \\ =& \kappa \cdot \ell_{x+T} \cdot e^{-\int_0^T \bar{i}^*_s \, ds} \left[\int_0^t e^{\int_\tau^t \tilde{i}_s ds} d\tau + \int_t^T \tilde{P}(t,\tau)d\tau\right] \\ &- \ell_{x+T} \cdot \tilde{P}(t,T)\left[1 - e^{-\int_0^T \bar{i}^*_s \, ds}\right]. \end{aligned} \tag{92}$$

La cuenta total en su vencimiento (T) es

$$\begin{aligned} \tilde{U}(T) =& \ell_{x+T}\kappa e^{-\int_0^T \bar{i}^*_s \, ds} \int_0^T e^{\int_\tau^T \tilde{i}_s ds} d\tau \\ &- \ell_{x+T}\left[1 - e^{-\int_0^T \bar{i}^*_s \, ds}\right] \end{aligned} \tag{93}$$

Cuenta Total sin Swap Incierto

La cuenta total sin la implementación del swap incierto es

$$\begin{aligned} \tilde{U}(t) &= \tilde{A}_{\text{prima}}(t) - \tilde{V}^g(t) \\ &= \ell_x \cdot \pi_0 \cdot e^{\int_0^t \tilde{i}_s ds} - \ell_{x+t} \cdot {}_{T-t}p_{x+t} \cdot \tilde{P}(t,T), \\ &= \ell_{x+T} \cdot e^{\int_0^t (\tilde{i}_s - \bar{i}^*_s) ds} - \ell_{x+T} \cdot \tilde{P}(t,T), \\ &= \ell_{x+T}\left[e^{\int_0^t (\tilde{i}_s - \bar{i}^*_s) ds} - \tilde{P}(t,T)\right]. \end{aligned} \tag{94}$$

en su vencimiento (T) es

$$\begin{aligned} \tilde{U}(T) &= \tilde{A}_{\text{prima}}(T) - \tilde{V}^g(T), \\ &= \ell_{x+T}\left[e^{\int_0^T (\tilde{i}_s - \bar{i}^*_s) ds} - 1\right]. \end{aligned} \tag{95}$$

El desarrollo presentado en esta sección evidencia que el modelo actuarial de interés es capaz de incorporar procesos inciertos para la fuerza de interés. De este modo, se introduce una nueva alternativa dentro del modelo de reserva de mercado: **la reserva de mercado incierta**. Para implementarla, basta con sustituir el modelo (3.1) por el modelo (5.3) en el modelo actuarial de la cuenta total de la aseguradora (78).

Ejemplo Numérico

Ahora que se ha formulado el modelo de la reserva de mercado para un seguro dotal puro bajo dos marcos distintos: uno estocástico, basado en la medida de probabilidad, y otro incierto, fundamentado en la teoría incierta de Liu. Se procede a su implementación numérica con el fin de ilustrar su comportamiento práctico.

El propósito de esta implementación no es desarrollar ni analizar métodos avanzados de simulación ni técnicas de programación, sino evidenciar que el uso de un instrumento de cobertura como el swap permite reducir la ocurrencia de eventos extremos en la cuenta total de la aseguradora. Se busca mostrar al lector que este tipo de cobertura puede aplicarse con éxito desde dos perspectivas distintas: una probabilística y otra incierta, dependiendo de cómo se modele la aleatoriedad de la tasa de interés.

El análisis se realiza sobre un seguro dotal puro pagadero a vencimiento. No se considera mortalidad ni cancelación, permitiendo centrar el estudio exclusivamente en la componente financiera del modelo. Se exploran dos horizontes temporales representativos: $T = 5$ años y $T = 15$ años.

En el marco estocástico, se utiliza el modelo de Vasicek (3.1) para modelar la tasa de interés. En el marco incierto, se emplea el modelo de Chen y Gao (5.3). Para cada enfoque, se simulan trayectorias de la tasa y se calcula el valor de la cuenta total de la aseguradora en su vencimiento (78). El interés principal es observar cómo varía la distribución de esta cuenta al incluir instrumentos de cobertura.

No se profundiza en los detalles técnicos de la implementación ni en los aspectos computacionales del modelo, pues este no es el objetivo del trabajo. En lugar de ello, la atención se centra en la presentación de los resultados obtenidos, con el fin de respaldar la utilidad de los swaps como mecanismos de cobertura, tanto en la modelación estocástica como en la incierta.

En la sección siguiente se muestran los resultados numéricos y gráficos que permiten comparar cada enfoque y la efectividad de las estrategias de cobertura implementadas.

Cuenta Estocástica v.s Cuenta Incierta

Para evaluar el impacto del uso del swap como instrumento de cobertura, se calcula la *cuenta total* de la aseguradora en su vencimiento bajo cada modelo y horizonte temporal.

Se analizan dos enfoques para la modelación de la tasa de interés: el estocástico ($U(T)$), mediante el proceso de Vasicek, y el incierto ($\tilde{U}(T)$), mediante el proceso de Liu. En cada caso, se presentan los resultados con y sin la inclusión del swap, para dos horizontes temporales: $T = 5$ años (visualizado en la figura 1) y $T = 15$ años (visualizado en l figura 2 años).

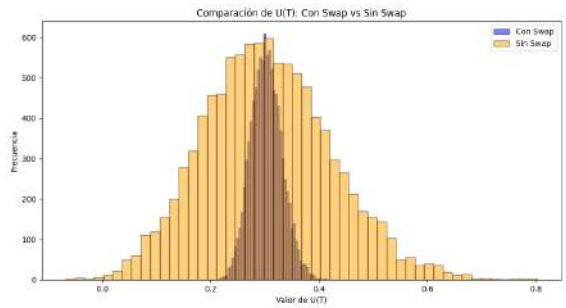
En las tablas 1 y 2 se muestran las estadísticas descriptivas obtenidas a partir de $10{,}000$ simulaciones para una suma asegurada de $100,000$ unidades monetarias: media, desviación estándar, mínimo y máximo de la cuenta total en cada configuración.

A continuación, se presentan los resultados de la simulación bajo el modelo de Vasicek y el modelo de Chen y Gao, comparando el valor final de la cuenta total $U(T)$ v.s $\tilde{U}(T)$ **con Swap** y **sin Swap**, en 2 horizontes temporales distintos: $T = 5$ y $T = 15$.

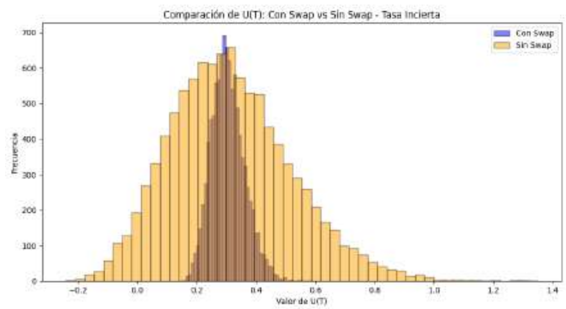
Parámetros Iniciales:

- $\alpha = a = 0.2$ (Velocidad de reversión)
- $\mu = 0.04$ (Nivel de reversión)
- $\sigma = 0.02$ (Volatilidad)
- $\bar{i}_0 = \tilde{i}_0 = 0.03$ (Tasa inicial)
- $\bar{i}^* = 0.04$ (Tasa de base actuarial de primer orden $\bar{i}^*$, constante)
- $l_{x+T} = 1$ (Suposición de supervivencia, por simplicidad)
- Número de simulaciones = $10{,}000$

Figura 1 Estableciendo un horizonte temporal de $T = 5$

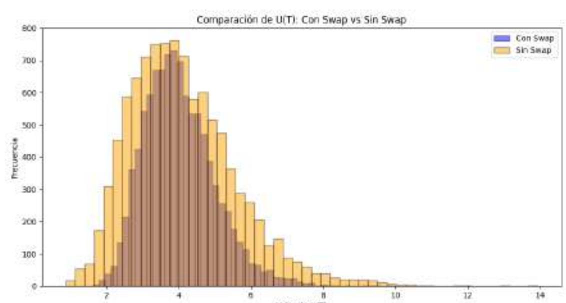


Usando tasa estocástica.

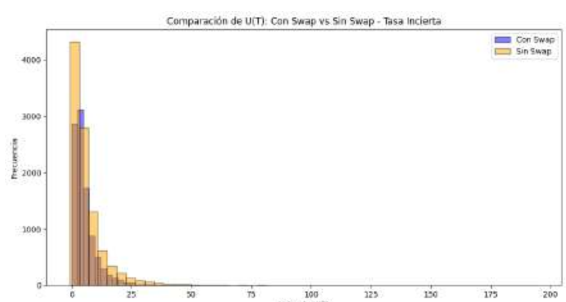


Usando tasa incierta.

Figura 2 Estableciendo un horizonte temporal de $T = 15$



Usando tasa estocástica



Usando tasa incierta

Tabla 1 Resultados de la cuenta con swap (suma asegurada \$100 000).

	Con Swap
$U(5)$	Media: 30 235.18, Desviación Est.: 2 863.98, Mínimo: 21 473.73, Máximo: 42 125.28
$\tilde{U}(5)$	Media: 30 484.61, Desviación Est.: 5 631.45, Mínimo: 14 448.61, Máximo: 59 092.27
$U(15)$	Media: 401 025.70, Desviación Est.: 97 900.41, Mínimo: 161 653.09, Máximo: 992 647.01
$\tilde{U}(15)$	Media: 557 517.91, Desviación Est.: 583 343.98, Mínimo: –4 084.00, Máximo: 12 129 140.76

Tabla 2 Resultados de la cuenta sin swap (suma asegurada \$100 000).

	Sin Swap
$U(5)$	Media: 30 478.57, Desviación Est.: 11 882.26, Mínimo: –6 839.99, Máximo: 80 363.30
$\tilde{U}(5)$	Media: 31 515.68, Desviación Est.: 20 657.41, Mínimo: –24 213.79, Máximo: 135 016.88
$U(15)$	Media: 409 603.79, Desviación Est.: 147 298.76, Mínimo: 86 299.27, Máximo: 1 394 686.67
$\tilde{U}(15)$	Media: 634 055.22, Desviación Est.: 844 179.85, Mínimo: –77 528.32, Máximo: 19 480 083.43

Con una suma asegurada de $100, 000$ unidades monetarias. Se observa lo siguiente.

- La **cuenta con swap** presenta una dispersión considerablemente menor, lo cual indica una menor exposición al riesgo de tasas de interés extremas (muy bajas o muy altas). Esto se traduce en:
  - Mayor estabilidad en los resultados financieros de la aseguradora.
  - Reducción del riesgo de pérdida significativa en escenarios desfavorables.
  - Resultados más predecibles, lo cual favorece la planificación financiera y la solvencia. Sin embargo, al limitar la sensibilidad a tasas de interés elevadas, la compañía renuncia a obtener beneficios extraordinarios en escenarios donde las tasas del mercado son significativamente altas.
- La **cuenta sin swap** muestra un rango de resultados más amplio: logra valores mayores en escenarios de tasas altas, pero también es más vulnerable a tasas muy bajas. Muestra una mayor variabilidad, reflejada en:
  - Valores extremos más amplios, tanto en pérdidas como en ganancias.
  - Mayor volatilidad, lo que implica riesgo más elevado, especialmente en contextos de tasas muy bajas, donde se observan saldos negativos de la cuenta.
- A medida que aumenta el horizonte temporal T, las diferencias entre ambos modelos se amplifican:
  - La variabilidad sin cobertura crece rápidamente.
  - La cobertura mediante swaps se vuelve más efectiva en limitar el riesgo financiero en el largo plazo.

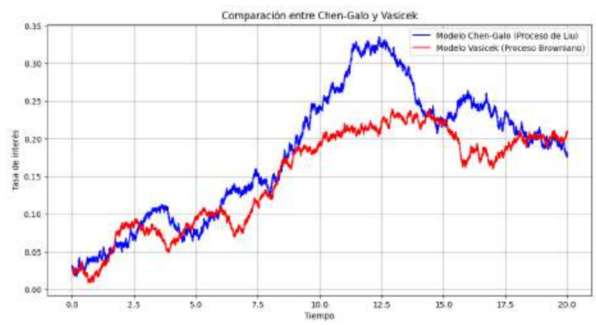


Figura 3 Trayectoria de tasa estocástica vs. tasa incierta

10. CONCLUSIÓN

Este estudio ha demostrado que la incorporación de un instrumento derivado como el swap resulta eficaz para mitigar la exposición de la reserva de mercado de un seguro dotal puro ante la incertidumbre en la tasa de interés. A partir de la implementación de un modelo bajo el enfoque estocástico (modelo de Vasicek) y su contraparte bajo el enfoque incierto (modelo de Chen y Gao), se compararon cuantitativamente los efectos de utilizar o no dicho instrumento de cobertura.

Los resultados obtenidos confirman que, en ambos marcos teóricos, el uso del swap reduce significativamente la dispersión de la cuenta total del asegurador. Este comportamiento fue especialmente evidente en horizontes largos, donde la volatilidad acumulada de las tasas de interés genera mayor incertidumbre sobre el valor terminal de la reserva. En este sentido, el swap actúa como un estabilizador, proporcionando robustez financiera al diseño de reservas técnicas.

Además, se observó que el marco incierto ofrece una alternativa viable al probabilístico para modelar la aleatoriedad. La medida incierta, al basarse en grados de creencia, permite construir modelos más flexibles en entornos con ambigüedad o información limitada, lo cual representa una valiosa herramienta para el actuario contemporáneo.

Propuestas de mejora

Este trabajo abre diversas líneas de investigación que pueden enriquecer y extender los resultados presentados:

- **Calibración con datos reales:** La presente investigación se ha limitado a simulaciones hipotéticas para ilustrar el funcionamiento de los modelos. Una extensión natural sería calibrar tanto el modelo estocástico como el incierto con datos de mercado reales, lo cual permitiría validar empíricamente la efectividad del swap como cobertura.
- **Modelos multifactoriales:** Se podría considerar el uso de modelos multifactoriales para la tasa de interés, al igual que involucrar modelos de saltos y de volatilidad estocástica.
- **Exploración de medidas alternativas:** La medida incierta representa solo una de las posibles alternativas a la probabilidad. Futuras investigaciones podrían explorar el uso de medidas borrosas o de posibilidad, lo que abriría nuevas vías para modelar la aleatoriedad desde perspectivas no clásicas.
- **Teoría de finanzas cuánticas:** Finalmente, se sugiere considerar la integración de marcos de finanzas cuánticas para modelar la tasa de interés.

En conjunto, los hallazgos de este trabajo no sólo sustentan la validez del uso del swap como mecanismo de cobertura robusto en modelos actuariales, sino que también invitan a repensar la modelización del riesgo desde marcos matemáticos más amplios que los tradicionalmente empleados.

REFERENCIAS

Björk, T., 2020 *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press, fourth edición.

Bowers, N. L., H. U. Gerber, J. C. Hickman, D. A. Jones, y C. J. Nesbitt, 1997 *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries, second edición.

Filipović, D., 2009 *Term-Structure Models: A Graduate Course*. Springer Finance, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Gao, J. y H. Liu, 2019 Pricing longevity bonds under the uncertainty theory framework. International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence **33**: 1959020.

Liu, B., 2015 *Uncertainty Theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, fourth edición.

Møller, T. y M. Steffensen, 2007 *Market-Valuation Methods in Life and Pension Insurance*. Cambridge University Press.

Vaaler, L. J. F., S. K. Harper, y J. W. Daniel, 2019 *Mathematical Interest Theory*, volumen 57 de *AMS/MAA Textbooks*. American Mathematical Society, third edición.

David Sánchez Herrera recién egresado de la licenciatura en Actuaría en la Universidad Anáhuac Xalapa (2021-2025). A lo largo de su formación ha obtenido diversos diplomas y certificaciones profesionales, entre los que destacan: la Certificación Profesional en Ciencia de Datos de Harvard University Online (2024), el Diploma Profesional en Finanzas Cuantitativas del Massachusetts Institute of Technology Online (2024), la Especialización en Machine Learning de Stanford University Online (2025), la Especialización en Ingeniería Financiera y Gestión de Riesgos de Columbia University Online (2024), y la Certificación de Nivel 1 en Teoría de la Probabilidad de Wolfram U (2023). Además, ha cursado satisfactoriamente diplomados en matemáticas, probabilidad y Excel. Sumado a su sólida formación y dominio teórico, David maneja con destreza R, Python y Excel avanzado (incluyendo macros y VBA), lo que le permite implementar eficazmente teorías de modelos financieros y actuariales complejos y sofisticados. Además, durante su licenciatura elaboró una tesina desarrollando de manera muy concisa las matemáticas estocásticas del modelo de Heston de volatilidad estocástica para la valoración de opciones financieras mediante cálculo estocástico. Su afición e interés consiste en investigar modelos actuariales, de finanzas matemáticas y de finanzas cuánticas (mecánica cuántica aplicada), con el propósito de aplicarlos de manera conjunta.