



COLEGIO
NACIONAL
DE ACTUARIOS

ACTUARIOS TRABAJANDO

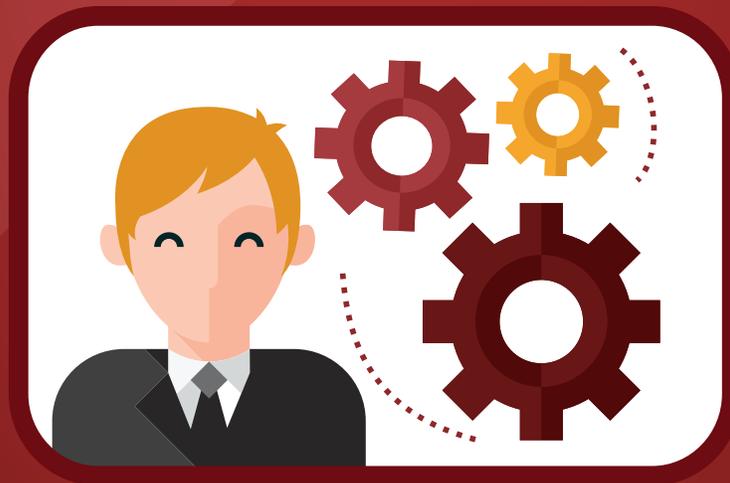
REVISTA MEXICANA DE INVESTIGACIÓN ACTUARIAL APLICADA

q_x

μ_x

d_x

${}_tV_x$



A_x

l_x

\ddot{a}_x

p_x

Tabla de Contenidos

Carta editorial del presidente	3
 PREMIO NACIONAL DE ACTUARÍA	
Estimación de curvas de mortalidad mediante suavizamiento controlado y segmentado: comparación con diversos métodos usados en Actuaría	8
CATEGORÍA DE INVESTIGACIÓN, TERCER LUGAR	
Eliud Silva Urrutia y Víctor M. Guerrero Guzmán	
 Análisis, modelo y plan de negocio para el primer esquema freemium de asistencias y coberturas para el cuidado de la salud	24
CATEGORÍA DE STARTUP E INNOVACIÓN, SEGUNDO LUGAR	
Iván David Vázquez Álvarez	
 Seguro Catastrófico, póliza de sismo para edificaciones	49
CATEGORÍA DE INVESTIGACIÓN, SEGUNDO LUGAR	
Fausto Guevara López	
 Viñas aplicadas a medidas de riesgo	77
CATEGORÍA DE INVESTIGACIÓN, PRIMER LUGAR	
Eric Daniel Hernández Jardón	

Estimados colegas:

Deseamos que este 2023 sea un año de logros y de mucho éxito en lo personal y en lo profesional. En el Colegio Nacional de Actuarios iniciamos muy bien el año, presentando a todos ustedes una gran novedad para nuestro gremio: el primer Premio Nacional de Actuaría. A mediados del año pasado lanzamos una detallada convocatoria, abierta a todos los actuarios del país, para contender por este premio. Se establecieron dos categorías: Investigación y Startups e Innovación. El objetivo del premio es el estimular y reconocer la investigación aplicada, el análisis de temas de interés relacionados, la innovación y la creación de proyectos relacionados con la profesión.

En esta edición de la revista *Actuarios Trabajando*, hemos querido presentar una síntesis de los trabajos ganadores.

El ganador del primer lugar en la categoría de *Investigación* fue Eric Daniel Hernández Jardón, con el trabajo "*Viñas aplicadas a medidas de riesgo*", en donde desarrolla una metodología para estimar la dependencia existente entre los riesgos de diferentes seguros con los elementos de capital de solvencia dentro de la regulación mexicana, demostrando, como lo expresa el autor, que "la modelación de una distribución multivariada de alta dimensión se puede realizar utilizando cópulas, gracias a la versatilidad que nos dan modelos como las viñas". Con lo anterior se logra realizar una correcta estimación del requerimiento de Capital de Solvencia en una compañía de seguros.

El segundo lugar fue asignado a Fausto Guevara López, quien presentó la investigación "*Seguro catastrófico, póliza de sismo para edificaciones*", realizando una revisión a las estimaciones del modelo de riesgo estatutario, después de los sismos de 2017, detectando que éstas sobreestimaban las pérdidas en casi un 50% y proponiendo entonces un nuevo modelo para la cuantificación de riesgo sísmico para edificaciones en la Ciudad de México.

Finalmente, el tercer lugar para esta categoría, lo obtuvieron Eliud Silva y Víctor M. Guerrero Guzmán, con su trabajo *"Estimación de curvas de mortalidad mediante suavizamiento controlado y segmentado: comparación con diversos métodos usados en Actuaría"*, en el cual proponen el uso de la metodología de suavizamiento controlado y por segmentos para modelar de una mejor manera la mortalidad, al ser más preciso este modelo que los modelos paramétricos tradicionales.

Por su parte, dentro de la categoría de *Startup e Innovación*, el único premio fue para Iván David Vázquez Álvarez, quien obtuvo el segundo lugar de esta categoría con el proyecto *"Análisis, modelo y plan de negocio para el primer esquema freemium de asistencias y coberturas para el cuidado de la salud"*. Iván David propone una manera de adaptar el modelo de negocio freemium a la industria de los seguros, buscando atraer a nuevos usuarios de seguros, a través de un producto o servicio gratuito. Lo que se persigue es incrementar la escasa cultura de seguro en nuestro país logrando una mayor penetración de los productos relativos.

Como puede verse, todos los trabajos ganadores comparten varios elementos, tales como la relevancia y pertinencia del tema, la claridad de objetivos, una rigurosa metodología, así como originalidad y aplicabilidad.

Felicitemos nuevamente a los ganadores y exhortamos a la comunidad actuarial a seguir produciendo documentos e investigaciones de alta calidad, en bien de nuestra profesión y de nuestro querido México.

Reciban un cordial saludo y nuestros mejores deseos para este 2023, en nombre del Colegio Nacional de Actuarios.

Alejandro Turner Hurtado
Presidente del CONAC



COLEGIO
NACIONAL
DE ACTUARIOS

**Actuarios Trabajando
es una revista hecha por
Actuarios, con Actuarios y
para Actuarios, y necesita de
tu aporte profesional con tu
toque personal.**

No dejes pasar la oportunidad de que tu voz profesional sea oída, y tus trabajos sean conocidos por los demás miembros de nuestro gremio.

Además, los Actuarios certificados del CONAC obtienen horas de educación continua por sus contribuciones aceptadas para la revista.

**¡Queremos oírte!
¡Tu aporte es necesario!
¡Queremos saber de ti!**

Envía tus contribuciones a alguno de los miembros del Consejo Editorial,
o escribe por correo-e a: info@conacmexico.org.mx



COLEGIO NACIONAL DE ACTUARIOS, A.C.

La Actuaría ha sido fundamental para el desarrollo, crecimiento y evolución del sector asegurador mexicano. El Colegio Nacional de Actuarios, A.C. (CONAC) fundado desde 1966, es la principal organización profesional que representa al gremio actuarial mexicano ante autoridades gubernamentales, organismos empresariales y asociaciones profesionales internacionales.

¡Acércate al CONAC, conoce los beneficios de ser miembro y forma parte de él!

TODOS LOS ACTUARIOS SON BIENVENIDOS

Puedes afiliarte a cualquiera de los siguientes
COMITÉS:

- Investigación y Desarrollo Actuarial
- Certificación
- Certificación en Pasivos Laborales
- Educación Continua
- Asuntos Académicos
- Relaciones Internacionales
- Peritajes Actuariales Oficiales
- Profesionalismo

Y próximamente :

- Ciencia de Datos

REQUISITOS PARA SER MIEMBRO CONAC:

- ⇒ Envía por correo electrónico copia en formato PDF de tu Cédula Profesional, Título y CURP
- ⇒ Solicitud de ingreso (descárgala en www.conacmexico.org.mx)
- ⇒ Cubre la cuota de recuperación

No pierdas la oportunidad de estudiar una **Maestría**

El CONACYT apoya a sus becarios con 4.5 UMA mensuales por hasta 24 meses

\$13,162.90 en pesos de 2022



A partir de noviembre 2022 los programas de Maestría de la Facultad de Ciencias Actuariales pertenecen al Sistema Nacional de Posgrados (SNP).

El SNP reconoce la excelencia académica de nuestra **Maestría en Riesgo** y **Maestría en Estadística**.



Compromisos de los becarios

Ser estudiante de tiempo completo



Mantener 8.0 de promedio



Reportar sus avances al CONACYT



La convocatoria abrirá en febrero 2023

Facultad de Ciencias Actuariales

Informes:
Dr. Daniel López Barrientos
daniel.lopez@anahuac.mx
anahuac.mx/mexico

Posgrados
ANÁHUAC

PREMIO NACIONAL DE ACTUARÍA

**Estimación de curvas
de mortalidad mediante
suavizamiento controlado y
segmentado: comparación
con diversos métodos usados
en Actuaría**

CATEGORÍA DE INVESTIGACIÓN, TERCER LUGAR



Estimación de curvas de mortalidad mediante suavizamiento controlado y segmentado: comparación con diversos métodos usados en Actuaría

Eliud Silva^{*,1} y Víctor M. Guerrero Guzmán^{†,2}

^{*}Facultad de Ciencias Actuariales de la Universidad Anáhuac México, [†]Instituto Tecnológico Autónomo de México

RESUMEN Este trabajo obtuvo el tercer lugar del Premio Nacional de Actuaría organizado por el Colegio Nacional de Actuarios A.C. Se propone el uso de la metodología de suavizamiento controlado y por segmentos (SCyS), para un mejor resultado de la modelación de la mortalidad. Se presentan doce modelos paramétricos y se comparan los ajustes de estos con los obtenidos a través del SCyS. La principal diferencia entre los modelos paramétricos, y el propuesto en este trabajo es que este último incorpora un elemento aleatorio y considera que las observaciones no tienen alguna distribución de probabilidad específica, con lo que resulta factible generar intervalos para las estimaciones. Se realizaron dos bloques de resultados que ilustran el desempeño del método de SCyS contra los enfoques paramétricos, para comparar estas técnicas se usaron cuatro funciones de pérdida. Con los resultados obtenidos se llegó a la conclusión de que el método de SCyS es una herramienta capaz de incrementar la precisión de las estimaciones de mortalidad, e incluso se ilustra su superioridad respecto a los modelos paramétricos. El video con la presentación puede encontrarse [aquí](#).

Palabras clave

Mortalidad, estimación, seguros



Derechos reservados © 2022 por el Colegio Nacional de Actuarios
Última actualización del manuscrito: 20 de diciembre de 2022
Este artículo es publicado por el Colegio Nacional de Actuarios (CONAC) y contiene información de una variedad de fuentes. Es un trabajo cuyo fin es únicamente informativo y no debe interpretarse como asesoramiento profesional o financiero. El CONAC no recomienda ni respalda el uso de la información proporcionada en este estudio. El CONAC no ofrece ninguna garantía, expresa o implícita, ni representación de ningún tipo y no asume ninguna responsabilidad en relación con el uso o mal uso de este trabajo.

INTRODUCCIÓN

Uno de los principios claves en el ejercicio de la profesión actuarial es lo tocante a la modelación y estimación de la mortalidad. Una apropiada modelación y estimación de una Tabla de Mortalidad, junto con otros elementos actuariales, resulta en la generación de información útil para determinar una solvencia adecuada para las compañías aseguradoras. Es decir, representa un elemento esencial para la tarificación de riesgos con el fin de hacer frente a las eventuales obligaciones que se puedan suscitar. Asimismo, para los ministerios de población y/o de salud alrededor del mundo, tal modelación y estimación, constituyen un instrumento sustantivo para llevar a cabo una buena toma de decisiones y para la planeación de políticas públicas.

Frente a acontecimientos catastróficos, como pueden ser las pandemias, cabe preguntarse de manera natural qué tan apropiada es la experiencia de mortalidad que se está empleando. En particular para el caso de México, está documentado que existe un exceso de mortalidad, tanto para la población asegurada como para la que no lo está y esto es notablemente marcado en la Ciudad de México (véase AMIS (2021a), AMIS (2021b) y García and Beltrán (2021)). También, el considerar que las curvas de mortalidad volverán en un corto horizonte de tiempo a recuperarse y ser cómo antes de la pandemia, resulta aventurado, dado que si se revisa la literatura y la evidencia empírica, se tiene que primordialmente en las pandemias, las recuperaciones son lentas. En efecto, si se sintetiza la mortalidad por medio de las expectativas de vida a través del tiempo, se puede afirmar que son del tipo paquidérmico. Es decir, se modifican en dirección a su recuperación de manera sumamente aletargada.

Dada la necesidad de modelar y estimar la mortalidad, tanto de las compañías de seguros como de los ministerios de población y/o de salud, se ha tenido en mente el cómo hacerlo de manera cada vez más asertiva. Es más, entre más confiable sea el conocimiento del fenómeno, se estará en mejores condiciones para actuar en consecuencia. El trabajo seminal elaborado por DeMoivre (1725), representa en este sentido un primer intento documentado en dicha dirección. A partir de esa modelación surgieron otras muchas que trataban de incorporar elementos más acordes y particulares a la realidad del momento respectivo que se vivía. De hecho, los modelos

posteriores ponen de manifiesto las bondades que ofrecen sobre los modelos predecesores. Un trabajo que hace un recorrido exhaustivo a través de los distintos modelos es el de Forfar (2006) y más recientemente el de Huang *et al.* (2020) que se enfoca en la última etapa de la vida humana.

Ante la diversidad de propuestas existentes para modelar la mortalidad, a las que formalmente se les llama modelos paramétricos, surge la interrogante de cómo valorar cuál es el que mejor representa la dinámica de determinada mortalidad observada. Es por eso que, en el presente trabajo, además de presentar brevemente doce modelos de este tipo, se busca también comparar sus ajustes con el que se obtiene a través del suavizamiento controlado y por segmentos (SCyS), que corresponde a una técnica propuesta desde la óptica de la Estadística no-paramétrica.

El presente trabajo está organizado de la siguiente manera. En la próxima sección se exponen algunas alternativas que se han propuesto para la modelación de la mortalidad. Más adelante, se explora la metodología SCyS que se utilizó. Posteriormente, se presentan los principales resultados encontrados al realizar la comparación de los mejores enfoques paramétricos conocidos contra el aquí propuesto, con los datos usados originalmente en los artículos que presentaron dichos enfoques. Finalmente, se exponen las conclusiones más importantes alcanzadas tras la realización del presente trabajo.

1. MODELOS PARAMÉTRICOS DE MORTALIDAD

En esta sección se presentan los modelos paramétricos de manera cronológica, tal y como fueron sugeridos por sus respectivos autores. Cabe notar que algunos están en función de la fuerza de mortalidad μ_x a edad x , otros como función de las probabilidades de muerte q_x o del cociente q_x/p_x , donde x representa la edad, y otros como una ponderación de tres modelos. Asimismo, a los lectores que deseen mayores detalles de los modelos se les sugiere consultar el trabajo de Pascariu (2018) y las referencias ahí documentadas. Asimismo, estos modelos consideran un ajuste global, que sirve para todo el espectro de la vida humana. Además, la calidad del ajuste logrado se mide por medio de funciones de pérdida, las cuales se expondrán más adelante.

El primer modelo paramétrico con el que se busca el ajuste corresponde al de Thiele (1871), con el que se sugiere expresar la fuerza de mortalidad como la suma de tres componentes que representan, según su concepción, las tres etapas de la vida humana: niñez, juventud y vejez.



¹Estos autores contribuyeron en igual medida al trabajo.

²Estos autores contribuyeron en igual medida al trabajo.

¹Correo electrónico: jose.silva@anahuac.mx

²Correo electrónico: guerrero@itam.mx

Su expresión matemática está dada por

$$\mu_x = A_1 e^{-B_1 x} + A_2 e^{-0.5 B_2 (x-C)^2} + A_3 e^{-B_3 x},$$

donde los parámetros $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ y C son constantes desconocidas que deben ser estimadas con los datos disponibles.

Poco más de una década después, [Wittstein \(1883\)](#) propone expresar las probabilidades de muerte por medio de

$$q_x = (1/B) A^{-(Bx)^N} + A^{-(M-x)^N}$$

siendo A, B, N y M los respectivos parámetros por estimar.

Casi un siglo después, otro modelo importante fue el establecido por [Siler \(1979\)](#), quien nuevamente expresa el comportamiento de la mortalidad a través de tres componentes y para ello utiliza la fuerza de mortalidad

$$\mu_x = A_1 e^{-B_1 x} + A_2 + A_3 e^{B_3 x}$$

con los parámetros A_1, A_2, A_3, B_1 y B_3 por estimar.

Un año después, se publica uno de los parteaguas en la modelación en la mortalidad, el modelo de [Heligman and Pollard \(1980\)](#), que contiene cuatro versiones como se expresa a continuación. Según se muestra en el artículo, los autores retoman la idea de Thiele, para modelar la mortalidad como la suma de tres componentes a lo largo de la vida humana. El modelo contiene, de acuerdo con la versión que se emplee, un total de ocho o nueve parámetros respectivamente,

$$\frac{q_x}{p_x} = A^{(x+B)^C} + D e^{-E[\log(x)-\log(F)]^2} + G H^x,$$

$$q_x = A^{(x+B)^C} + D e^{-E[\log(x)-\log(F)]^2} + \frac{G H^x}{1 + G H^x}, \quad (1)$$

$$q_x = A^{(x+B)^C} + D e^{-E[\log(x)-\log(F)]^2} + \frac{G H^x}{1 + K G H^x}, \quad (2)$$

$$q_x = A^{(x+B)^C} + D e^{-E[\log(x)-\log(F)]^2} + \frac{G H^x}{1 + G H^{x^k}}, \quad (3)$$

donde A, B, C, D, E, F, G, H y K son los parámetros por estimar y \log denota logaritmo natural. Cabe notar que el artículo donde se presenta la propuesta del modelo cuenta con un alto reconocimiento entre los interesados en la modelación de la mortalidad.

Posteriormente, [Rogers and Planck \(1983\)](#) proponen seguir con la tónica de sumar componentes para representar la mortalidad a lo largo de la vida. Para ello se retoma la idea de usar sumas de exponenciales y más aún



de dobles exponenciales. Matemáticamente, el modelo se expresa así

$$q_x = A_0 + A_1 e^{-Ax} + A_2 e^{[B(x-U) - e^{-C(x-U)}]} + A_3 e^{Dx},$$

teniendo a las constantes $A_0, A_1, A_2, A_3, A, B, C, D$ y U como parámetros por estimar.

Por su parte, cuatro años después, [Martinelle \(1987\)](#) tiene en cuenta la fuerza de mortalidad y establece la expresión

$$\mu_x = (A e^{Bx} + C) / (1 + D e^{Bx}) + K e^{Bx},$$

teniendo a A, B, C, D y K como los parámetros que la especifican. Puede notarse que el primer sumando es un cociente de exponenciales desplazadas y a dicho cociente se le suma otra función exponencial.

Un quinquenio después, [Carriere \(1992\)](#) propone modelar la función de supervivencia por medio de una ponderación de otras tres funciones de supervivencia. De manera genérica se tiene el modelo

$$S(x) = \psi_1 S_1 + \psi_2 S_2 + \psi_3 S_3,$$

donde ψ_1, ψ_2 y ψ_3 son ponderadores de las funciones de supervivencia, cuya suma es igual a la unidad. Desde otra óptica se pueden interpretar como probabilidades de fallecer en las distintas etapas de la vida. Por su parte, S_1, S_2 y S_3 son las respectivas funciones de supervivencia. El autor propone que tales funciones puedan ser el modelo de Gompertz, Gompertz inverso, Weibull o Weibull inverso. En particular, el trabajo mencionado tiene la característica distintiva de que propone utilizar varias funciones de pérdida como métricas de la bondad del ajuste. De hecho, el autor contrasta sus resultados con los de [Heligman and Pollard \(1980\)](#) y evidencia el mejor ajuste con su modelo.

En el mismo año, [Kostaki \(1992\)](#) hace una variante específica en la mortalidad juvenil en función de la que fue hecha por [Heligman and Pollard \(1980\)](#). Ésta consiste en una modificación del segundo término, con lo cual su expresión viene dada por

$$q_x / p_x = A^{(x+B)^C} + D e^{-E_i[\log(x)-\log(F)]^2} + G H^x,$$

teniendo A, B, C, D, E_i, F, G y H como parámetros por calcular, donde E_i para $i = 1, 2$, permite relajar el supuesto de simetría al introducir una extensión distinta antes y después del pico más alto de la joroba de mortalidad (véase [Remund et al. \(2018\)](#)).

Debe notarse que todos los modelos mencionados se pueden clasificar como deterministas, dado que ninguno

de ellos incorpora elemento aleatorio alguno. Esta es una diferencia sustantiva frente al método expuesto en el siguiente apartado, es decir el de SCyS. De hecho, éste realiza la inclusión de tal elemento aleatorio en su planteamiento, con lo que es factible generar intervalos para las estimaciones, que en este caso son simétricos y se definen para efecto de este documento de tamaño ± 3 desviaciones estándar. Cabe notar que, aunque se pudieran generar intervalos de determinado tamaño asociados a las estimaciones puntuales obtenidas bajo la mirada de los modelos paramétricos por medio de Bootstrap, como en [Karlis and Kostaki \(2002\)](#) y en [Debón and Montes \(2008\)](#), por sí mismos no tienen en su concepción la aleatoriedad. También por otra parte, en el SCyS se considera que las observaciones no tienen alguna distribución de probabilidad específica, por lo que la propuesta en ese sentido produce estimaciones de tipo no-paramétrico.

2. METODOLOGÍA DE SUAVIZAMIENTO CONTROLADO Y SEGMENTADO

Con la finalidad de lograr curvas de mortalidad adecuadas para un buen análisis, el empleo de modelos paramétricos es una alternativa empleada con mucha frecuencia en la práctica actuarial. Sin embargo, también como se corrobora más adelante lo es el SCyS. Con este segundo enfoque se busca estimar una tendencia subyacente a los datos, de manera similar a lo que ocurre en el contexto de series de tiempo, la cual se considera equivalente a una curva de mortalidad en el marco de Tablas de mortalidad. Se busca entonces obtener una adecuada fidelidad a las tasas de mortalidad m_x con una curva suavizada.

Cuando se grafican las tasas de mortalidad m_x típicamente se observan diferentes patrones de variabilidad, mismos que se corresponden con las diferentes etapas de la vida. En efecto, en circunstancias no pandémicas, generalmente la máxima variabilidad de las tasas se presenta en la mortalidad infantil, luego en la juvenil y en menor medida en la vejez.

Algunas de las razones de elegir el método de SCyS son las siguientes:

- permite controlar el porcentaje de suavidad tanto en la totalidad de la curva como en los segmentos que se definan por medio de índices de suavizamiento;
- las uniones de los segmentos son continuas;
- se pueden generar intervalos de las estimaciones diferenciados por porcentaje de suavidad impuesta;
- se pueden fijar puntos de corte de cada segmento en función de información exógena y/o endógena;

- dados dos o más conjuntos de experiencias de mortalidad, conviene que el analista fije para todos ellos el mismo porcentaje de suavidad, con la finalidad de garantizar comparabilidad en términos estadísticos.

Se sugiere al lector interesado en aplicar el método de SCyS utilizar la herramienta que se encuentra en línea, llamada CSmoothing [Silva et al. \(2022\)](#) disponible libremente en <https://anahuac.shinyapps.io/CSmoothing/>. Con esta herramienta, se pueden tanto analizar datos propios como tener acceso a más de 10,000 series reales de mortalidad provenientes de la base de datos de mortalidad elaborada por el Max Planck Institute for Demographic Research, la Universidad de California Berkeley, el INED de Paris y las Naciones Unidas. Asimismo, para mayor detalle del método se sugiere revisar [Guerrero and Silva \(2015\)](#). Como principio básico, se sugiere imponer mayor suavidad, es decir usar un parámetro de suavizamiento más alto, cuando se tenga mayor variabilidad en un segmento determinado de datos.

Otro aspecto fundamental del método es cómo imponer el inicio y el final de los segmentos. Para decidir cómo segmentar el conjunto de datos objeto de estudio, los autores sugieren seguir una de las siguientes alternativas:

1. fijar puntos razonables a partir de información exógena; o bien
2. utilizar un procedimiento de optimización de algún criterio estadístico, por medio de una búsqueda exhaustiva a través de todo el conjunto de datos, como por ejemplo el minimizar el error estándar de la tendencia estimada.

En este estudio se utiliza la primera opción dado que se sabe que la vida humana puede concebirse en tres etapas (ver por ejemplo, [Heligman and Pollard \(1980\)](#)).

3. MÉTODO DE COMPARACIÓN: FUNCIONES DE PÉRDIDA

Las llamadas funciones de pérdida se utilizan para medir la diferencia entre las observaciones y las estimaciones, con lo que el analista puede dimensionar cuán grande o pequeño es el error de estimación que se está cometiendo. Para efectos de este trabajo y en el contexto de tasas específicas de mortalidad m_x , con el fin de ubicar los mejores ajustes de los datos contra cada uno de los doce modelos paramétricos, se sigue la propuesta de funciones de pérdida hecha por [Pascariu \(2018\)](#). Es decir, a cada conjunto de datos a estudiar se le someterá a una búsqueda exhaustiva del mejor ajuste en cada uno de los



modelos y se retendrá el que arroje la mejor estimación. Tal mejor ajuste será el que se contraste con el ajuste respectivo proveniente de la aplicación del método de SCyS. Debe tenerse presente que entre menor sea el valor de la función de pérdida denotada aquí con las siglas LF (del inglés *Loss Function*) mejor será el ajuste de los datos con el respectivo modelo.

Nombre	Fórmula
Poisson L (PL)	$-\left[\sum_{x=0}^{85+} D_x \log(\hat{m}_x) - \hat{m}_x E_x\right]$
Binomial L (BL)	$-\left[\sum_{x=0}^{85+} D_x \log(1 - \exp(\hat{m}_x)) - (E_x - D_x)\hat{m}_x\right]$
LF1	$\sqrt{\sum_{x=0}^{85+} \left[1 - \frac{\hat{m}_x}{m_x}\right]^2}$
LF2	$\sum_{x=0}^{85+} \log\left(\frac{\hat{m}_x}{m_x}\right)^2$

■ **Tabla 1** Funciones de pérdida seleccionadas.

En la Tabla 1, D_x es el número de defunciones, E_x es la población expuesta, \hat{m}_x es el valor estimado y m_x es el valor observado.

Cabe notar que las estimaciones de los ajustes se hacen en la escala natural de las tasas m_x y que se presentan en escala de logaritmo natural los resultados, con la finalidad de hacer más evidentes las eventuales discrepancias entre lo estimado y lo observado. Como se ha mencionado, una vez identificada la mejor estimación paramétrica, se realizará la comparación con el método aquí propuesto. Para tal propósito se utilizará el estadístico denominado Raíz del Error Cuadrático en logaritmos, que se denotará como RSE (por las siglas en inglés de *Root Square Error*). Este estadístico está dado por

$$RSE = \sqrt{\sum_{x=0}^{85+} [\log(m_x) - \log(\hat{m}_x)]^2},$$

donde las respectivas tasas de mortalidad observadas están dadas por m_x y las estimadas por \hat{m}_x . Asimismo, para comparar la mejor estimación paramétrica contra la sugerida por medio del SCyS y con ello dar más robustez a los resultados que se presenten, independientemente de la métrica de precisión que se desee emplear, además del RSE se calculan también los estadísticos de las funciones de pérdida seleccionadas. Debe notarse que en tales estadísticos se toman en cuenta todas las edades de 0 a 85 años y más, en las comparaciones realizadas en este trabajo. Adicionalmente se utilizan el porcentaje de cambio entre los RSE obtenidos con cada uno de los



enfoques y las métricas de errores empleadas. Por último, conviene mencionar que las aplicaciones se obtuvieron por medio del uso de programas en el lenguaje del software estadístico R versión 4.2.3, desarrollados por los propios autores.

4. APLICACIONES

En esta sección se exponen dos bloques de resultados que ilustran el desempeño del método de SCyS contra los enfoques paramétricos antes mencionados. En primer lugar, se compara la propuesta contra los doce modelos paramétricos para los casos de Reino Unido y Japón, por sexo, en 2020. Luego, dado que se tiene certeza en que la calidad de los datos de tales naciones es superior a la de México, se expone su caso por sexo para el mismo año 2020 suscitado en medio de pandemia, así como para 2015, último año intercensal pre-pandemia.

Contraste entre doce modelos paramétricos y el de SCyS

Para verificar que dicho método también tiene un buen desempeño con poblaciones más contemporáneas, se consideran los casos de Reino Unido y Japón, por sexo, en 2020. Los datos son extraídos de la base de datos de mortalidad de Human Mortality (University of California Berkeley y Max Planck Institute for Demographic Research, 2022). Asimismo, se compara el método con doce modelos paramétricos, a saber: Thiele (T), Wittstein (W), Siler (S), Heligman y Pollard (HP), Heligman y Pollard 2 (véase (1)), Heligman y Pollard 3 (véase (2)), Heligman y Pollard 4 (véase (3)), Rogers-Planck (RP), Martinelle (M), Carriere 1 (C1), Carriere 2 (C2) y Kostaki (K). Para tal propósito, se realiza nuevamente una búsqueda exhaustiva entre todas las estimaciones considerando todas las funciones de pérdida antes mencionadas. En la Tabla 2 se presentan los resultados y en negrita se muestra la estimación más precisa. Debe tenerse en cuenta que al emplear el método de SCyS, cuanto mayor sea la variabilidad de los datos, más suavidad se requerirá para la estimación de la curva de mortalidad (tendencia) en el segmento respectivo.

LF	T	W	S	HP	HP2	HP3	HP4	RP	M	C1	C2	K
Mujeres Reino Unido												
PL	8.702	13.465	9.192	6.939	4.924	6.731	4.809	6.003	8.875	6.891	6.880	5.074
BL	7.565	13.849	8.098	7.079	8.480	3.373	4.920	12.232	9.237	8.220	7.548	-
LF1	1.816	2.574	2.118	3.603	3.567	3.572	3.365	3.325	33.671	1.812	1.818	3.584
LF2	2.126	2.632	1.889	1.282	1.282	1.260	1.265	2.258	4.090	1.726	1.725	1.282
Hombres Reino Unido												
PL	15.794	10.065	5.701	4.390	4.400	4.175	4.254	5.633	7.364	3.773	4.211	6.294
BL	13.363	12.388	6.136	6.713	7.201	7.066	7.265	6.068	7.505	4.640	4.763	6.395
LF1	2.372	3.367	2.380	3.851	3.793	3.797	3.798	5.496	35.191	2.358	1.417	3.852
LF2	1.894	2.777	2.316	1.304	1.304	1.280	1.298	2.447	4.583	2.147	1.463	1.117
Mujeres Japón												
PL	8.636	20.619	10.528	10.861	10.725	5.001	5.070	13.837	21.487	14.445	5.342	-
BL	5.867	20.605	10.886	10.954	10.954	10.753	9.017	5.384	22.409	31.959	13.201	5.965
LF1	2.082	2.750	2.466	3.869	3.852	3.852	3.861	2.807	27.874	2.522	2.543	3.882
LF2	1.893	2.395	2.348	1.705	1.705	1.685	1.626	2.510	3.935	2.422	1.823	3.516
Hombres Japón												
PL	25.126	11.448	6.302	3.864	5.027	5.868	5.862	5.705	6.806	2.612	6.508	6.556
BL	23.470	19.414	9.999	5.912	6.569	5.245	8.763	6.037	6.963	2.750	7.546	6.835
LF1	1.602	3.530	3.007	5.082	5.048	5.048	5.061	3.588	33.147	3.124	2.893	5.082
LF2	1.699	2.987	2.707	0.957	0.957	0.928	0.954	2.736	4.106	2.817	1.116	0.941

■ **Tabla 2** Comparación entre funciones de pérdida (LF) y modelos, 2020. Elaboración propia. Nota: “-” indica que no se alcanzó convergencia.

Todas las combinaciones entre funciones de pérdida y modelos se muestran en la Tabla 2 (en el Anexo se tienen las estimaciones de los parámetros de manera correspondiente). Se puede apreciar que los mejores ajustes se logran por medio de la aplicación de los modelos (2), (3) y Kostaki. Estas mejores estimaciones se toman en consideración para realizar su comparación con las producidas con el método SCyS. Para este fin se calibran los siguientes parámetros, teniendo presente lo siguiente. Se nota una mayor variabilidad en el segundo segmento, por lo que se le fija de manera similar a la que se ha impuesto en entornos de una alta mortalidad por muertes violentas como en el caso mexicano en 2010. Además, se aprecia una variabilidad menor en el tercer segmento. Ante estas características se impone $S_2\% = 75\%$ y $S_3\% = 65\%$, y se dejan libres tanto la del primer segmento como la del global, dando como resultado $S_1\% = 54.50\%$ y $S\% = 66.50\%$, respectivamente. De este modo, dados los puntos de corte de manera exógena $N_1 = 11$ y $N_2 = 35$, los parámetros de suavizamiento calibrados toman los valores: $\lambda_1 = 0.85$, $\lambda_2 = 4.31$ y $\lambda_3 = 1.61$. Es importante tener presente que el año en cuestión, o sea 2020, corresponde a un año de pandemia en el que los países tomados en cuenta tienen un patrón de mortalidad marcadamente distinto al mexicano, tal y como se verá más adelante.

Figura 1 Estimaciones de curvas de mortalidad del Reino Unido, 2020 (panel superior mujeres, inferior hombres). Nota: las bandas definidas por las líneas rojas brindan intervalos de ± 3 desviaciones estándar del error.

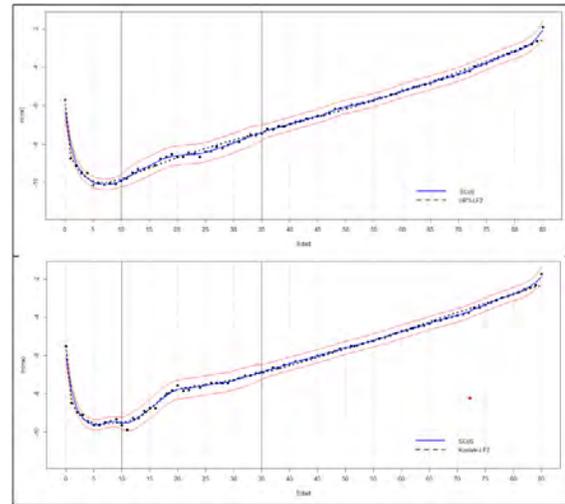
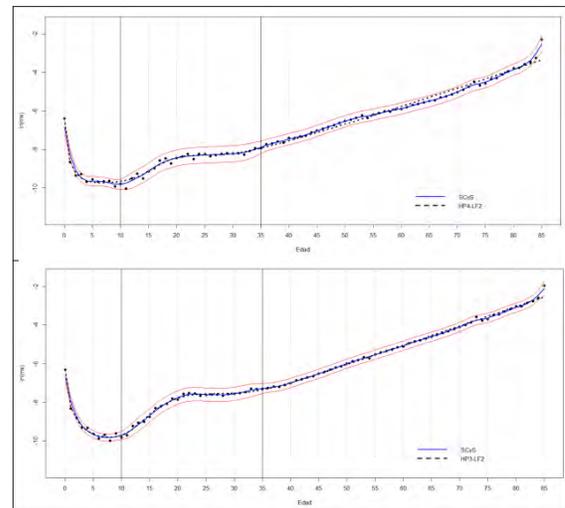


Figura 2 Estimaciones de curvas de mortalidad de Japón, 2020 (panel superior mujeres, inferior hombres). Nota: las bandas definidas por las líneas rojas brindan intervalos de ± 3 desviaciones estándar del error.



Al comparar las mejores estimaciones alcanzadas me-



diante la búsqueda exhaustiva entre los doce modelos paramétricos, se tiene que el método de SCyS presenta un desempeño notable. De acuerdo con la Tabla 3 que ilustra los resultados por sexo, en todos los casos se tienen menores RSEs. Aunque se podría afirmar que para el caso de la población de hombres del Reino Unido, se tienen prácticamente los mismos resultados. Es de llamar la atención el caso de la población de mujeres de Japón, donde el SCyS tiene una reducción de 36.86%. Al calcular el promedio de los porcentajes de reducción para el RSE, se tiene que es del orden de 15.84%, lo cual desde nuestro punto de vista no es nada despreciable. De igual manera se aprecian mejoras sustantivas en el resto de las Funciones de pérdida utilizadas.

Población	RSE		% Cambio	LF1		% Cambio	LF2		% Cambio
	MP	SCyS		MP	SCyS		MP	SCyS	
Mujeres Reino Unido	1.260	1.124	10.75	1.197	1.324	-10.68	1.586	1.265	20.35
Hombres Reino Unido	1.117	1.113	0.39	1.103	1.272	-15.27	1.246	1.239	0.77
Mujeres Japón	1.626	1.027	36.86	1.473	1.069	27.40	2.645	1.054	60.13
Hombres Japón	0.928	0.784	14.48	0.854	0.818	4.18	0.862	0.630	26.87

■ **Tabla 3** Comparación entre los RSEs y Funciones de pérdida provenientes de los modelos paramétricos y de SCyS: Reino Unido y Japón, 2020. Elaboración propia. Nota: MP-Modelo paramétrico respectivo.

Contraste de enfoques para el caso de México: 2015 y 2020

Una razón por la cual se decidió analizar de manera separada a México fue debido al hecho de que tiene una variabilidad distinta al resto de los otros dos países estudiados previamente. Haciendo una medición de la misma, se tiene que Reino Unido y Japón tienen unas desviaciones estándar para mujeres y hombres respectivamente de 0.021 y 0.027; y 0.013 y 0.021. En contraste, en México son de 0.023 y 0.026 en 2015, así como 0.023 y 0.031 en 2020. Se observa, como es de esperarse al ser otro contexto, que la variabilidad mexicana es mayor en términos numéricos. En efecto, la de las mujeres mexicanas supera a la de sus símiles, mientras que la de los hombres en 2015 es similar a la del Reino Unido en tiempo de pandemia, y la mexicana de hombres en tal momento es la mayor de todas las registradas.

Como en el caso anterior, en la Tabla 4 se tienen las 96 estimaciones de los modelos paramétricos para el caso de México por sexo y en los dos años antes mencionados. En particular, los valores de los parámetros calculados, que minimizan las respectivas funciones de pérdida, se pueden encontrar en la sección de Anexos. Nuevamente se pone de manifiesto la supremacía de los modelos (3) en tres ocasiones, así como el de Kostaki en una. Debe re-



LF	T	W	S	HP	HP2	HP3	HP4	RP	M	C1	C2	K
Mujeres 2020												
PL	9.309	3.914	3.737	-	2.661	1.226	2.312	2.456	4.772	1.850	1.807	1.266
BL	10.627	4.001	2.377	-	2.626	2.812	1.901	2.367	4.779	1.916	1.913	3.045
LF1	1.756	2.742	2.170	1.204	1.204	1.204	1.193	2.508	4.708	1.676	1.650	1.203
LF2	1.734	2.720	1.642	1.177	1.177	1.176	1.166	1.806	3.614	1.624	1.510	1.176
Hombres 2020												
PL	3.171	5.247	3.048	1.937	1.935	1.293	1.478	3.197	5.636	3.168	2.845	1.809
BL	3.306	5.392	4.801	1.808	1.805	2.072	1.552	3.432	5.477	3.132	3.358	1.819
LF1	2.344	3.159	3.362	1.630	1.629	1.403	1.192	3.599	31.094	3.582	1.805	1.370
LF2	2.116	2.797	2.883	1.573	1.572	1.364	1.168	3.888	4.528	3.039	2.817	1.336
Mujeres 2015												
PL	10.367	4.697	2.019	2.028	1.956	1.873	1.441	2.181	5.292	2.635	0.973	1.864
BL	11.060	4.876	1.906	-	2.217	1.916	1.607	2.440	5.437	2.491	1.043	1.988
LF1	1.359	2.626	3.441	0.635	0.635	0.602	0.664	1.436	4.212	1.778	1.741	2.573
LF2	1.320	2.624	4.070	0.629	0.629	0.597	0.597	1.795	3.671	1.716	1.732	0.628
Hombres 2015												
PL	10.312	3.476	3.479	4.162	4.160	4.160	4.158	3.517	6.241	2.974	1.884	0.750
BL	18.604	3.683	2.813	1.374	1.376	1.276	4.126	3.434	6.296	3.059	2.070	0.873
LF1	1.646	3.032	2.935	0.788	0.788	0.778	0.776	3.000	5.409	3.187	1.249	0.561
LF2	1.592	2.797	2.641	0.781	0.781	0.769	0.767	2.594	4.519	2.788	2.778	0.556

■ **Tabla 4** Comparación entre Funciones de pérdida y modelos para el caso de México. Elaboración propia. Nota: “-” indica que no se alcanzó convergencia.

cordarse que los métodos paramétricos son de aplicación universal, exista o no un evento pandémico, lo cual es otro aspecto distintivo en relación de lo que puede hacer que el analista se decida por efectuar la estimación de las curvas de mortalidad de manera más específica con el SCyS. El siguiente paso consiste en elegir los parámetros apropiados para estimar tales curvas por medio este enfoque.

Para aplicar el método SCyS, para el caso de México, se tiene otra particularidad que se debe tener en cuenta. Ésta consiste en que el 2020 resultó ser un año altamente distinto a los predecesores, particularmente en los niveles de mortalidad. En breve, como consecuencia directa o indirecta por COVID-19, se ha cuantificado un exceso de mortalidad, acompañado de un desajustamiento de la curva de mortalidad, que representa entre otras cosas un retroceso en expectativa de vida equivalente a 30 años (para más detalles véase, [García and Beltrán \(2021\)](#)). Por ello, se puede observar que en el tercer segmento en 2020, se tiene una mayor dispersión de las tasas para ambos sexos en torno a la tendencia, en relación a las de 2015. Ahora bien, los puntos de corte que se utilizan son $N_1 = 10$ y $N_2 = 36$. Los parámetros impuestos son: $\lambda_1 = 0.3$, $\lambda_2 = 1.38$, $\lambda_3 = 0.98$, mismos que fueron calibrados al imponer una suavidad de los dos últimos segmentos de $S_2\% = 65\%$ y $S_3\% = 60\%$, y en función de ellos se cuantifica la suavidad global y la del primer segmento, siendo estas de $S_1\% = 41.38\%$, así como $S\% = 59.39\%$. En las Figuras 3 y 4 se ilustran los ajustes por sexo.

Figura 3 Estimaciones de curvas de mortalidad de México, 2020 (panel superior mujeres, inferior hombres).

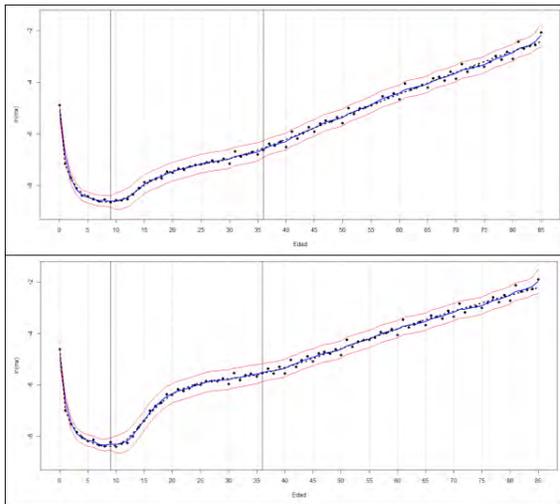
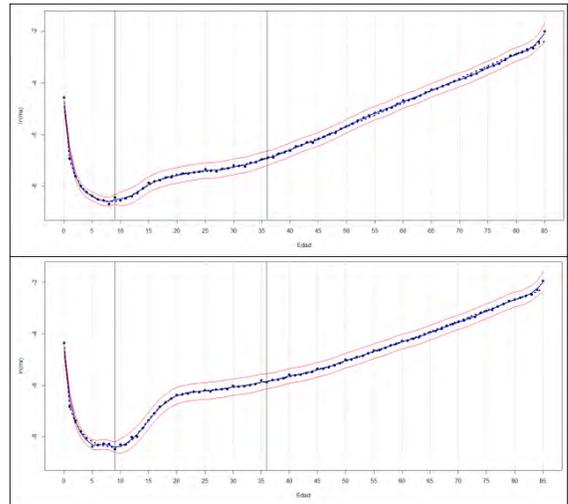


Figura 4 Estimaciones de curvas de mortalidad de México, 2015 (panel superior mujeres, inferior hombres).



Los resultados pueden verse en la [Tabla 5](#).

Población	RSE		% Cambio	LF1		% Cambio	LF2		% Cambio
	MP	SCyS		MP	SCyS		MP	SCyS	
Mujeres 2015	0.597	0.484	18.83	0.557	0.513	7.93	0.356	0.234	34.12
Hombres 2015	0.556	0.549	1.28	0.532	0.595	-12.11	0.309	0.301	2.55
Mujeres 2020	1.166	1.041	10.71	1.167	1.061	9.06	1.359	1.094	20.27
Hombres 2020	1.168	1.051	9.98	1.160	1.074	7.39	1.364	1.106	18.96

■ **Tabla 5** Comparación entre los RSEs y Funciones de pérdida provenientes de los modelos paramétricos y de SCyS: México, 2015 y 2020. Elaboración propia. Nota: MP-Modelo paramétrico respectivo.

Una vez realizadas las estimaciones, ambas comparables por tener exactamente los mismos parámetros de suavizamiento, se tienen varios hallazgos interesantes. Se registra una reducción del RSE y de las respectivas Funciones de pérdida casi de manera sistemática. En efecto, algunos son tan sustanciales que son cercanos al 100%. Por otra parte, en contados casos el error producido al utilizar el modelo paramétrico es menor que aquel inducido vía la aplicación del SCyS. Por último, se tiene que en general, las mejoras para ambos sexos y años se pueden observar específicamente tanto en el primer, como en el tercer segmentos.

5. CONCLUSIONES

La modelación de la mortalidad ha sido un interés permanente en los especialistas en la materia a través del tiempo. Generalmente, los modelos han sido propuestos teniendo en consideración la necesidad de estimar el fenómeno de la mortalidad con datos que se tienen al alcance, lo que casi siempre coincide con datos de países del primer mundo. No obstante, algunas propuestas no son del todo universales cuando se trata del estudio de la mortalidad bajo otros contextos, como por ejemplo donde haya exceso de mortalidad por violencia en edades jóvenes o como consecuencia de una pandemia como lo representa el caso de México.

Se considera que, para poder tener buenas estimaciones de la mortalidad, las fórmulas de los modelos pueden



someterse a entornos distintos a los que les dieron su primigenia validez. Con ello el principio de universalidad podría ser una aspiración permanente en la modelación. Es indiscutible la importancia que implica tener estimaciones cada vez más precisas de mortalidad, pues en el sector asegurador es de vital necesidad tener suficiencia de primas para hacer frente a las posibles obligaciones. También lo es tener en mente, la necesidad de contar con estimaciones que se puedan realizar con relativa celeridad, pues ante situaciones catastróficas como la actual, sería oportuno reestimar la mortalidad, tanto para la población asegurada como para aquella potencialmente por asegurar.

Se llega a la conclusión de que el método de SCyS es una alternativa que representa una herramienta capaz de incrementar las precisiones de las estimaciones de mortalidad. Asimismo, los intervalos de estimación se consideran un buen termómetro para validar si se requiere o no ajustar la mortalidad en función de una nueva dinámica. Es decir, si las observaciones no pertenecen a los intervalos de la estimación en determinado porcentaje preestablecido, entonces se piensa que sería oportuno un reajuste de la mortalidad. Otra ventaja de dichos intervalos es que, por medio de las estimaciones, se pueden calcular de manera casi inmediata, con otra librería de R por ejemplo, los intervalos correspondientes a las respectivas expectativas de vida. Ésta es una particularidad que ningún modelo paramétrico permite. En el presente documento se ha ilustrado el potencial del método de SCyS e incluso su superioridad respecto a los modelos paramétricos, en diferentes casos analizados de México y de otros países del mundo.

REFERENCIAS

- AMIS, 2021a Reporte de casos covid-19 en población asegurada. Asociación Mexicana de Instituciones del Seguro Consulta: 09-11-2022. Recuperado de [aquí](#).
- AMIS, 2021b Reporte de casos covid-19 gastos médicos [en línea]. Asociación Mexicana de Instituciones del Seguro Consulta: 09-11-2022. Recuperado de [aquí](#).
- Carriere, J. F., 1992 *Parametric models for life tables*, volume 44. Transactions of the Society of Actuaries.
- Debón, A. and F. Montes, 2008 Modelling and forecasting mortality in Spain. *European Journal of Operational Research* **189**(3): 624–637., Consulta: 09-11-2022.
- DeMoivre, A., 1725 *Annuities upon lives, or The valuation of annuities upon any number of lives, as also, of reversions: to which is added, an appendix concerning the expectations* of life, and probabilities of survivorship. London printed and Dublin re-printed, by and for Samuel Fuller..
- Forfar, D. O., 2006 Mortality laws. *Encyclopedia of actuarial science* **2**, Consulta: 09-11-2022.
- García, V. and H. Beltrán, 2021 Heterogeneity in excess mortality and its impact on loss of life expectancy due to covid-19: Evidence from Mexico. *Canadian Studies in Population* **48**(2): 165–200., Consulta: 09-11-2022.
- Guerrero, V. M. and E. Silva, 2015 Smoothing a time series by segments of the data range. *Communications in Statistics-Theory and Methods* **44**(21): 4568–4585., Consulta: 09-11-2022.
- Heligman, L. and J. H. Pollard, 1980 The age pattern of mortality. *Journal of the Institute of Actuaries* **107**(1): 49–80., Consulta: 09-11-2022.
- Huang, F., R. Maller, and X. Ning, 2020 Modelling life tables with advanced ages: An extreme value theory approach. *Insurance: Mathematics and Economics* **93**: 95–115., Consulta: 09-11-2022.
- Karlis, D. and A. Kostaki, 2002 Bootstrap techniques for mortality models. *Biometrical Journal: Journal of Mathematical Methods in Biosciences* **44**(7): 850–866, Consulta: 09-11-2022.
- Kostaki, A., 1992 A nine-parameter version of the Heligman-Pollard formula. *Mathematical population studies* **3**(4): 277–288., Consulta: 09-11-2022.
- Martinelle, S., 1987 *A generalized Perks formula for old-age mortality*. R and D report. Statistics Sweden. Statistiska Centralbyrån, Stockholm.
- Pascariu, M. D., 2018 *Modelling and forecasting mortality*. Denmark: Print and Sign, SDU.
- Remund, A., C. Camarda, and T. Riffe, 2018 Analyzing the young adult mortality hump in r with morthump. documento de trabajo, (2018-003) Consulta: 09-11-2022.
- Rogers, A. and F. Planck, 1983 Model: A general program for estimating parametrized model schedules of fertility, mortality, migration, and marital and labor force status transitions. Consulta: 09-11-2022.
- Siler, W., 1979 A competing-risk model for animal mortality. *Ecology* **60**(4): 750–757, Consulta: 09-11-2022.
- Silva, E., V. M. Guerrero, Y. Jacinto Cruz, and E. Rodriguez Soler, 2022 Csmoothing: a web-tool for controlled smoothing by segments of mortality data. *Communications in Statistics - Simulation and Computation* **0**: 1–15.
- Thiele, T. N., 1871 On a mathematical formula to express the rate of mortality throughout the whole of life, tested by a series of observations made use of by the Danish life insurance company of 1871. *Journal of the Institute of Actuaries* **16**(5): 313–329, Consulta: 09-11-2022.



Wittstein, T., 1883 The mathematical law of mortality. Journal of the Institute of Actuaries **24(3)**: 153–173, Consulta: 09-11-2022.

A. ANEXO

Parámetros estimados, modelo paramétrico y función de pérdida (LF) correspondientes Para la *población femenina de Reino Unido*, (2) con $LF2 = 1.266$ y los parámetros $A = 2.00e - 04, B = 1.86e - 02, C = 1.039e - 01, D = 2.241e + 139, F = 2.663099e + 131, G = 0.00$ y $H = 1.32e + 01$.

Para la *masculina* con Kostaki, $LF2 = 1.117$ con $A = 0.0002, B = 0.0234, C = 0.1153, D = 0.0003, E1 = 4.2206, E2 = 0.0844, F = 20.7402, G = 0.00$ y $H = 1.1049$.

Para la *población femenina Japonesa* con (3) y $LF2 = 1.626, A = 2.00e - 04, B = 0.1148, C = 0.1431, D = 0.0001, E = 11.0584, F = 21.5406, G = 0.00, H = 1.0246$ y $K = 1.2709$.

Finalmente, para la *población masculina* de este país, con (2) y $LF2 = 0.928, A = 0.0003, B = 0.1591, C = 0.1361, D = 3.89, D = 0.0003, E = 6.4606, F = 23.1386, G = 0.00, H = 1.1053$ y $K = 0.00$.

Para las *mujeres mexicanas en 2020*, se tiene (3), $LF2 = 1.166, A = 0.0008, B = 0.0440, C = 0.1231, D = 0.0003, E = 6.64e - 01, F = 21.9457, G = 0.00, H = 1.1827$ y $K = 0.8731$.

Para los *hombres*, (3), $LF2 = 1.168$, se tiene $A = 0.0009, B = 0.0182, C = 0.1038, D = 0.0018, E = 5.7407, F = 25.9448, G = 0.00, H = 4.8703$ y $K = 0.4500$.

Para el *sexo femenino en 2015*, (3), $LF2 = 0.597, A = 0.0010, B = 0.0678, C = 0.1568, D = 0.0002, E = 5.9027, F = 20.3713, G = 0.0001, H = 1.0315$ y $K = 1.2238$.

Para los *hombres* de tal año, dado Kostaki, $LF2 = 0.556$, se tiene que $A = 0.0010, B = 0.0361, C = 0.1372, D = 0.0015, E1 = 2.7650, E2 = 0.2983, F = 22.8249, G = 0.0001$ y $H = 1.0935$.



Eliud Silva es profesor-investigador de la Facultad de Ciencias Actuariales de la Universidad Anáhuac México. Es actuario por la UNAM, con maestría en Demografía por El Colegio de México y doctorado en Ingeniería matemática por la Universidad Carlos III de Madrid. Actualmente imparte

cursos de licenciatura y posgrado. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores, Nivel I, y ha ganado diversos premios de investigación tales como el Premio Nacional de Investigación en Actuaría 2022 y Premio Gustavo Cabrera 2010 de El Colegio de México. Sus líneas de investigación se centran en temas donde se vinculan la Estadística y la Demografía. En particular le interesa realizar inferencias por medio de modelos estadísticos aplicados en fenómenos sociales en México.

Víctor M. Guerrero Guzmán es Actuario por la UNAM, Maestro y Doctor en Estadística por la Universidad de Wisconsin-Madison. Desde 1990 ha sido Profesor-Investigador de Tiempo Completo en el Departamento de Estadística del ITAM, del cual fue Jefe de 1997 a 2004 y actualmente es Profesor Emérito. Fue Presidente de la Asociación



Mexicana de Estadística 1995-1997, del Inter-American Statistical Institute 2006-2008 y Director del International Institute of Forecasters 2004-2012. Ha sido asesor para instituciones nacionales (como el INEGI) e internacionales (como el Harvard Institute for International Development). Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores con nivel III y ha ganado diversos premios de investigación, como el Premio Nacional de Investigación en Actuaría 2022, Premio de Investigación Financiera IMEF-Ernst and Young en 2011, 2014 y 2015, Premio Gustavo Cabrera 2010 del Colegio de México, Premio de Pensiones 2007 de la CONSAR, Certamen Permanente de Investigación del Banco de Guatemala 1999-2000 y el Premio de Investigación en Seguros y Fianzas 1994.





Anáhuac
México

La Facultad de Ciencias Actuariales y el Colegio Nacional de Actuarios te invitan a participar como **expositor** en las:



JORNADAS DE ACTUARIZACIÓN



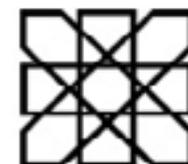
Vale por horas de Educación Continua del CONAC

El tercer miércoles de cada mes



Facultad de Ciencias Actuariales

Informes:
Dr. Daniel López Barrientos
daniel.lopez@anahuac.mx
anahuac.mx/mexico



COLEGIO NACIONAL DE ACTUARIOS

DATA ANALYTICS

Actuaría & Finanzas
www.actuariayfinanzas.net

- PREDICTIVE MODELLING
- DATA VISUALIZATION
- STORYTELLING

Contacto:

webmaster@actuariayfinanzas.net



55 8055 4463



Silver
Business
Partner





MAESTRÍA EN **ESTADÍSTICA**

OBJETIVOS:

Formar especialistas con profundo conocimiento de la teoría estadística, capaces de explotar con eficiencia los recursos computacionales para el análisis de la información, que apoyen los procesos de toma de decisiones y que propongan soluciones efectivas a los problemas derivados de la incertidumbre y el riesgo, en contextos académicos y profesionales.

Además, formar estadísticos aplicados cuya formación humana garantice su integración efectiva en equipos multidisciplinarios de trabajo y que, a partir de su liderazgo, faciliten el alcance de metas y objetivos planteados. Esto con apego estricto a los principios de la ética profesional.

Modalidad: Presencial

Duración: Ocho trimestres

Plan de estudios

	PRIMER TRIMESTRE	SEGUNDO TRIMESTRE	TERCER TRIMESTRE	CUARTO TRIMESTRE	QUINTO TRIMESTRE	SEXTO TRIMESTRE	SÉPTIMO TRIMESTRE	OCTAVO TRIMESTRE
MATERIAS	Taller de visualización y análisis de la información	Probabilidad II	Inferencia estadística: prueba de hipótesis	Análisis de regresión	Estadística multivariada: reducción de la dimensión	Seminario de Investigación en ciencias exactas I	Seminario de Investigación en ciencias exactas II	Seminario de Investigación en ciencias exactas III
	Probabilidad I	Inferencia estadística: estimación paramétrica	Electiva profesional	Análisis de series de tiempo, económicas y financieras	Electiva profesional	Electiva profesional	Electiva multidisciplinar	Consultoría estadística
	Algoritmos y programación	Algoritmos numéricos	Electiva de formación Anáhuac	Electiva multidisciplinar	Electiva profesional	Electiva profesional	Electiva de formación Anáhuac	
	Taller de análisis de regresión							

Ventajas de este programa



Plan de estudios flexible que permite al estudiante elegir materias en diversas áreas del conocimiento.



Materias optativas multidisciplinarias que facilitan el desarrollo de aplicaciones en las áreas del conocimiento.



Solidez de conocimientos que permite al egresado iniciar con éxito cualquier proyecto de formación académica relacionado con la estadística y la ciencia de datos.



Competencias profesionales que potencian el desarrollo profesional en cualquier actividad relacionada con la estadística y el análisis de la información para la toma de decisiones.

Requisitos de admisión



1. Llenar la solicitud de admisión, la cual será proporcionada por la Universidad, de forma física o electrónica

2. Entrevista con el coordinador académico de la maestría. Es necesario solicitarla previamente.



3. En caso de ser admitido, recibirás la carta de bienvenida al programa.

4. Una vez admitido, deberás tramitar tu correo electrónico institucional, realizar tu inscripción y dar de alta las materias correspondientes en el sistema.



Posgrados
Anáhuac

Coordinación académica:
Dr. Carlos Cuevas Covarrubias
ccuevas@anahuac.mx

Informes:
Centro de Atención de Posgrado y Educación Continua

 55 54 51 61 77
55 79 18 21 59

posgrado@anahuac.mx

anahuac.mx/mexico/posgrados

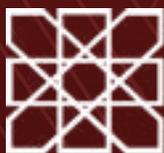
Facultad de
Ciencias Actuariales

GRANDES LÍDERES
Y MEJORES PERSONAS

PREMIO NACIONAL DE ACTUARÍA

Análisis, modelo y plan de negocio para el primer esquema freemium de asistencias y coberturas para el cuidado de la salud

CATEGORÍA DE STARTUP E INNOVACIÓN, SEGUNDO LUGAR



Análisis, modelo y plan de negocio para el primer esquema freemium de asistencias y coberturas para el cuidado de la salud

Iván David Vázquez Álvarez*,¹

*Núcleo Life

RESUMEN Este trabajo obtuvo el segundo lugar del Premio Nacional de Actuaría organizado por el Colegio Nacional de Actuarios A.C. El objetivo de este artículo es presentar una manera de adaptar el modelo de negocio Freemium a la industria de los seguros. Este modelo fue creado para atraer a los usuarios con un producto o servicio gratuito, adoptando una versión mejorada de pago. El video de la presentación puede verse [aquí](#).

Palabras clave

Freemium, Salud,
Seguros

ANÁLISIS CONTEXTUAL DE LA PERTINENCIA DE LA PROPUESTA DE VALOR Y MODELO DE NEGOCIO

Propuesta de valor y metodología del estudio

A través de este estudio se revisa la factibilidad conceptual, técnica y financiera de crear la primera oferta de protección freemium de amplio alcance para el sector asegurador.

Se aborda el estudio iniciando con la contextualización del sector asegurador, del modelo de negocio freemium y del área de oportunidad que ha generado la aceleración del proceso de transformación digital (consecuencia de

Derechos reservados © 2022 por el Colegio Nacional de Actuarios
Última actualización del manuscrito: 22 de diciembre de 2022
Este artículo es publicado por el Colegio Nacional de Actuarios (CONAC) y contiene información de una variedad de fuentes. Es un trabajo cuyo fin es únicamente informativo y no debe interpretarse como asesoramiento profesional o financiero. El CONAC no recomienda ni respalda el uso de la información proporcionada en este estudio. El CONAC no ofrece ninguna garantía, expresa o implícita, ni representación de ningún tipo y no asume ninguna responsabilidad en relación con el uso o mal uso de este trabajo.

¹ Correo electrónico: ivan.david.vazquez@outlook.com



la pandemia mundial de 2020).

En el segundo apartado se realiza el plan de negocio para este emprendimiento proponiendo una oferta de valor atractiva, prioritariamente digital, escalable y basada en los principios del modelo Lean Startup, de tal forma que se plantea la ruta de desarrollo de la oferta en fases, con productos mínimos viables que hagan parte de la esencia de esta compañía la escucha continua del usuario y asegurado. Asimismo, la aplicación de este modelo permite hacer crecer a la startup sin tener que exponerla a pérdidas justificadas en el deseo de lograr la mayor captación de usuarios posible.

A lo largo de este segundo apartado se detalla la propuesta de experiencia de usuario y el valor agregado que se crea, para todas las partes, al centrar el enfoque en el óptimo uso de herramientas digitales, así como el respeto a la coexistencia de canales de servicio tradicionales. Buscando con ello maximizar la satisfacción del cliente y minimizar los costos operativos.

Finalmente se logra concluir la factibilidad de la creación de la primer startup con una oferta freemium de protección para las operaciones de accidentes y enfermedades, así como en vida tanto para organizaciones como para individuos.



El seguro y la salud en México

El seguro

El seguro desde el punto de vista del individuo. La función principal del seguro es la creación de la contrapartida del riesgo, que es la seguridad. Este instrumento no disminuye la incertidumbre en cuanto a si el evento ocurrirá, ni altera la probabilidad de ocurrencia, pero sí reduce la pérdida financiera relacionada con el evento. Desde el punto de vista del individuo, la adquisición de una cantidad adecuada de seguro para una casa elimina la incertidumbre sobre una pérdida financiera en caso de que ésta se incendie. Por lo tanto, se define el seguro desde el punto de vista del individuo de la siguiente manera:

El seguro es un instrumento financiero mediante el cual el individuo intercambia un coste determinado y cierto (la prima) por la promesa de indemnización de una pérdida financiera incierta (la contingencia asegurada), en donde el monto pagado es igual o menor al valor de la pérdida.

El individuo puede creer que de alguna manera han desperdiciado su dinero en la compra de seguros si no se produce una pérdida y no se recibe una indemnización. Incluso se ha llegado a considerar que, si no han tenido una pérdida durante la vigencia de la póliza, su prima debería ser devuelta. Ambos puntos de vista constituyen falta de entendimiento. En relación con el primero, el contrato de seguro proporciona una valiosa característica en la liberación de la carga de la incertidumbre. Incluso si no se sufre una pérdida durante la vigencia de la póliza, el asegurado ha recibido algo a cambio de la prima: la garantía de indemnización si se hubiera producido una pérdida. Con respecto a la segunda, se debe de apreciar que el funcionamiento del principio de seguro se basa en las contribuciones un grupo amplio que paga las pérdidas de un grupo menor de desafortunados. Si las primas se devolvieran a los que no tuvieron pérdidas, no habría fondos disponibles para pagar las pérdidas de los que sí. El dispositivo de seguro es un método de distribución de pérdidas. Lo que sería una pérdida devastadora para un individuo se reparte de manera equitativa entre todos los miembros del grupo de asegurados, y es sobre esta base que el seguro puede existir.

El seguro desde el punto de vista de la sociedad. Adicionalmente a eliminar la exposición para el individuo mediante la transferencia, el seguro reduce la cantidad agregada de riesgo en la economía al sustituir ciertos costos por las pérdidas inciertas. Esos costos se evalúan sobre la base de las predicciones hechas mediante el uso de la ley de grandes números. De tal forma que se define:

“El seguro es un instrumento financiero que permite reducir y eliminar el riesgo mediante el proceso de agrupar un número suficiente de exposiciones homogéneas en un grupo para que la cuantía de las pérdidas sea previsible.”

El seguro no previene ni reduce las pérdidas para la economía en su conjunto. El seguro administra el riesgo, de tal forma que, sin importar el momento de ocurrencia de eventos no deseados, la sociedad pueda hacer frente de forma correcta a estos eventos.

El papel del seguro en la economía. Los bienes que son destruidos por una contingencia (asegurada) no son directamente reemplazados por la existencia de un contrato



de seguro. Es cierto que el monto indemnizado puede ser utilizado para reemplazar la propiedad, pero cuando una casa o edificio se quema, la sociedad ha perdido un bien que requiere sustituir. El seguro como medio se justifica al crear certeza sobre la carga financiera de las y al distribuir las pérdidas producidas. Al proporcionar un mecanismo a través del cual se pueden compartir las pérdidas y la incertidumbre es reducida, el seguro brinda tranquilidad a los miembros de la sociedad y genera certidumbre en los costos.

Los seguros también permiten una utilización óptima del capital. Sin la posibilidad de un seguro, los individuos y las empresas tendrían que mantener grandes fondos de reserva para hacer frente a los riesgos que deben asumir. Esta reserva estaría en forma de dinero en efectivo o se invertiría en instrumentos de bajo riesgo, líquidos y en esquemas de bajo interés. Esto sería un uso ineficiente del capital de una economía en su conjunto.

En contraparte, cuando se transfiere el riesgo a una institución administradora, las desviaciones de los resultados esperados se reducen al mínimo. Como consecuencia, los aseguradores están obligados a mantener reservas mucho más pequeñas en comparación a las que acumularían la suma de todos los individuos. Los fondos liberados están entonces disponibles para la inversión en actividades más productivas, lo que resulta en un ejercicio más productivo del capital (vea [p. 16-19] [Vaughan and Vaughan \(2014\)](#)).

El sector asegurador. El sector está conformado por instituciones que gestionan los riesgos en forma de contratos de seguros. El concepto básico del seguro es que por una parte el asegurador o aseguradora garantizará el pago de un evento futuro incierto. En contraparte el contratante (que en la mayoría de las veces es también el asegurado) paga una prima de monto menor al asegurador a cambio de la protección sobre un acontecimiento en específico que pudiera ocurrir en el futuro.

Como industria, el seguro es considerado por inversionistas como un instrumento seguro de lento pero constante crecimiento. Pese a que esta percepción ha evolucionado a través de los años, sigue siendo generalmente cierta cuando se la compara a los planes de ahorro y protección contra otros instrumentos en el mercado.

La industria de los seguros está compuesta por diversos tipos de actores que operan en diferentes espacios. Las compañías de seguros de vida se centran en la planificación del legado y en la sustitución la valía del capital humano, las aseguradoras de salud cubren los costes médicos y los seguros sobre los bienes (operación de daños

y daños-autos) tienen como objetivo sustituir el coste de un inmueble, los coches o los objetos de valor.

Las compañías de seguros pueden estructurarse como una sociedad anónima tradicional con inversores externos (compañías de seguros), o como sociedades mutuas en las que los asegurados son los propietarios (instituciones mutualistas de seguros) (vea [Berger et al. \(1997\)](#)).

El seguro en México

El seguro en México tiene sus inicios en el puerto de Veracruz, ciudad que a fines del siglo XVIII era vital para el comercio internacional. Por su nivel de actividad y por ser el punto de contacto de la Nueva España con el mundo (principalmente con la España peninsular) es que en el año de 1789 se constituyó en la primera compañía de seguros. La Compañía de seguros marítimos de Nueva España se fundó con el propósito de cubrir los riesgos, de los que se denominaba en aquella época, como la carrera de las Indias. Una de las condiciones que se estableció al fundarse, fue que ninguno de los socios o accionistas podría extraer de ella su capital hasta haber transcurrido cinco años. Así mismo, este lustro era el término fijado para la duración de la compañía. De dicha institución no queda ninguna evidencia, ni numérica, ni de las actividades desarrolladas. Se cuenta que la empresa fracasó después de pocos años, sin embargo, la Compañía de seguros marítimos de Nueva España daría paso al establecimiento de otras empresas y, en general, es la institución que inicio la actividad aseguradora en México. No sería hasta finales del siglo XIX que, con las primeras normativas, se daría pie a la organización e integración formal de las diversas labores aseguradoras; de tal forma que en 1870 se reguló el contrato del seguro dentro del Código civil y posteriormente en 1892 se promulgó la primera ley que rige a las compañías de seguros.

La fecha de inicio de la actividad aseguradora contemporánea se cita como el 26 de agosto de 1935, cuando se promulgó la ley general de instituciones de seguros. Dentro del nuevo marco normativo se dictó la necesidad de las instituciones de seguros de recibir una autorización de operación, se les sujetó a cumplir con criterios de solvencia más estrictos, se obligó a que las reservas fueran invertidas en el país y se habilitó la facultad de Estado de intervenir a las instituciones de seguros. Así mismo se decretó que los gobiernos en sus tres niveles (federal, estatal y municipal) habrían de dar prioridad para su aseguramiento a las aseguradoras de capital nacional. Las medidas de mexicanización del seguro no fueron bien recibidas por las compañías extranjeras que operaban en el país, las cuales, por todos los medios a su alcance, trata-



ron de obtener un trato y condiciones más favorables que las de sus homólogos nacionales. Ante la férrea decisión del Estado para hacer del seguro una actividad mexicana en beneficio del país, es que las aseguradoras extranjeras se retiraron del mercado. Bajo una nueva regulación y con un número reducido de participantes es que inicio el proceso de desarrollo del seguro mexicano.

El proceso de desarrollo del sector asegurador contemporáneo tiene su etapa de cambio más reciente a partir de 1988 cuando se da la apertura del sector y se liberaliza el sector. Al inicio de este periodo se establece la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF), se privatizan las instituciones de seguros paraestatales, se establece el Sistema de Ahorro para el Retiro y, de forma más reciente, la normativa mexicana adopta los pilares de la normatividad europea (Solvencia II). Vea (Minzoni-Consorti 2006, páginas 11-22 y 58-73).

Instituciones de seguros y fianzas. Al 31 de diciembre de 2019 el mercado de seguros y fianzas estaba conformado por 112 instituciones (101 de seguros y 11 de fianzas). Del total, 57 presentaban capital mayoritariamente extranjero con autorización para operar como filiales de instituciones financieras del exterior, de las cuales 7 estaban incorporadas a algún grupo financiero. Asimismo, de las 55 instituciones de capital mayoritariamente nacional, 10 pertenecían a algún grupo financiero. Al cierre de 2019, 14 compañías operaban de forma exclusiva vida, 62 contaban con autorización para operar no-vida y 36 podían operar de forma combinada seguros de vida y no-vida.



Del total, 37 son compañías especializadas: 11 son instituciones de fianzas, 8 especializadas en seguros de pensiones derivados de las leyes de seguridad social, 9 especializadas en el ramo de salud, 2 especializadas en el ramo de crédito a la vivienda, 1 especializada en el ramo de garantías financieras y 6 especializadas en seguros de caución.

Composición de la cartera. Al cierre de 2019, el sector asegurador contabilizó casi 600 mil millones de pesos en

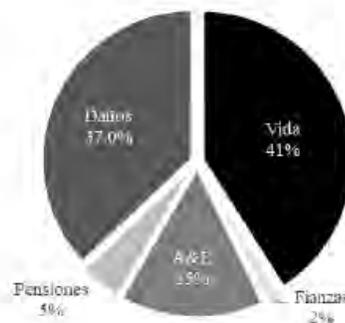


Datos fuente: SChP - Boletín de análisis sectorial: CNSF, 2020.

primas emitidas, con una alta concentración de primas en dos operaciones, vida y daños, mismas que generaron 78 % del total. En contraparte, las pensiones y las fianzas generaron la menor captación.

De forma detallada, 41 % de las primas corresponden a la operación de vida, un porcentaje similar a daños (todas las operaciones) con 37 %, la operación de accidentes y enfermedades generó una captación de primas del 15.6 % y con participaciones menores en comparación con el resto se ubicaron las pensiones (4.6 %) y fianzas (1.8 %).

Participación por Operación



Datos fuente: SChP - Boletín de análisis sectorial: CNSF, 2020.

Primas por operación (2019)

Concentración y participación del mercado. Al cierre de 2019, la concentración en el mercado de seguros y fianzas medido conforme el índice CR-5 (suma de las cinco instituciones de mayor volumen en términos de prima directa) se ubicó en 42.2 %. Dicho índice se conformó por la participación de los siguientes aseguradores: Grupo Nacional Provincial (GNP Seguros), MetLife México,



Operación	Primas directas (millones de pesos)	Participación de cartera (%)
Vida	243,178	41.0%
Pensiones	27,278	4.6%
Accidentes y enfermedades	92,231	15.6%
Daños	219,558	37.0%
Daños sin autos	104,462	17.6%
Autos	115,096	19.4%
Caucción	430	0.1%
Total seguros	582,245	98.2%
Total fianzas	10,640	1.8%
Total sector	592,885	100%

Datos obtenidos de **Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (2020)**.

Seguros BBVA Bancomer, Citibanamex Seguros y AXA Seguros. Así mismo, las 20 instituciones con más prima emitida generan cerca del 85 % del volumen del sector.

Por otra parte, el índice de Herfindahl se ubicó en 5.3% al cierre de 2019. Lo anterior implica que, a nivel general, el mercado de seguros y fianzas es un mercado relativamente competido. Sin embargo, al realizar el mismo análisis para los sectores de seguros y fianzas en forma separada se observa una mayor concentración en el mercado de fianzas. Vea (**Comisión Nacional de Seguros y Fianzas 2020**, p.3-7).

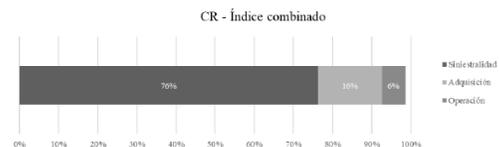
Primas por institución

N°	Compañía	Primas Directas (millones de pesos)	Participación de Cartera (%)
1	Grupo Nacional Provincial, S.A.B.	67,995	11.5%
2	Metlife México, S.A.	55,153	9.3%
3	Seguros BBVA Bancomer, S.A. de C.V.	47,054	7.9%
4	Citibanamex Seguros, S.A. de C.V.	39,962	6.7%
5	AXA Seguros, S.A. de C.V.	39,940	6.7%
TOP 5		250,104	42.2%
6	Qualitas, Compañía de Seguros, S.A. de C.V.	34,249	5.8%
7	Seguros Monterrey New York Life, S.A. de C.V.	30,259	5.1%
8	Mapfre México, S.A.	28,143	4.7%
9	Seguros Banorte, S.A. de C.V.	26,551	4.5%
10	Chubb Seguros México, S.A.	19,228	3.2%
TOP 10		388,534	65.5%
11	Seguros Inbursa, S.A.	18,506	3.1%
12	Seguros Atlas, S.A.	15,571	2.6%
13	Allianz México, S.A., Compañía de Seguros	15,427	2.6%
14	Pensiones Banorte, S.A. de C.V.	11,485	1.9%
15	Zurich Santander Seguros México, S.A.	10,926	1.8%
16	Profuturo Pensiones, S.A. de C.V.	9,303	1.6%
17	HDI Seguros, S.A. de C.V.	8,926	1.5%
18	Seguros Afirme, S.A. de C.V.	8,760	1.5%
19	Grupo Mexicano de Seguros, S.A. de C.V.	7,852	1.3%
20	Zurich, Compañía de Seguros, S.A.	7,460	1.3%
TOP 20		502,749	84.8%
RESTO (92)		90,136	15.2%
TOTAL (112)		592,885	100.0%

Datos obtenidos de **Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (2020)**.



Estructura de costos y estado de resultados. Al cierre de 2019, el costo medio de siniestralidad, de adquisición y de operación del mercado asegurador y afianzador en su conjunto se situaron en 76.3 %, 16.3 % y 6 %, respectivamente. De tal forma que el índice combinado (combined ratio – CR) se situó en 98.6 %, con lo cual al cierre del cuarto trimestre de 2019 el mercado de seguros y fianzas en su conjunto registró suficiencia en primas, con una diferencia de primas contra gastos de 1.4 %.



Datos obtenidos de **Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (2020)**.

Al cierre de 2019, el mercado de seguros y fianzas presentó una utilidad técnica de 16,080 millones de pesos, equivalente al 2.7 % de la prima emitida, generando una utilidad neta de 58,218 millones de pesos para el ejercicio.

Concepto	Resultado (millones de pesos)
Prima Retenida	491,165
Incremento neto de la reserva de riesgos en curso y de fianzas en vigor	85,165
Costo neto de adquisición	79,951
Costo neto de siniestralidad	309,969
Utilidad técnica	16,080
Incremento neto de otras reservas técnicas	1,277
Resultado de operaciones análogas y conexas	2,114
Gasto de operación netos	35,709
Utilidad de operación	-18,793
Productos financieros	95,279
Participación en el resultado de inversiones permanentes	3,804
Utilidad antes de impuestos	80,290
Utilidad del ejercicio	58,218*

Datos obtenidos de **Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (2020)**.

La salud privada en México

Dentro de prácticamente cualquier sistema de salud contemporáneo, los seguros juegan un papel importante como base para la administración de riesgos financieros y fomento de una sana competencia entre proveedores privados de insumos y servicios. En algunos países el seguro es la base fundamental del sistema de salud como

es el caso de Holanda o Alemania. En otras naciones, como es el caso latinoamericano, sirven para complementar a los esquemas públicos y de seguridad social; con sus ligeras particularidades y matices producto del contexto y circunstancias de cada país.

En México los servicios privados se han orientado a atender de manera primordial urgencias médicas y atender enfermedades de alto costo. En el primer caso, gran parte de la población hace uso del sistema de salud privado dada la urgencia y gravedad del evento, motivado principalmente por la percepción generalizada de una lenta y deficiente atención provista por parte del sistema de salud público. En el segundo caso, los usuarios principales son los clientes de Instituciones de Seguros y las familias pertenecientes a los segmentos de la población de mayor ingreso.

Es deseable para cualquier nación que el sector asegurador evolucione enmarcado bajo la premisa del bienestar de la población y la sustentabilidad financiera del sistema de salud en su conjunto.

En México existe una aún deficiente cultura de prevención, sin embargo, no se debe perderse de vista que existen zonas rurales con acceso limitado a servicios de calidad, que aunado a un bajo nivel de educación limitan el alcance de estrategias e intervenciones en salud y consecuentemente impiden la penetración de la oferta de salud privada del sector asegurador.

En contraparte las zonas urbanas cuentan con mejor infraestructura médica, tanto pública como privada. Sin embargo, el sistema de salud pública está limitado a la capacidad presupuestal del estado. El sistema privado vive un estado de dualidad, en donde por una parte se cuenta con tecnología avanzada y un servicio preferente al que solo puede acceder una pequeña proporción de la población dado el costo que implica. La contraparte de este sistema privado es una densa oferta privada de servicios de bajo costo, casi exclusivamente enfocados en atención de primer nivel (consulta general) que atiende a la población de la base de la pirámide.

En México, los Seguros de Gastos Médicos, Accidentes Personales y Salud representan cerca del 15 % del valor total del sector. El número de aseguradoras se ha triplicado desde 1990, pero su participación en el total de primas captadas en Latinoamérica ha bajado de 24 % a 15 % del total de la región. Aunque la penetración del sector como proporción del producto interno bruto se ha duplicado a lo largo de este periodo, el país cuenta con una penetración menor al 3 % contra un 4 % de Chile y un 3.1 % de Brasil; países que además han logrado consolidar el aspecto de administración de recursos para la salud.

En México, el gasto total anual en salud es cercano al 6 % de Producto Interno Bruto. Cerca de la mitad de este gasto proviene del bolsillo de las personas. El número de asegurados con los que cuenta este ramo representa alrededor del 6 % de la población de México. Vea (García Téllez 2019, páginas 34-35). En este contexto podemos considerar al pago de bolsillo por servicios de salud como reflejo de una sociedad con una insuficiente cultura del seguro.

A principios de este siglo, el ramo de los seguros de salud se constituyó como base para que organizaciones administradoras de medicina pre-pagada se convirtieran en Instituciones de Seguros Especializadas en Salud (ISES), a partir de modificaciones en la Ley General de Instituciones y Sociedades Mutualistas de Seguros (LGISMS). Actualmente, la participación de este ramo, en la operación de Accidentes y Enfermedades ronda el 1 %.

En el país existen áreas de oportunidad para un crecimiento ordenado y pertinente del sector, en beneficio de la población, para fortalecer la sustentabilidad financiera del sistema de salud y apoyar la viabilidad económica familiar.

El sistema de salud mexicano tiene frente a sí varios retos en aspectos demográficos, como lo son el envejecimiento y urbanización de la población; retos epidemiológicos como el avance de enfermedades crónicas degenerativas, la diabetes, hipertensión y cáncer, conjuntamente con la existencia de enfermedades respiratorias y digestivas; se evidencian retos financieros como la necesidad de elevar el nivel de ingreso de la población; estructurales como la necesidad de ampliar el acceso efectivo a servicios de calidad; e ideológicos como el reconocimiento de la salud como un proceso de responsabilidad de todos los actores del sector salud.

El aprovechamiento de recursos para fortalecer, mantener y mejorar la salud implica la integración del sector, una clara definición de roles entre los sectores público, privado y social; la oportunidad de desarrollar negocios pertinentes e innovadores; la factibilidad de acceder a servicios efectivos y competitivos, de clase mundial.

México tiene amplias oportunidades para contener el gasto catastrófico de forma ordenada y avanzar en los retos de acceso efectivo a servicios de calidad, a través de los seguros privados. Se requiere mayor flexibilidad y competitividad por parte de estos. El sector asegurador puede convertirse en el detonador de un sector salud de mayor consciencia y que impulse la estructuración de un sistema en donde el sector privado y público coexistan bajo un orden estratégico y armonioso.

Un reto que enfrenta todo sistema de salud, es que



las necesidades son muchas y los recursos son limitados, es por eso que toma especial importancia que la utilización de los servicios médicos se haga de una manera ordenada y racional, para esto deberán establecerse guías y protocolos de atención sobre las mejores prácticas médicas, diseñar y establecer esquemas de pago a proveedores que favorezcan la calidad y eficiencia (Pago por Desempeño), hacer que las personas participen con una parte del costo de los servicios médicos (Copagos), así como instrumentar un sistema de información clara, oportuna y transparente que permita medir los resultados del sistema en su conjunto, así como de cada uno de los principales actores.

Los pacientes deben dejar de ser pacientes y convertirse en personas proactivas, que haciendo uso de la información e indicadores puedan cuestionar y elegir a sus proveedores de salud. Un sistema que haga participar a las personas en el costo de sus servicios médicos a través de copagos, automáticamente hace que se haga una selección más cuidadosa e informada de los diferentes proveedores de la salud, promoviendo la competencia y eficiencia de los mismos. Esta participación debe ser suficientemente significativa para que la demanda de los servicios médicos sea racional e informada, pero también se debe evitar que pueda ser demasiado alta como para poner en riesgo el patrimonio y estabilidad financiera de las familias.

Aún más importante que todo, es evitar que las personas piensen que el gobierno o su aseguradora son los principales responsables de su salud y que si se enferman deberán atenderlo y “regresarle” su salud; sino hacer conciencia que el principal responsable es el individuo y que mediante sus hábitos de vida (alimentación, prevención, ejercicio, vida equilibrada en todos los sentidos, etc.), logrará mejores resultados en su calidad de vida que los que cualquier Sistema de Salud sea capaz de pueda ofrecer. Es por eso por lo que el paciente debe dejar de ser paciente y convertirse en el principal actor, seguido y respaldado por su Seguro o cobertura de Seguridad Social.

Modelo freemium

Modelo de negocio freemium

Freemium es un modelo de negocio basado en la creación y consumo de un producto o servicio gratuito. La forma de rentabilización del modelo es que a medida que el usuario realiza un consumo habitual o requiere de un servicio o producto más amplio, la empresa ofrece una opción pagada que tiene funcionalidades extra o

características más avanzadas.

Debido a la transformación digital y a que los consumidores son cada vez más exigentes, las empresas necesitan encontrar nuevos y diferentes modelos de negocio para ofrecer una experiencia satisfactoria al consumidor, ya sea de productos o servicios, o de información. De este modo, es posible garantizar la fidelidad de la audiencia y, por supuesto, generar una oferta superior a la de la competencia.

El concepto del modelo es atraer a los usuarios con un producto o servicio gratuito, para ganar su confianza y preferencia, para poder facilitar la adopción de una versión mejorada de pago.

“Freemium es la combinación de las palabras en inglés “free” (libre o gratis) y “premium” (que da la idea de ser algo de mejor calidad o más exclusivo). De forma práctica, se trata de un modelo de negocio que ofrece un servicio y/o producto gratuito que pasa a ser de paga para aquellos que desean o requiere de características, funcionalidades y/o beneficios adicionales o más avanzadas.”

El concepto freemium es acuñado en 2006 con el inversionista estadounidense Fred Wilson, que escribe en su blog sobre inversiones, internet y nuevas tecnologías. El concepto que planteaba era un modelo de negocios que generará una base de clientes amplia a través de un servicio gratuito y, de forma paulatina, mostrar las funcionalidades que se podían adquirir suscribiéndose a los paquetes pagados.

Planteó que el objetivo principal es mostrar, poco a poco, los beneficios de tener la opción pagada para ganar clientes a largo plazo, es decir, cualquier persona que estuviera interesada podría utilizar el producto o servicio sin necesidad de tener que comprar algo, sin embargo, solo aquellos que se contrataran un plan pagado tendrían acceso completo a las funcionalidades más avanzadas del objeto de la relación.

Es común que este modelo de negocio se confunda con la estrategia de ofrecer muestras gratuitas, sin embargo, las situaciones son completamente diferentes, ya que aquí el objetivo es fortalecer la relación con el cliente potencial hasta despertar la percepción de valor del uso del producto o servicio para, finalmente, lograr que el monto cobrado no sea reprobado por el usuario. Aunque el objetivo final es el mismo (ofrecer una experiencia para que el usuario se familiarice y conozca el producto o servicio) las muestras suelen tener un periodo de duración. Dentro del modelo freemium, el usuario que decide no pagar sigue disfrutando del producto o servicio sin un



plazo para terminar la relación o sin generar problemas con la empresa que lo ofreció.

El uso del freemium puede ser motivado por múltiples factores: desde la búsqueda de una mayor base de clientes potenciales hasta el aumento de la relevancia y credibilidad de tu marca dentro del mercado. Es importante señalar que no tiene sentido presentar al consumidor un servicio y/o un producto de baja calidad y creer que se interesará por una posible mejora (de paga). Ya que la experiencia con la marca será negativa y el resultado será contrario a lo deseado. Bajo este modelo el consumidor debe sentirse valorado por la empresa. Por lo tanto, se debe generar un equilibrio sostenible entre el beneficio de la empresa y la satisfacción del consumidor.

En aplicaciones o sitios web, añadir anuncios en la versión gratuita, suele ser una alternativa. Poco a poco, se demuestran al usuario los beneficios que puede obtener al migrar a la versión de paga.

Casos icónicos del modelo freemium.

- **Spotify:** El servicio ofrecido es el mismo para todos los usuarios, que pueden escuchar a sus artistas favoritos, crear listas de reproducción y escuchar los principales lanzamientos, pero los que no pagan son interrumpidos por anuncios y cuentan con funcionalidad limitada en orden de reproducción de piezas. En contraparte en el paquete premium (de paga), el usuario ya no es interrumpido por los anuncios y además puede descargar las canciones en su dispositivo para escucharlas incluso sin conexión. Spotify ofrece el mismo servicio para todos, sin embargo, aquellos que están dispuestos a contratar alguno de sus planes terminan contando con estas funcionalidades extra. La tasa de conversión del modelo de negocio freemium de Spotify (modelo que usualmente tiene una tasa inferior al 5% para los casos de éxito) ronda el 27%. Según información difundida por la propia plataforma en 2015, de los 75 millones de usuarios mensuales, 20 millones están suscritos a servicios premium.
- **DropBox:** Otra empresa que se destaca en este modelo es Dropbox, un SaaS (software as a service, software como un servicio) que ofrece un servicio de almacenamiento y compartimiento de archivos en línea. Basado en el concepto de nube, los usuarios pueden guardar, intercambiar y acceder a los documentos en cualquier lugar con acceso a Internet. Cualquier persona tiene derecho a 2 GB de almacenamiento gratuito. Sin embargo, para los que requieren más espacio de almacenamiento, la empresa ofrece

opciones premium, con planes dirigidos a personas y empresas. Cada uno tiene sus propias características, sin embargo, la gran diferencia al migrar a la versión de pago es el incremento en almacenamiento. Pese a tener competidores del volumen de Google y Microsoft, la empresa cuenta con una la tasa de conversión de alrededor del 4%.



Riesgos y desventajas	
Atraer a usuarios no adecuados	Insostenibilidad del Negocio
<p>La mayor desventaja del modelo freemium es que se expone a la empresa a atraer a clientes potenciales que no corresponden a la estrategia de mercado. Al ser un servicio o producto abierto a todo público y gratuito se pueden atraer a usuarios con características, expectativas y necesidades diferentes a las deseadas por la empresa.</p> <p>Cuando se ofrece algo gratis, muchos usuarios pueden aceptar la oferta simplemente por esa característica y no porque el producto o servicio pueda satisfacer alguna necesidad específica.</p> <p>A largo plazo, el mayor problema de la estrategia es no lograr generar una fuente de ingresos que garantice la sostenibilidad del negocio. Incluso si la base de usuarios es grande, si el número de clientes potenciales que avanzarán por el embudo de conversión es insuficiente, la empresa se puede enfrentar a no ser rentable.</p>	<p>Con usuarios no adecuados o con una estrategia poco eficiente de convencimiento para las conversiones, es probable que la empresa se convierta en un negocio insostenible. La sostenibilidad está relacionada con la construcción de una empresa capaz de generar ingresos para cumplir con sus obligaciones financieras y crecer.</p> <p>Por lo tanto, es necesario tener en cuenta todas las funcionalidades y argumentos que harán que los usuarios pasen de freemium a premium, en donde los usuarios vean el valor agregado por ser parte de una experiencia más profunda.</p> <p>Existen formas alternativas de monetizar un producto o servicio sin que el usuario pague por él, sin embargo, la mayoría de ellas tienden a comprometer la experiencia del usuario.</p>



Ventajas y beneficios		
Aumento del valor de la marca	Brinda más información para el consumidor	Mayor eficiencia que el esquema premium
<p>El principal beneficio del modelo es el aumento del valor de marca ya que se proporciona una experiencia gratuita y de calidad al usuario.</p> <p>Sin importar si el usuario se suscriba a un plan premium, se crea una relación más estrecha y saludable con un consumidor potencial. Se construye una relación de confianza y lealtad.</p>	<p>El modelo permite el acceso a los datos de comportamiento y del perfil de los usuarios. Tanto para estrategias de ventas y marketing digital, el aprovechamiento de esos datos suele ser extremadamente útil, lo que incrementa la probabilidad de conversión considerablemente.</p> <p>La recopilación de información genera insights (enfoces) no solo para las acciones de comunicación, sino también para identificar qué características premium pueden ser más atractivas para cada usuario.</p>	<p>Al ofrecer solo una pequeña muestra de lo que el usuario puede usar y limitar su uso, se requiere menos tiempo para presentar el producto y entender mejor lo que el público objetivo realmente quiere. Por lo tanto, el modelo freemium es más eficiente que el modelo único basado en la oferta de productos o servicios exclusivamente premium.</p> <p>Adicional a los beneficios de acercar la marca al consumidor (lo que puede facilitar la fidelización) y de crear acciones de marketing más eficientes, es más fácil lograr una conversión amigable en donde la propuesta de valor es clara para el usuario.</p>

Ventajas y beneficios		
Aumento del valor de la marca	Brinda más información para el consumidor	Mayor eficiencia que el esquema premium
<p>El Brand Awareness (reconocimiento de la marca) también aumenta, dado que a partir de la difusión de los servicios y/o productos, más personas conocen la marca y la ubican con mayor facilidad en relación con los competidores.</p> <p>El modelo permite que cada vez más consumidores disfruten de los beneficios de los productos o servicios, generando una gran fuente de usuarios atracción a la etapa inicial del del embudo de conversión o de ventas.</p> <p>Estos factores contribuyen a posicionarse como un referente dentro del mercado y destacar sobre la competencia. Véase Álvarez y otros, 2017, ojos de los consumidores.</p>		

Para minimizar los riesgos del modelo es necesaria la precisión en la oferta de valor. Se deben de seleccionar correctamente las funcionalidades y beneficios atractivos que formarán parte de la parte de pago, ello sin afectar la utilidad esencial del plan gratuito. A partir de las características de los usuarios y sus principales deseos (analizados en función del uso del producto o servicio), se identifican las demandas recurrentes y las potencialidades que serían indispensables para el modelo freemium, pero que solo están disponibles en el premium.

Una métrica utilizada para segmentar a los leads con potencial de calificación es la tasa de uso. Ya sea diaria o semanalmente, se define la frecuencia mínima y máxima de uso hasta que el modelo freemium deje de cumplir las expectativas de uso o la calidad necesaria para una buena experiencia. Con el tiempo y a medida que la base de usuarios crece, se debe de mantener una tasa de conversión viable y esto también depende del tiempo que los usuarios han utilizado los productos y servicios ofrecidos. Los usuarios más nuevos tienden a ver menos valor en la experiencia del consumidor, por lo que usualmente son más difíciles de convertir.

Las funcionalidades o beneficios deben estar equilibradas de manera que haya un valor claro en el producto premium y que el valor sea tangible para el usuario. Los límites impuestos al sistema freemium deben de ser razonables con el fin de no dañar irremediablemente la experiencia del cliente. El modelo freemium debe ser limitado, mientras que el premium debe ser extremadamente escalable.

El modelo freemium es, por tanto, una estrategia eficaz para empresas que quieren reforzar la presencia de la marca dentro de su segmento y, al mismo tiempo, estrechar lazos con los usuarios que pueden convertirse en clientes pagados, siempre que la estrategia esté bien definida y sea compatible con el negocio. <https://rockcontent.com/es/blog/freemium/>

Casos freemium en seguros

Actualmente alrededor del mundo no existe empresa que ofrezca un esquema freemium de seguros de forma integral. Resaltan 3 casos a nivel internacional, en donde la cobertura sin costo es ofrecida a través de un servicio ajeno al sector seguros, una cobertura sumamente específica o con pruebas de servicio que no contempla una cobertura tangible (telemetría). Sin embargo, aún es precario el aprovechamiento del modelo de negocio freemium y las oportunidades de negocio y penetración del mercado que esto puede generar.



SIMLE (Suiza) Con su nuevo modelo de negocio Freemium, Smile está haciendo un mayor uso de la gamificación, el contenido y los elementos de la comunidad en la aplicación de Smile (similar a su estrategia con con Smile Drive Coach, un servicio de la aplicación que ayuda a los usuarios a ser conductores más seguros y les recompensa con puntos en el proceso). Los usuarios también tienen acceso al nuevo marketplace, que contiene ofertas de socios del ecosistema Smile.

El producto de seguro de smile.shopping permite a los usuarios de su app en Suiza y Europa contra los riesgos financieros asociados a las compras online, como los artículos defectuosos o no entregados. El principal objetivo de la aseguradora es acercarnos y ganarnos la confianza de su grupo objetivo, y conquistarlo con experiencias positivas. El lema de la compañía es "más Smile para todos". Vea <https://www.insurtechinsights.com/smile-launches-the-insurance-industrys-first-freemium-model/>

Los usuarios pueden utilizar los seguros de smile.shopping de forma gratuita con solo proporcionar datos mínimos.



COVERCUBE (Estados Unidos de América) Covercube, es una versión gratuita de la aplicación UBI (pago basado en el consumo) que permite a los conductores probar la aplicación y su función de precios dinámicos sin compromiso. Al conducir con la aplicación, la aplicación señala a los automovilistas cuánto pueden ahorrar en el costo de la prima del seguro del automóvil al conducir de forma más inteligente y segura.

Covercube cuenta con más de 20 años de experiencia en la gestión del sector de seguros de responsabilidad civil, con énfasis en el crecimiento del canal de distribución de los intermediarios independientes. La fijación de



precios de CoverCube permite al intermediario competir con los transportistas cautivos y los escritores directos al ofrecer una alternativa a los métodos de fijación de precios usuales.

Cuando el usuario conecta la aplicación a su coche y comienza a conducir, obtiene información en tiempo real sobre su puntuación de nivel de riesgo y su consumo de energía. Como resultado, se pretende instruir al conductor en como influir positivamente en el costo de su seguro al adoptar un estilo de conducción más seguro.

MicroEnsure (Ghana) A través de una asociación entre Tigo (telecomunicaciones móviles) y Bima (aseguradora) es que MicroEnsure ofreció a los clientes de Tigo el denominado "seguro integrado", como un beneficio gratuito. Los usuarios reciben una cobertura de por fallecimiento sin costo y con una Suma Asegurada basada en la fidelidad del cliente, es decir los años que lleva utilizando el servicio móvil de la empresa de telecomunicaciones. El objetivo del seguro gratuito es crear lealtad a la marca Tigo y reducir la pérdida de clientes. Esta estrategia ha dado lugar a más de un millón de nuevos asegurados, el 80 % de las cuales nunca habían tenido la protección de un seguro.

Adicionalmente a la prestación gratuita incorporada, se ofrece la opción de duplicar la cobertura del seguro por una cuota mensual de GHC1 (0,52 dólares). De tal forma que se ofrece un nivel básico de servicio gratuito a muchos clientes con la esperanza de que algunos clientes pasen voluntariamente a un servicio de pago.

Sorprendentemente, Tigo ha visto cómo decenas de miles de clientes han pasado del seguro gratuito al producto de pago desde el lanzamiento del programa en febrero. Se ha apreciado que al ofrecer sin costo el seguro, se logra generar una mayor conciencia en las personas que se traduce en una mayor penetración de la cultura del seguro.

El seguro post-pandemia

Resiliencia y adaptabilidad. El sector asegurador está superando de forma satisfactoria el desafío que fue la pandemia del COVID-19. En su conjunto ha sido capaz de dar continuidad a su actividad en todo momento, respondiendo a las necesidades de los asegurados y generando iniciativas de beneficio común para la sociedad. De forma sobresaliente, lo ha logrado sin que los márgenes de solvencia y la rentabilidad de las compañías hayan sido afectados severamente, al punto que a lo largo de este periodo jamás se habló de una posible quiebra (o suspensión por parte del regulador) de alguna institución

de seguros en México. Sin embargo, ya se vislumbran desafíos en el horizonte. El sector asegurador está pasando por un periodo de evolución, con múltiples desafíos, como el cambio climático, el futuro de los seguros, los cambios tecnológicos o el ya palpable proceso de transformación digital del seguro y sus instituciones.

El sector habrá de hacer énfasis en su solidez financiera y en su proceso de digitalización, que habrán de ser los pilares fundamentales sobre los que se asentará el futuro. Lo largo de la reciente y más que prolongada pandemia hubo voluntad y capacidad de los diferentes actores para adaptarse a un escenario no previsto. Es evidente que se cuenta con un sector resiliente y flexible, preparado para mantener sus operaciones y evolucionar de forma apresurada en altamente disruptivo. En los próximos años veremos grandes esfuerzos por parte de las Instituciones de Seguros en transformación digital, desarrollo de nuevos productos y servicios y la mejora de procesos. Asimismo, indicó que la ciberseguridad y los riesgos climáticos seguirán cobrando protagonismo.

Se destaca la respuesta del sector ante la pandemia y el compromiso con los asegurados y con la sociedad, implicándose y aplicando de forma flexible las cláusulas de las condiciones generales, tomando decisiones que no eran evidentes ni sencillas. Uno de los desafíos que tendrá que asumir la industria aseguradora será la digitalización y la aplicación de inteligencia artificial en la previsión de servicios para los clientes. Aunque también representa una oportunidad. Puede conducir a una reducción de la asimetría de la información, incremento de la inclusión financiera, mejora de la cantidad y calidad de los servicios de ahorro e inversión, seguros con primas más accesibles y más a la medida de las necesidades de los asegurados e interesados.

La pandemia del COVID-19 ha servido para que el sector reconozca definitivamente el valor de la digitalización. Hasta la pandemia, existía la duda la indispensabilidad y rentabilidad de la transformación digital del sector. La crisis ha demostró que cualquier inversión en digitalización realizada sólo generará beneficios a partir de ahora, tanto para las instituciones, como para asegurados, clientes potenciales e intermediarios.

Las entidades fueron capaces de responder a la pandemia gracias a un esfuerzo de planificación y flexibilidad. En marzo de 2020, de forma súbita, la mayor parte de la población tuvo que estar en casa y todos los actores del sector lograron dar continuidad a las promesas plasmadas en las pólizas.

Los esfuerzos realizados en México para incorporar Solvencia II en el marco regulatorio y normativo se vie-

ron recompensados, ya que han permitido que el sector afronte con garantías un escenario tan complicado como el que vivimos el pasado año.

Uno de los principales retos actuales de las Instituciones es la orientación al cliente, ha pasado a estar en el centro de las estrategias y se posiciona como el motor de nuestra innovación. Es imprescindible conocer bien al asegurado para cubrir las necesidades que se van generando. La orientación al cliente está estrechamente ligada a la digitalización y la personalización, así como a la inclusión en las pólizas de más servicios de valor añadido, prestando especial atención a la prevención.

Lo que antes se creía que era posible hacer sólo físicamente, hoy hemos somos testigos de que si es posible realizarlo remotamente. No se podrá volver a trabajar exactamente igual que antes de la pandemia. La apuesta del sector es tomar lo mejor de ambos mundos para ir hacia un mundo híbrido, adaptando la forma de trabajar, los servicios ofrecidos, etc. Con el fin de continuar invirtiendo en mejorar la experiencia de los clientes y simplificando la relación.

La transformación ofrece una gran oportunidad para los intermediarios dado que ahora será posible aprovechar nuevas herramientas para asesorar y estar con el cliente cuándo y dónde lo necesite. La digitalización ha servido de apoyo para una mejora en la labor del intermediario ya que se han simplificado trámites administrativos y se han habilitado mecanismo y herramientas de autoservicio para el asegurado, liberando al intermediario del tiempo requerido para estas tareas, y facilitando que pueda atender mejor a sus clientes. Sin embargo, aún existe la necesidad de mejorar la digitalización de procesos para eficientizar el tiempo de todas las partes.

Otro aspecto relevante es la respuesta del sector al surgimiento de un nuevo cliente, más digital, y su convivencia con el cliente tradicional. La digitalización habrá de ser inclusiva. Hoy la distribución de seguros ya no es monocal, puesto que se puede combinar una atención en autoservicio y online para productos sencillos y un modelo híbrido o presencial para soluciones más complejas. El que ha de marcar el paso es el cliente. En los próximos años habrá muchos más clientes 100 % digitales, que van a demandar soluciones diferentes. Así mismo, se vislumbran nuevas formas de distribución basadas en datos. Vea <https://www.tendencias.kpmg.es/2021/04/mas-alla-de-la-pandemia-la-transformacion-del-sector-asegurador/>

Contratación de forma virtual. Una mejor digitalización y uso de los datos será clave para esta transformación, y en los canales de distribución de las aseguradoras, la



digitalización también será un tema clave. Si bien el mercado de venta directa al consumidor varía mucho según el país y la región, los aseguradores ya han comenzado a explorar o reabrir conversaciones en torno a la adopción de un enfoque más omni-canal en reconocimiento de la cambiante disposición de los clientes a realizar más transacciones en línea para temas relacionados a seguros.

En cuanto a la comunidad de agentes, la falta de cultura digital se ha hecho más evidente durante la situación de COVID-19. Alrededor del mundo se ha visto claramente que muchos agentes y despachos simplemente no están equipados para trabajar digitalmente o a distancia - especialmente en momentos de alto volumen y cuestiones complejas. Inclusive el proceso de cotización y presentación de propuestas, que actualmente es un proceso costoso para las aseguradoras, podría ser más racionalizado; una mejor digitalización del intercambio de datos podría contribuir a que el proceso fuera más sencillo y costeable para todas las partes interesadas.

En Asia, los agentes suelen trabajar mediante reuniones cara a cara con los clientes, que se vieron interrumpidas en su recorrido por el virus. En algunos países, la inactividad de los agentes y despachos fue tal que las aseguradoras tuvieron que analizar la posibilidad de conceder préstamos a muy bajo interés para ayudarles a seguir adelante o dar anticipos a comisión. La situación en Asia no se ha visto favorecida por el hecho de que en algunos países se sigan exigiendo firmas autógrafas. En Hong Kong y China se ha visto un crecimiento en el número de nuevos negocios, sin embargo, estos negocios no han podido iniciar vigencia hasta que se logren recabar las firmas.

Las aseguradoras de esa región y a nivel mundial solicitaron a los reguladores el uso de la firma digital. Este cambio habilitó nuevos modos de trabajo, con una paulatina migración de los procesos a digital, incluida una suscripción más rápida y directa, así como para áreas como siniestros y la oportunidad de mejorar la detección de posibles fraudes.

Para las instituciones de seguros la distribución es la clave del éxito y por eso están revisando de forma detenida posibles oportunidades para robustecer sus redes. Sin embargo, será necesario realizar ajustes estratégicos y operativos. Después del Covid-19, las aseguradoras se centrarán en cómo se ve una "huella mínima de distribución viable", equilibrando el alcance con la eficiencia de costes.

El periodo vivido fue sin lugar a duda el catalizador de algunos cambios de gran alcance en la relación de las aseguradoras con los clientes. La forma en que la que

interactúan las instituciones con sus clientes y la forma en que las redes de agentes están integradas en el proceso, comenzaron a cambiar drásticamente. Hoy, mirando en retrospectiva, parece inédito cómo el Covid-19 detonó transformaciones que cambiaron de costumbres del sector que parecían profundamente arraigadas e imposibles de evolucionar. Vea [Customer Service and Experience \(2020\)](#).

MODELO DE NEGOCIOS

Proyecto y objetivos

Lean Startup

El modelo de negocios y desarrollo a corto, mediano y largo plazo se encuentra enmarcado por la pertinencia del producto mínimo viable, es decir, evolucionar paulatinamente funcionalidad capacidad y oferta de productos con base en la solvencia financiera del emprendimiento y la constante retroalimentación de usuarios y asegurados. Con ello se pretende hacer un uso racional y óptimo de los recursos que pudieran ser aportados por el capital de riesgo a través de las diversas rondas de inversión, y sobre todo para garantizar que la propuesta de valor de la cobertura freemium es adecuada y atractiva para el mercado.

A lo largo de esta sección se esbozan los principios y fundamentos de la metodología Lean Startup, mismos que se adoptan como fundamentales del modelo de negocio de idelacare.

Desarrollo basado en los principios Lean Startup. El emprendimiento siempre ha estado relacionado con la exposición a un gran riesgo. El riesgo puede, además, derivar en un fracaso, y esta situación siempre ha estado demonizada, no sin falta de razón, sino por las consecuencias que suele generar para el emprendedor; la estadística evidencia que el 75 % de las Startups fracasan.

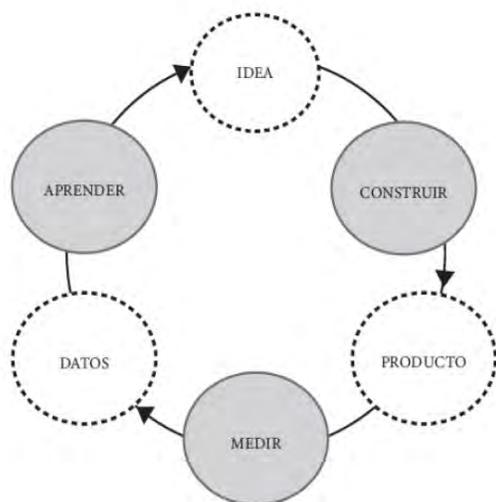
Eric Ries, considerado el padre de la metodología Lean Startup, expone en El método Lean Startup los fundamentos para crear empresas de éxito utilizando la innovación continua. Afirma que el éxito de las startups no radica, como pudiera asumirse, en estar en el lugar correcto y en el momento adecuado, sino que el éxito se logra al seguir un proceso correcto de aprendizaje y adaptación.

La base del método Lean Startup radica en crear el producto que el cliente necesita y por el que está dispuesto a pagar, usando la cantidad mínima de recursos. Un problema usual en el ecosistema emprendedor es que sólo tras haber pasado todas las etapas crear un plan de negocio, conseguir financiación, desarrollado el producto



y finalmente lanzarlo a mercado, es que la empresa obtiene retroalimentación de los clientes. En ese último paso es cuando muchos emprendimientos aprenden que los clientes no necesitaban la mayoría de las características desarrolladas del producto o servicio.

La metodología Lean Startup se centra en un circuito de tres pasos que se deben recorrer en el menor tiempo posible y con la mínima inversión. Se comienza por crear un producto, se miden los resultados, y se aprende.



Construir: cuando se lanza la Startup, no se cuenta con los suficientes datos como para crear un producto ajustado a las necesidades del cliente, por eso, lo ideal es crear un producto viable mínimo (PMV). Este producto debe ser una versión con las funcionalidades mínimas que permitan recoger la máxima cantidad de aprendizaje validado acerca de los clientes.

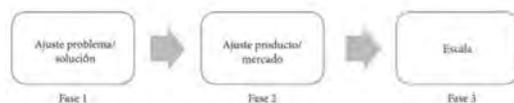
Medir: el mayor reto en esta fase es medir cómo responden los consumidores y a partir de esos datos, tomar las decisiones apropiadas.

Aprender: el circuito del proceso Lean Startup permite, sobre todo, aprender si es viable el negocio, seguir perseverando o de lo contrario, pivotar, es decir, reajustar sustancialmente las ideas que no están funcionando.

Lo que propone la metodología Lean Startup es lanzar los negocios a través de este circuito ágil donde el emprendedor, una vez establecidas sus hipótesis y suposiciones, las va validando con un experimento, el producto mínimo viable (PMV). El PMV permite conocer a bajo costo si la idea que se está desarrollando tiene aceptación

en el mercado; si se demuestra que responde al deseo del cliente, se irán incrementando sus funcionalidades y, por el contrario, si el PMV no encaja en el mercado, se deberá dar un nuevo enfoque al negocio (denominado pivotar).

La relevancia de esta metodología es aprender en poco tiempo, invirtiendo los mínimos recursos. Lean Startup es una metodología dirigida a la puesta en marcha de ideas innovadoras, donde no se comienza creando una empresa, sino una Startup, entendida no como una empresa en pequeño, sino como una institución humana diseñada para crear un nuevo producto o servicio bajo condiciones de incertidumbre extrema. El objetivo de las Startup es averiguar qué debe producirse, aquello que los consumidores quieren y por lo que pagarán, tan rápidamente como sea posible.



Fase 1 - Ajuste problema/solución: consiste en determinar si realmente se tiene un problema que merezca la pena solucionar antes de invertir tiempo y esfuerzo para desarrollar una solución. Se puede resumir esta fase en dos preguntas: ¿está interesado el cliente realmente en el producto? y ¿pagaría por ello?

Fase 2 - Ajuste producto/mercado: se debe comprobar que se consigue tracción, es decir, que la gente demanda ese producto.

Fase 3 - Escala: es necesario centrarse en la aceleración del crecimiento.

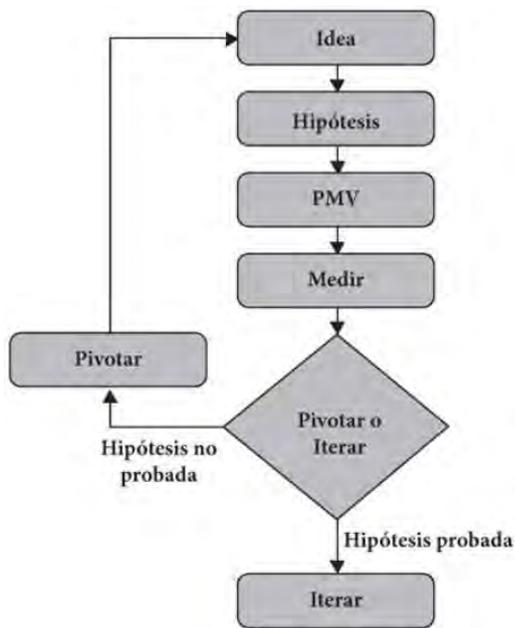
Las empresas establecidas ejecutan modelos de negocio donde se conoce al cliente, sus problemas y las características de los productos que demandan, mientras que las Startups necesitan operar en forma de búsqueda, validando sus hipótesis y aprendiendo de los resultados para buscar el modelo de negocio escalable y rentable.

La metodología LeanStartup. El circuito crear-medir-aprender es el núcleo central de la metodología Lean Startup. Una Startup crea productos, mide resultados y aprende de ellos. En otras palabras, es un proceso iterativo de transformación de ideas en productos, medición de la reacción y comportamiento de los clientes frente a los productos y el aprendizaje o bien porque se persevera o bien porque se pivote. Este proceso se repite de forma continuada.

La secuencia se inicia con el primer elemento indispensable en el planteamiento del negocio: las hipótesis, que



no son sino las suposiciones sobre las que el emprendedor fundamenta la viabilidad de su idea. Para comprobar dichas hipótesis, el emprendedor se ayudará de un PMV con el que experimentará, y sobre todo, aprenderá de su público objetivo qué aceptación tiene su oferta. Pero para que este aprendizaje sea riguroso y fundamentado, es indispensable medirlo y como consecuencia, tomar las decisiones oportunas que implicarán correcciones sobre las hipótesis iniciales, reestructurando el modelo de negocio, lo cual se denominará pivotar. Si por el contrario los datos aconsejan persistir, la iteración continuará con la creación de versiones incrementales del producto que se puedan ir validando desde la experiencia del cliente.



El objetivo principal de aplicar esta metodología es obtener un aprendizaje validado, saber qué elementos de la estrategia funcionan y conocer qué es lo que quiere el consumidor. Este aprendizaje permitirá medir el progreso de la Startup y descubrir si el modelo de negocio que se busca es viable, rentable y escalable; características fundamentales que debe tener una Startup antes de convertirse en una empresa.

Producto viable mínimo. Una de las mejores formas de validar las hipótesis es a través de la construcción de un PMV, que viene a ser la versión del producto que permite dar la vuelta entera al circuito de crear-medir-aprender,



con un mínimo esfuerzo y en un mínimo tiempo. El PMV es una de las técnicas más importantes del Lean Startup, definida como la versión de un nuevo producto que permite a un equipo recoger la máxima cantidad de aprendizaje validado, acerca de sus clientes, realizando el mínimo esfuerzo.

El PMV consiste en una síntesis concisa del conjunto más pequeño posible de características que podrían funcionar como producto independiente resolviendo al menos el problema principal y demostrando el valor del producto. Ayuda a los emprendedores a iniciar con el proceso de aprendizaje lo más rápidamente posible. Su objetivo es probar las hipótesis fundamentales del negocio.

El primer producto de una Startup no está dirigido a satisfacer al público en general. Las Startups no pueden permitirse crear un producto que contenga todas las características desde el inicio y, por eso, los primeros esfuerzos se centran en un grupo muy pequeño que algunos llaman evangelistas, early adopters o pioneros. Son aquellos clientes que quieren ser los primeros y están dispuestos a adoptar el producto o servicio en sus fases iniciales. Clientes visionarios, con interés por el producto.

Medir: Lean Analytics. En general, las empresas usan la contabilidad para medir su objetivo principal: el crecimiento. Este depende básicamente de la rentabilidad que se obtiene del cliente, los costes que supone obtener a dicho cliente y la tasa de repetición en la compra.

La contabilidad de una Startup es muy distinta, dado que el objetivo es demostrar que se está aprendiendo a construir un negocio sostenible. Es lo que en el ecosistema Startup se denomina la contabilidad de la innovación, misma que se explica en tres etapas:

- 1. Usar un producto mínimo viable para recopilar los datos reales, sobre en qué punto se encuentra la empresa en el momento actual.
- 2. La Startup hace todos los cambios y las optimizaciones del producto.
- 3. La Startup toma la decisión de perseverar porque está aprendiendo apropiadamente y por tanto haciendo un buen progreso o si el equipo concluye que necesitan cambios, deben pivotar comenzando el proceso de nuevo.

Para poder llevar a cabo este proceso de la contabilidad de la innovación, del aprendizaje y tomar decisiones rigurosas, es necesario ser capaces de medirlo.

Cada modelo de negocio y cada tipo de producto requiere un servicio de métricas diferente. El objetivo de

los negocios es que los clientes compren un producto o un servicio y esto implica seguir la ruta de los pasos que sigue el cliente hasta que genera ingresos a la Startup.

La forma más clara de seguir esta ruta es el embudo de conversión definido por las métricas piratas. Acuñadas por Dave McClure en 2010 se definen así por las iniciales de los cinco bloques del embudo en inglés son AARRR, como el supuesto berrido de un pirata -acquisition, activation, retention, referral, revenue.



Adquisición: responde a la pregunta ¿cómo llega el cliente o usuario a conocer la oferta del negocio? Por tanto, se deben identificar los canales de adquisición y los costes asociados, en el caso de que se haya hecho una campaña SEM (search engine marketing, marketing en buscadores) o un mailing u otro tipo de actividades offline, como pudiera ser el caso de una feria.

Activación: Trata de convertir a un potencial interesado en un cliente potencial. Mide el porcentaje de potenciales interesados que han hecho la acción necesaria para convertirse en cliente potencial. Por ejemplo, rellenar un formulario, darse de alta en una plataforma, registrarse en una app. Indica la capacidad de despertar interés en el interesado para que vuelva a contactarnos. Está muy relacionada con la experiencia que haya tenido. Se calcula la relación de usuarios que se consideran activos y los que descargaron la app, entre los usuarios adquiridos.

Retención - engagement: por decirlo de forma muy coloquial, se trata de lo enganchado que está el cliente. ¿Vuelve el usuario? ¿Recorre? Es importante entender el porqué de la fidelidad de cliente o su abandono.

Referencia: esta métrica indica el número de clientes que vienen por recomendación o por viralidad. Usualmente, el cliente referido no tiene un coste y eso influye directamente en la disminución del coste de adquisición de clientes.

Conversión: este indicador permite saber a qué porcentaje de clientes se ha conseguido vender del total del público al que se ha logrado interesar. Es una métrica

muy importante, porque permite conocer al emprendedor si es capaz de monetizar, y por tanto, rentabilizar su modelo de negocio. Para calcular el porcentaje de conversión, se debe dividir el número de clientes convertidos, que han comprado, entre los clientes adquiridos.

Pivotear o preservar. Todos los elementos que se han desarrollado hasta el momento como aspectos importantes dentro de la metodología Lean Startup: establecer hipótesis, crear un producto mínimo viable, medirlo y aprender de ello, tienen sentido en cuanto responden a la siguiente pregunta: ¿se están haciendo progresos suficientes como para creer que la hipótesis es correcta o se debe hacer algún cambio importante? Este cambio se denomina pivote: una corrección estructurada diseñada para probar una nueva hipótesis básica sobre el producto, la estrategia y el motor de crecimiento. Un pivote requiere que se mantenga un pie anclado en lo que se ha aprendido hasta el momento, mientras se hace un cambio fundamental en la estrategia para buscar un mayor aprendizaje validado.

Se pivota como consecuencia de un aprendizaje en el que el emprendedor se da cuenta de que tiene que darle un nuevo giro a su negocio si no quiere quedarse estancando, consumiendo los recursos, mientras el negocio corre el peligro de no crecer o incluso morir.

Dicho pivote se debe hacer en el mismo momento en el que el emprendedor se da cuenta de que su planteamiento no es válido. La clave radica en adquirir las evidencias empíricas necesarias para poderlo hacer cuanto antes y evitar la pérdida de tiempo y dinero, por eso, es tan importante identificar las hipótesis y hacer experimentos con ellas con el objetivo de validarlas o invalidarlas.

Síntesis del Modelo. La metodología Lean Startup propone el lanzamiento de los negocios desde un aprendizaje que se va validando a través de un circuito. Se inicia con la concepción de un producto o servicio, de forma experimental, en el que se mide su encaje en el mercado y la aceptación por parte de los clientes más interesados; de esa realimentación, se obtiene un aprendizaje que permite seguir desarrollando dicho producto o servicio de una forma iterativa, ya sea persistiendo en el incremento de las funcionalidades del servicio o producto, ya sea estableciendo una serie de cambios o pivotes que permitan su viabilidad, tras lo cual se logra un modelo de negocio que funcione, sin desperdiciar recursos.

La metodología se ha desglosado siguiendo una secuencia recomendable a la hora de poner en marcha un negocio:

- **Validación de hipótesis:** validar las suposiciones de



las que se parte, ya que no dejan de ser asunciones las cuales solo se deberían confirmar contrastadas con el mercado y el cliente. Para ello, se recomienda usar alguno de los lienzos de modelo de negocio que han desarrollado los expertos o crear un propio planteamiento de modelo de negocio.

- **Creación de un producto mínimo viable:** crear un producto con unas características mínimas que aporte un valor al cliente y que permita obtener la mayor información posible.
- **Métricas:** establecer elementos cuantificables que permitan medir el rendimiento esperado para poder tomar las decisiones oportunas.
- **Pivotear o preservar:** el aprendizaje obtenido, a través de iteraciones, permitirá seguir incrementando lo que funciona, perseverar o implementar los cambios que se infieren de los datos obtenidos, pivotar.

La metodología Lean Startup ofrece una gran oportunidad para abordar negocios innovadores y minimizar la incertidumbre, el desperdicio de recursos y el riesgo elevado que suele conllevar el emprendimiento. Vea <https://www.redalyc.org/jatsRepo/206/20657075005/html/index.html>.

La propuesta de Valor de idealcare. idealcare es el primer esquema de protección freemium de seguros en México y el primer esquema de cobertura amplia a nivel mundial. La propuesta es una solución que permite a toda persona poder contar con un nivel mínimo de protección sin costo alguno, con la ventaja de contar con la facilidad de ampliar el alcance de los servicios básicos y gratuitos a una cobertura más amplia que pudiera ser un seguro de accidentes personales, seguro de indemnización, plan de gastos médicos e inclusive un plan de gastos médicos mayores combinado con una protección de salud y un esquema preventivo.

idealcare en su concepto más esencial es una aplicación a través de la cual el usuario al registrarse accede a descuentos en servicios médicos y comercios afiliados, acceso a una red de prestadores médicos mismos que son evaluados por la misma comunidad que usa la aplicación, acceso a consultas médicas telefónicas o por videollamada, servicios de emergencia como puede ser ambulancia, plomería, cerrajería entre otros.

El modelo de negocio es sustentable a través de la afiliación de los proveedores a la red, en dónde por el hecho de generar referencias clientes que requieren un servicio en específico se genera una contraprestación para la plataforma. En contraparte a la mayoría de los mode-



los freemium (relativamente muy comunes en la industria tecnológica) este modelo de negocio si rentabiliza el ofrecimiento de servicios y contenido, sin afectar directamente la rentabilidad y sostenibilidad de la empresa. Así mismo, al hacer accesible este tipo de beneficios al público en general se adquiere la capacidad de generar cultura del seguro, conciencia y previsión en los usuarios. Este impulso a la educación financiera en seguros beneficia a la sociedad y de manera directa a la empresa, ya que de forma consciente y voluntaria los usuarios habrán de solicitar la migración (o upgrade) a esquemas de pago, en donde los esquemas de pago están compuestos por los mismos planes que actualmente ya se comercializan en el sector asegurador. La solución (inicialmente aplicación) está pensada y dirigida para la protección de las personas, es decir que contempla la comercialización de los productos de vida y accidentes y enfermedades.

Con base en la metodología Lean Startup se pretende hacer el desarrollo de la primera línea de negocio enfocada exclusivamente a la protección de salud individual.

Se traza una primera iteración del roadmap con la evolución y escalabilidad del negocio esperadas bajo las premisas de producto mínimo viable y validación constante contra mercado del desarrollo de la propuesta de valor.

El desarrollo potencial de la propuesta de valor es contar con una institución altamente digitalizada en donde el primer punto de contacto es la aplicación, para después ser sitio web, desarrollar el soporte por chatbot, crear un canal presencial de ejecutivo de servicio y finalmente la posibilidad de acudir directamente a oficinas de servicio. A través de este modelo se busca generar una presencia omnicanal con énfasis en el canal digital, de tal forma que se garantice estabilidad, escalabilidad, se contengan costos y lograr que la prestación de servicios y consultas por parte de usuarios asegurados sea inmediata. El alcance del modelo de negocio es poder ofrecer bajo un esquema freemium protección en salud y vida tanto para individuos como para colectivos o grupos.

La atracción de los usuarios está sustentada en el principio de que la protección es tu derecho. Al descubrir, experimentar y familiarizarse las cualidades de la propuesta de valor, el usuario es que por cuenta propia da valor a la oferta, mejora su cultura del seguro y desarrolla mayor conciencia de la necesidad de protección.

Dentro del esquema general de las funcionalidades de la aplicación se encuentran guías tutoriales consejos y tips para todo lo referente a los temas de protección. Se pretende hacer frente a la baja cultura del seguro al tirar las barreras de acceso del seguro, siendo las únicas limi-

tantes la facilidad del usuario con el uso de herramientas digitales y el grado de interés de saberse protegido.

El modelo del negocio basado en el esquema freemium plantear tres iteraciones mayores, la primera iteración se encuentra debidamente mapeada, con base en un desarrollo que se alimente y se fortalezca de la respuesta de los usuarios.



ITERACIÓN 1.



PRIMERA FASE. ITERACIÓN 1

Servicios de Asistencia. El desarrollo inicial, es el paquete gratuito en donde se incluyen asistencias con costo, es decir una réplica de los servicios y asistencias ofrecidos en los seguros individuales. Incluyendo servicio de orientación médica telefónica, consulta médica (vídeo consulta o a domicilio), servicio de cerrajería, plomería, electricista, asesoría legal, consejo nutricional, apoyo psicológico; así como servicios de emergencia como ambulancia.

Estos servicios serán prestados con un copago. Inicialmente se pretenden ser tercerizados a través de un proveedor de asistencias, de tal manera que la que el emprendimiento no se vea rebasado en capacidad ni sumando esfuerzos a tareas no esenciales del negocio. El

esquema se contempla como una operación de utilidad cero, es decir el copago habrá de ser igual al costo convenido con el proveedor de servicios.

Al mantener el requisito de pago de copago, se evita exponer a la institución a tener que hacer inversiones o subsidiar directamente a los usuarios de no paga, con lo cual se garantiza la sostenibilidad del modelo. En contraparte, al no perseguir utilidad en este rubro, es posible contar con monto de copago que sea suficiente para cubrir el costo convenido y que a su vez sea atractivo interesante y accesible para el usuario.

Creación de Contenido. Se desarrollan guías y tutoriales en un entorno similar a un foro o red social. Se habrá de generar un repositorio de información útil sobre protección, cuidado de la salud y conceptos generales del seguro. Se plantea que sea un entorno en donde los mismos usuarios viertan comentarios, generen preguntas, despejen dudas y se genere una participación activa (bajo los fundamentos Web 2.0). Con ello se habrá de lograr que la comunicación no sea de un solo canal, permitiendo que el repositorio de conocimiento vivo, capaz de servir de lugar de consulta, debate e intercambio de ideas. Dichas directrices buscan ser altamente atractivo para el usuario, así como fomentar el uso continuo de la aplicación.

SEGUNDA FASE. ITERACIÓN 1

Tracking Personal. En la etapa subsecuente se incluye dentro de la parte gratuita el seguimiento de métricas personales. En un entorno global donde la información es imprescindible para la toma de decisiones y con un sector asegurador que camina de manera firme hacia conceptos como la telemetría o el chequeo de signos vitales de la salud, es que la propia aplicación busca ser el lugar donde los usuarios puedan capturar y hacer seguimiento al estado y evolución de su salud. Estos datos habrían de ser útiles para generar descuentos e inclusive para proveer a las instituciones de seguros de estadística más robusta que facilite a la empresa obtener bonificaciones en costos, con base en esta información compartida.

Prestadores de Confianza. El apartado más importante de la parte gratuita de la aplicación es la inclusión de una red de prestadores, contemplando hospitales, laboratorios, médicos y comercios de interés general. Esta sección ha de incluir la funcionalidad de ingresar opiniones y calificaciones sobre los prestadores. De tal forma que la aplicación sea un repositorio de las experiencias de los usuarios de forma muy análoga a lo que realiza Google Maps o Uber, con lo cual se puede generar en el usua-



rio mayor certeza y confianza del tipo de proveedor al que está acudiendo a atender su necesidad. En el caso de la salud, la funcionalidad de opiniones y calificación logrará minimizar la percepción de estar acudiendo a un médico que no fue referenciado de manera personal y que simplemente aparece dentro de un listado.

Los proveedores por incluir en esta red han de ser convenidos bajo un contrato que genera una contraprestación por la referenciación de clientes, de tal manera que por una parte se podrá monitorear la satisfacción del cliente con cada uno de estos proveedores, brindando a la compañía de información para tomar acciones prontas y efectivas sobre proveedores que generan una baja satisfacción del cliente, misma que impacta directamente la satisfacción general con nuestra empresa. En contraparte posibilita a los proveedores a generar un nuevo flujo de clientes, sin tener que realizar gastos de promoción y solo limitando el costo a los clientes efectivamente atendidos. Este mecanismo rentabiliza a los usuarios de no paga y brinda solidez financiera a la empresa bajo escenarios de baja conversión de usuarios a clientes de paga (asegurados).

Tips y Recomendaciones. En la parte gratuita se incluye una sección de tips y recomendaciones con dos objetivos: El primero es lograr una mayor conciencia de la necesidad de protección y cultura del seguro en general; en segundo lugar, busca que los mismos usuarios tengan avisos o recordatorios de los beneficios con los que ya cuentan para que hagan uso de los mismos, de tal forma que se logre una adecuada fidelización y alta retención de los usuarios o asegurados.

TERCERA FASE. ITERACIÓN 1

Upgrade 1: Accidentes Personales. Se incluye la posibilidad de adquirir una protección de mayor alcance, el primer producto a incluir sería un seguro de accidentes personales dada su facilidad de operación y por ser un producto de muy bajo costo).

Este sería el primer esquema de pago para los usuarios en dónde a través de una suscripción mensual equivalente a la prima neta se añaden los beneficios de ya contar con una cobertura de un plan ya existente y maduro del sector asegurador. Para ello es necesario generar una colectividad de prima nivelada que pueda desprestigiar en mayor medida la edad del asegurado y su localidad, con el fin de que la propuesta de valor sea transparente para el usuario. Bajo este esquema el usuario no paga sabe qué beneficios tiene y el usuario de pago, conoce el costo mensual para sumar nuevos beneficios.



Red de Prestadores del Seguro. En esta etapa de desarrollo se incluye la funcionalidad de visualizar la red de prestadores en convenio de las aseguradoras con las que se colocó el producto de accidentes personales.

CUARTA FASE. ITERACIÓN 1

Upgrade 2: Plan Indemnizatorio Se genera el segundo paquete de pago donde en dónde la cobertura se amplía a un producto indemnizatorio, debido a las sumas aseguradas a indemnizar es que este paquete es de mayor valor que el anterior y ofrece un mayor nivel de protección al asegurado.

QUINTA FASE. ITERACIÓN 1

Cotizador de Gastos Médicos Mayores. En esta fase se desarrolla cotizador ya que para este paquete en específico no es posible actuarialmente generar una oferta de prima nivelada.

Upgrade 3: Gastos Médicos Mayores. Se agrega el siguiente paquete de protección que contemplan una cobertura de gasto médico mayor individual, siendo ésta el ideal de protección para la salud de una persona en México.

SEXTA FASE. ITERACIÓN 1

Cotizador de Salud (ISES). En esta fase se amplía el cotizador para incluir la opción de cotizar planes de gastos médicos mayores con gastos médicos menores.

Upgrade 3: Planes Integrales de Salud (ISES). En la última fase de la iteración inicial se añade la opción de contratación de un producto de gastos médicos con el complemento de servicios médicos de primer y segundo nivel y esquemas de prevención de la salud. Estos planes serían operados a través de la oferta actual de las instituciones de seguros especializadas en salud.

Estructura de Servicio. Pese a ser un enfoque digital se pretende dotar de figuras de servicio a los asegurados, ello con el fin de que el cliente cuente con una presencia omnicanal y él decida a gusto y conveniencia porque medio desea atender y resolver sus necesidades y problemáticas.

ITERACIÓN 2

En una segunda iteración se contempla replicar el aprendizaje de la primera iteración para la operación de

vida, con la introducción de un plan de suma asegurada mínima sin costo operado a través de una colectividad. En dónde cuantitativamente el costo de la prima sea equivalente al costo de adquisición de un usuario y no represente un gasto significativo de la empresa.

El primer upgrade sería un plan de vida - protección pura con una suma asegurada alrededor de doscientos mil pesos, contemplando únicamente el riesgo de fallecimiento.

El segundo upgrade es un plan de vida temporal a un año que contemple la variable edad y dónde ciertos elegibles como la suma asegurada y coberturas adicionales puedan ser seleccionadas o anuladas por el asegurado.

El tercer upgrade es una oferta a la medida en donde los ejecutivos de servicios, ya operando desde la interacción anterior, realicen la prospección y levantamiento de necesidades de la persona para personalizar un plan de vida individual pudiendo ser de protección pura de pagos limitados u ordinario de vida. Previo se realiza desarrollo de cotizadores y perfiladores, con el objetivo de mantener la carga laboral del lado digital y minimizar el tiempo que un ejecutivo requiere invertir en un cliente.

El último upgrade es el desarrollo de cotizadores materiales y perfiladores para introducir a los usuarios y asegurados los planes con componente de ahorro: planes dotales simples, educativos y de retiro. El desarrollo daría continuidad a la fase anterior, ya que la propia estructura de servicio ya tendría la experiencia de realizar levantamientos basados en protección pura y sólo se requeriría capacitar a la estructura para asesorar correctamente a los clientes en la contratación de los seguros de vida con componente de ahorro.

ITERACIÓN 3

En su tercera iteración se explorarían las posibles ofertas para grupos y colectivos de tal forma que cualquier empresa u organización pudiera activar una cobertura de vida y de accidentes enfermedades sin costo alguno y en beneficio de su conjunto, en donde la organización es capaz de decidir el alcance de la cobertura ofrecida y las cualidades propias de la oferta de valor creada facilitará que los asegurados puedan realizar la contratación de excesos a través del concepto de upgrade.

ITERACIÓN RADICAL

El producto mínimo viable de la compañía es generar una oferta freemium de protección usando normativamente la figura de intermediarios de seguros, sin embargo, en una iteración futura es posible montar la compañía

de ser un intermediario de seguros hacer una aseguradora que no sólo operan los seguros sino que los ofrece a través de un esquema integral, sin barreras de acceso económicas para las personas con una presencia permanente y continúa de la compañía con sus usuarios y asegurados, esto gracias al enfoque en el aprovechamiento de las herramientas tecnológicas para la mejora de la satisfacción del cliente, la capacidad de generar una mayor cultura del seguro (que amplíe el mar el mercado potencial) y una reducción de costos operativos al centralizar la operación en plataformas digitales.

Look and Feel (Esquemas iniciales de funcionalidad)



Para la aplicación que habrá de ser el medio de acceso principal por parte de los usuarios se contempla que una sola pantalla simple y entendible estos puedan acceder a las funciones generales y visualizar el alcance de su cobertura actual.



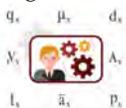


Rentabilidad del Negocio

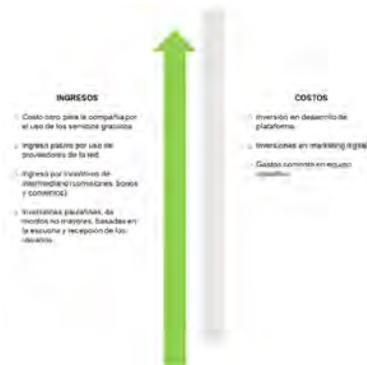
El modelo de negocio planteado cuenta con un nivel de riesgo bajo y un potencial de crecimiento y rentabilidad alto. Bajo las premisas de desarrollo constante y escucha activa de los usuarios es que este negocio puede ser financiado con montos menores y tan sólo con la necesidad normativa de contar con autorización de intermediario.

El negocio en su versión esencial y gratuita limita las inversiones indispensables y genera ingresos por el simple uso de los servicios. En la versión de paga la rentabilidad es mayor dado que, se cuenta tanto con los ingresos por el uso de servicios como los incentivos que las compañías de seguros han de otorgar por la intermediación de los productos.

Los dos mayores costos son por una parte el desarrollo de las funcionalidades y contenido, mismo que se puede considerar como una inversión única, aunque por utilizarse el modelo Lean Startup se puede considerar una inversión única, aunque constante. En contraparte la necesidad de contar con una presencia omnicanal, es decir contar con centros de servicio y con personal de atención al cliente, generan un gasto corriente. Es por tal razón que los ejecutivos de servicio sólo habrán de ser asignados a los usuarios que son asegurados de por lo



menos un producto de gastos médicos o plan integral de salud privada y para el caso de vida aquellos que cuentan con un plan individual de protección pura personalizado o planes superiores (ordinarios de vida, pagos limitados y dotales). Con este ajuste es que la necesidad de mercado de ser una empresa con presencia omnicanal no pone en riesgo la solvencia de la institución.



Financiamiento del Proyecto

Es preferible realizar rondas de inversión con fondos de capital de riesgo dada que la barrera inicial de entrada para realizar una réplica del modelo no es compleja. El éxito del proyecto depende en gran medida del liderazgo de profesionales que conocen y entienden a profundidad el sector asegurador y las necesidades de los asegurados.

Etapas de Inversión Contempladas

Inversión inicial - fundadores. Los primeros que deben invertir en la empresa habrán de ser los emprendedores y fundadores de tal forma que los futuros inversionistas consideren el esfuerzo y el compromiso con el negocio. Invierten sobre la idea y el plan de negocio desarrollado.

FFF (Family, Friends and Fools, Familia, amigos e ingenuos. Tras las inversiones propias, podrán invertir en el negocio los amigos, la familia y aquellas personas no cercanas al círculo. Esto servirá para que en las siguientes fases de inversión pueda contarse con un volumen de fondos propios que de solidez al modelo. Este tipo de inversores te habrá de proporcionar la financiación suficiente para el lanzamiento de la primera fase y adquisición de los primeros usuarios.

Aceleradoras. Es habitual que startups se decanten por acceder a algún programa de aceleración que combine

un ahorro de costes (oficina o el de recursos informáticos, posibilidades de realizar networking o acceder a financiación). Fase 2 y 3.

Crowdfunding. Las plataformas de inversión online permiten subir el negocio y encontrar una financiación en las fases iniciales de la empresa a cambio de capital o de productos y servicios en condiciones ventajosas. Fases 4 y 5.

Capital Semilla (Seed Capital): Business Angels y redes de Business Angels. Se recurre a Business Angels al ya contar con un modelo de negocio estructurado y probado Las redes de Business Angels no solo aportarán dinero al negocio, sino que también aportarán contactos, experiencia y conocimiento.

Los Business Angels son personas que invierten su propio dinero como apuesta por el éxito de la empresa. En modelos tecnológicos, es habitual que con las inversiones en capital semilla en la startup consiga valoraciones superiores al millón de dólares. Es previsible que una vez alcanzada su rentabilidad objetivo, estos inversores vendan su participación en futuras rondas de inversión.

RESUMEN Y DECISIÓN

México es un país que se encuentra en el proceso de adopción del seguro, actualmente la penetración de este instrumento se encuentra muy por detrás desde países desarrollados e inclusive de algunos países de la región latinoamericana. los esquemas premium han demostrado en el ámbito tecnológico ser un modelo de negocios de alta atracción por su cualidad de gratuidad de tal forma que para el caso mexicano e inclusive alrededor del mundo es deseable desarrollar ofertas de protección esencial bajo este modelo, ya que abre la posibilidad de romper la barrera de falta de cultura del seguro e incrementar sustancialmente la penetración del mismo.

El esbozo del modelo de negocio presentado para crear una startup con una oferta de valor en seguros con un modelo de negocios premium, muestra ser viable al ser ejecutado bajo la figura normativa de intermediario, en donde las inversiones necesarias para realizar el proceso de creación continua son mínimas de bajo riesgo y que al combinarse con inversiones de capitales de riesgo presentan una oportunidad extraordinaria para posicionar este emprendimiento como en el referente de una start up de seguros, con principios extraordinarios como el derecho de un mínimo nivel de protección para todos, con la facilidad de poder configurar como asegurado tú cobertura en tu celular sin importar donde te

encuentres, con la ventaja como compañía de aminorar los costos operativos al estar montados en una plataforma primordialmente digital que adicionalmente brinda servicio presencial para los que así lo deseen y prefieran.

A través de este breve análisis se observa de manera fehaciente que es factible rentable y escalable desarrollar la primera oferta de valor premium de seguros para el país.

REFERENCIAS

- Berger, A., J. Cummins, and M. Weiss, 1997 The coexistence of multiple distribution systems for financial services: The case of property-liability insurance. *The Journal of Business* 70: 515–546.
- Comisión Nacional de Seguros y Fianzas , 2020 Publicación trimestral que presenta el comportamiento de las principales partidas de los estados financieros de los sectores asegurador y afianzador. *Boletín de Análisis Sectorial* .
- Costumer Service and Experience, 2020 Kpmg - insights, covid-19: customer and digitization in insurance. *The digital insurer* .
- García Téllez, I., 2019 Marketing de seguros. *Revista Mexicana de Seguros y Fianzas* .
- Minzoni-Consorti, A., 2006 *Reaseguro*. Facultad de Ciencias de la UNAM.
- Vaughan, E. and T. Vaughan, 2014 *Fundamentals of risk and insurance*. John Wiley and Sons, Inc.



Iván David Vázquez Álvarez es un actuario egresado de la Facultad de Ciencias de la UNAM, con experiencia en desarrollo de productos y áreas actuariales dentro de nuestro sector asegurador, ganador de diversos premios de investigación, y actualmente ejerciendo tanto como instructor de educación continua en el Tecnológico de Monterrey como intermediario de seguros a través de la firma de seguros Núcleo Life.



Próximas aperturas de los programas de la facultad de ciencias actuariales

Inicio:

Julio de 2022, Campus Sur

MAESTRÍA EN **RIESGO**

Coordinación académica:
Mtra. Martha Reyes Villa
martha.reyes@anahuac.mx

Inicio:

Enero de 2023, Campus Norte

DOCTORADO EN **CIENCIAS ACTUARIALES**

Coordinación académica:
Dr. Carlos Cuevas Covarrubias
ccuevas@anahuac.mx

MAESTRÍA EN **ESTADÍSTICA**

Coordinación académica:
Dr. Carlos Cuevas Covarrubias
ccuevas@anahuac.mx

MAESTRÍA EN **RIESGO**

Coordinación académica:
Dr. José Daniel López Barrientos
daniel.lopez@anahuac.mx

<https://www.anahuac.mx/mexico/posgrados/facultad-de-ciencias-actuariales>

Facultad de
Ciencias Actuariales

GRANDES LÍDERES

Y MEJORES PERSONAS

DESCUENTO A EGRESADOS
20%

INFORMES:
Centro de Atención de Posgrado y Educación Continua
Tels.: (55) 56 27 02 10 ext. 7100 y (55) 53 28 80 87

55 54 51 61 77
55 79 18 21 59

posgrado@anahuac.mx

anahuac-mx/mexico



COLEGIO
NACIONAL DE
ACTUARIOS, A.C.

CURSO

ONLINE

CONTRATOS DE REASEGURO

Fecha: 25 de enero de 2023

15 HECSE

*De las cuales 4 serán de normatividad

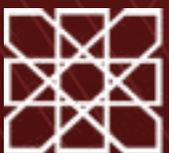
Total de Horas: 15

✉ informes@actuaryhunters.com  [@actuaryhunters](https://www.facebook.com/actuaryhunters)  55 51 71 62 86  55 83 72 41 90

PREMIO NACIONAL DE ACTUARÍA

Seguro Catastrófico, póliza de sismo para edificaciones

CATEGORÍA DE INVESTIGACIÓN, SEGUNDO LUGAR



Seguro Catastrófico, póliza de sismo para edificaciones

Fausto Guevara López^{*,1}

*Facultad de Ciencias Actariales de la Universidad Anáhuac México

RESUMEN Este trabajo obtuvo el segundo lugar del Premio Nacional de Actuaría, organizado por el Colegio Nacional de Actuarios A.C. Después de los sismos del 2017, se realizó una revisión a las estimaciones del modelo de riesgo estatutario elaborado por la iniciativa privada en colaboración con el organismo regulador e instituciones de enseñanza, y se pudo observar que sobrestimaba las pérdidas en casi un 50 %. Nuestro objetivo es presentar un modelo simple, pero racional, para la cuantificación de riesgo sísmico, y por ende la posible generación de pólizas de seguro catastrófico. Ilustramos nuestro modelo utilizando edificaciones de múltiples características en la Ciudad de México. Finalmente, presentamos un esquema para la implementación del modelo. El video de la presentación puede verse [aquí](#).

Palabras clave

tarificación, análisis geológico

1. INTRODUCCIÓN

El origen de los Sismos en México

La Tierra está formada por 16 grandes placas tectónicas y 42 microplacas, las cuales se deslizan sobre el magma presente en el núcleo del planeta. Estos movimientos provocan choques o separaciones, los cuales son responsables del origen de los fenómenos sísmicos. Una parte considerable de los sismos se presentan en la formación geológica denominada “Cinturón de Fuego” representado en la Figura 1 y obtenida de [Centro Nacional](#)

Derechos reservados © 2022 por el Colegio Nacional de Actuarios
Última actualización del manuscrito: 22 de diciembre de 2022
Este artículo es publicado por el Colegio Nacional de Actuarios (CONAC) y contiene información de una variedad de fuentes. Es un trabajo cuyo fin es únicamente informativo y no debe interpretarse como asesoramiento profesional o financiero. El CONAC no recomienda ni respalda el uso de la información proporcionada en este estudio. El CONAC no ofrece ninguna garantía, expresa o implícita, ni representación de ningún tipo y no asume ninguna responsabilidad en relación con el uso o mal uso de este trabajo.

¹ Correo electrónico: fausto.guevaral@anahuac.mx



de [Prevención \(2022\)](#). Es aquí donde se estima que entre el 80% y 90% de los sismos a nivel mundial ocurre cada año. El Cinturón de Fuego tiene una longitud de 40,000km y se ubica en los extremos del Océano Pacífico (vea [Silva-Ortiz \(2019\)](#)).



Figura 1 Cinturón de Fuego. Obtenida de [Centro Nacional de Prevención \(2022\)](#).

México forma parte de esta formación geológica en su extremo Poniente. De acuerdo con el Servicio Sismológico Nacional (SSN), México se encuentra en el contexto de cinco placas tectónicas: Caribe, Pacífico, Norteamérica, Rivera y Cocos representadas en la Figura 2, obtenida de [Centro Nacional de Prevención de Desastres \(2022\)](#). Las últimas dos se encuentran en subducción debajo de la placa de Norteamérica. Rivera se sumerge bajo Jalisco y Colima, mientras que Cocos lo hace debajo de Michoacán, Guerrero, Oaxaca y Chiapas.

Fecha	Sismos	(0, 4.9)	(5, 5.9)	(5.9, 8.9)
1992	614	586	27	0
2002	1689	1,645	40	4
2020	30130	30,094	33	3
2021	29030	28,456	32	2

■ **Tabla 1** Número de sismos en México.

La placa de Cocos continúa al sur de Chiapas y en Centroamérica, pero ahora subduciendo debajo de la placa del Caribe (vea [Servicio Sismológico Nacional \(1988\)](#)).



Figura 2 Placas Tectónicas México. Obtenida de [Centro Nacional de Prevención de Desastres \(2022\)](#).

Las regiones de subducción previamente mencionadas provocan que México este dentro de los diez países con mayor actividad sísmica en el mundo (cf. [Silva-Ortiz \(2019\)](#)). El número total de sismos registrados en el mundo y específicamente en México es dependiente del número de estaciones sismológicas y de la presión de la misma. La tabla siguiente tiene el número de sismos registrados con una magnitud menor a 5.0 en la escala de Magnitud Momento (M_w) obtenidos de [Servicio Sismológico Nacional \(1988\)](#). Es importante notar que la cantidad de sismos crece acompañada de la cantidad de estaciones disponibles. Por ejemplo, en el año 2021 hay un total de 29,030 sismos en el país registrado mientras que solamente 1,689 en el año 2002. Esta diferencia no significa un aumento en la ocurrencia de sismos, sino en la capacidad de registrarlos. Un ejemplo de esto es la ocurrencia de sismos mayores a magnitud 5.9 en el periodo mostrado en la Tabla 2.1. En este caso, si bien hay una variación, existe un patrón para la cantidad de sismos para cada año. Esto se debe a que los sismos de mayor magnitud son más fáciles de detectar a pesar de que exista una menor cantidad de estaciones sismológicas.

Sismicidad: Consecuencias de los sismos

En gran parte del mundo, la sismicidad y las consecuencias sociales y económicas producidas por los sismos, de una zona está directamente relacionada con la distancia a las formaciones geológicas como el Cinturón de Fuego (vea [Meroni et al. \(2017\)](#)). En la mayoría de los casos, entre más cerca se encuentre a dichas formaciones,



mayor será la sismicidad de dicho lugar. Siguiendo este análisis, [Centro Nacional de Prevención de Desastres \(2022\)](#) clasifica al país en cuatro zonas. La zona de mayor sismicidad incluye a los estados de Baja California, Sonora, Nayarit, Colima, Jalisco, Michoacán Guerrero, Oaxaca y Chiapas.

En la región que comprende estos Estados y delimitada en color rojo en la Figura 3, obtenida de [Centro Nacional de Prevención de Desastres \(2022\)](#), es donde se puede esperar que sucedan sismos de gran magnitud con una frecuencia relativamente mayor al resto de las zonas. Es importante notar que, en el resto de las zonas, por ejemplo la Zona C, el tener una sismicidad menor no implica la imposibilidad de que se generen sismos de gran magnitud. La menor sismicidad solamente hace referencia al periodo de retorno de eventos de cierta magnitud. Mientras que en Estados como Guerrero o Oaxaca se esperan sismos que sobrepasen aceleraciones equivalentes al 70 % de la gravedad muy frecuentemente, en estados como Puebla o Morelos se espera una actividad constante, pero la aceleración no sobrepasará 70 % del valor de la gravedad. Una de las principales contribuciones de este trabajo es mostrar que la escala de Magnitud Momento se queda corta para asociar el riesgo de dicho sismo en la Ciudad de México, casos como el sismo de Washington en 2011 y Puebla en 2017 son ejemplos de este fenómeno y a continuación se elaborará al respecto.

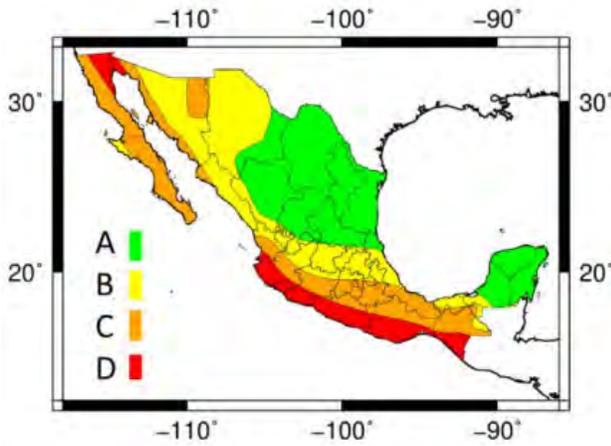
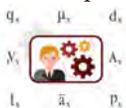


Figura 3 Sismicidad en México. Obtenida de [Centro Nacional de Prevención de Desastres \(2022\)](#).

Es importante mencionar que lugares como la Ciudad



de México están clasificados como zonas de bajo riesgo sísmico. Esto significa, que en el área que comprende la Ciudad de México, es poco probable que se originen sismos. Sin embargo, se sabe que en el Valle de México los sismos tienen consecuencias importantes. Es por ello que, es importante resaltar que la clasificación utilizando la Magnitud de momento y la frecuencia de sismos no resulta en un riesgo objetivo de daño por sismos. Si bien en lugares como Japón, Chile o Estados Unidos, el generar un mapa de riesgo sísmico como función principal de la Magnitud y localización del sismo resultó adecuado, para el caso particular de México resulta deficiente.

En los últimos 100 años la Ciudad de México ha tenido cuatro sismos de Momento Magnitud igual o superior a 7.0 y que han impactado considerablemente al Valle de México. Tres estos eventos tuvieron su origen en la costa del Pacífico y uno en la región clasificada como de baja sismicidad. Vea la tabla 2.

Tabla 2 Impacto económico de sismos.

Fecha	Richter	Pérdida	# daños	Pólizas
28.07.57	7.8	0	0	0
19.09.85	8.1	4,000.00	5,728	7,000
7.9.17	8.2	9,501.05	38,922	22,607
19.09.17	7.1	23,036.79	25,922	54,815

En 1957 el sismo fue de magnitud 7.8 y con epicentro en San Marcos, Guerrero. Para 1985, la magnitud se registró en 8.1 y punto focal en las costas de Michoacán. En 2017 hubo dos sismos, uno en Oaxaca de magnitud 8.2 y el segundo días después en Puebla de magnitud 7.1. Si bien, en estos cuatro sismos hubo afectaciones en la zona del epicentro del sismo, de acuerdo con información recolectada (vea [Silva-Ortiz \(2019\)](#)) una importante parte de los daños se encontraron en la Ciudad de México. La tabla 2 presenta los montos por daños y número de edificaciones afectada en cada sismo, así como el valor de recuperación de las aseguradoras.

Aceleración: Un nueva forma de medir un sismo

Los movimientos telúricos producen dos tipos de ondas: *P* y *S*. Las ondas de tipo *P* (parte superior de la Figura 4, obtenida de [Elnashai and Sarno \(2008\)](#)) tienen velocidad de 1.5km/h hasta 8km/h, mientras que las ondas *S* (parte inferior de la Figura 4) tienen entre un 50 % y 60 % de la velocidad de la onda *P*. En general, las

ondas S son las que generan eventos destructivos, mientras que las ondas P son utilizadas para los sistemas de alarma sísmica, ya que son las primeras en sentirse y no tienen un gran poder destructivo. Las dos ondas sísmicas, conforme avanzan, disipan energía y pierden frecuencia y capacidad destructiva. En el epicentro de los sismos, las ondas tienen un mayor poder destructivo en suelos con frecuencia alta, es decir suelos rocosos. Conforme avanzan, la frecuencia disminuye y las ondas se vuelven más peligrosas en suelos arcillosos por su frecuencia de resonancia.

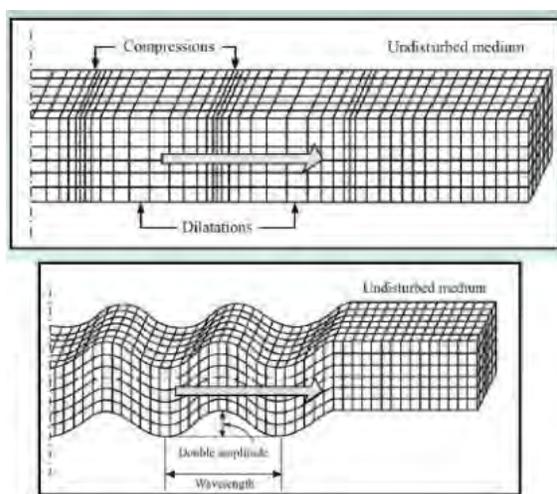


Figura 4 Tipos de ondas sísmico. Obtenida de [Elnashai and Sarno \(2008\)](#).

En la Ciudad de México, éste es el fenómeno de amplificación que sucede por el tipo de suelo. En otras condiciones, con suelo rocoso, los sismos que se originan en el Pacífico no deberían de provocar daños catastróficos en el Valle de México. La Figura 5, obtenida de [U.S. Geological Survey \(1985\)](#), muestra la aceleración del suelo para el sismo de 1985. Entre más cálido es el color, mayor es la aceleración; y entre más frío es el color, menor es la aceleración del suelo. Es importante notar que la aceleración del suelo está altamente ligada a la magnitud del sismo en la cercanía al epicentro, en este caso representado por una estrella color naranja. Una observación rápida de esta Figura es que conforme crece la distancia con respecto al epicentro, la aceleración disminuye para la gran parte de lugares. Este no es el caso del Valle de la Ciudad de México

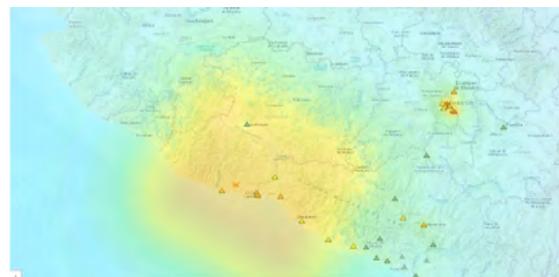


Figura 5 Tipos de ondas sísmico. Obtenida [U.S. Geological Survey \(1985\)](#).

En el Valle de México, por tener suelos arcillosos de gran profundidad, las ondas generan resonancia con el subsuelo y provocan movimientos superficiales comparables o mayores a los presentados en el epicentro del sismo. Con esta información, y después del sismo de 1985, se generó un nuevo mapa de riesgo sísmico dadas las condiciones del Valle de México, el cual se muestra en la Figura 6 y correspondiente a la normativa de CDMX. Ahí, el color rojo significa un área de alto riesgo, mientras que el gris es de menor riesgo. El color verde corresponde a porciones del territorio con condiciones lacustres las cuales tienen asentamientos importantes de varios centímetros por años y que en los sismos se pueden exponer estas deficiencias. Es ampliamente conocida la medición de los sismos en la escala de Magnitud Momento que va de 0.0 a un valor máximo presentado de 9.1 (Sismo de Chile), aunque teóricamente pueden llegar a ocurrir sismos de mayor magnitud. Para lugares cercanos al epicentro del sismo, esta escala es una buena forma de medir la intensidad y relacionarla con el riesgo que presenta el sismo a la sociedad, ya que la escala de Magnitud Momento es el valor de la disipación de energía en el epicentro (vea [Teshamariam and Goda \(2013\)](#)). La Ciudad de México no es una buena representación de esto, ya que suele estar a una distancia mayor de 500km del epicentro y mucha de la energía ya se ha disipado. El Gobierno de la Ciudad de México en conjunto con especialistas del CENAPRED e investigadores de múltiples instituciones decidieron adoptar la escala de Gales, $1Gal = 1cm/s^2$ en 2018. En esta escala, entre mayor sea la magnitud, mayor será la sensación del sismo y el daño esperado. Esta es una representación de la aceleración, y no de la intensidad de energía, que presenta el suelo en el sitio de medición. Es importante notar que un sismo de mayor magnitud, como el de Oaxaca de 2017, produce una menor aceleración que el sismo de Puebla del mismo año.



Fecha	Epicentro	Richter	Acel. SCT	Acel. CU
1985	Mich.	8.1	164	30
2019	Oax.	8.2	90	20
2019	Pue.	7.1	133	57

■ **Tabla 3** Comparación entre magnitudes y aceleraciones. Obtenido de *Servicio Sismológico Nacional (1988)*.

Esto resalta la importancia de adoptar el sistema de Gales en lugar de la tradicional escala de Magnitudes para el análisis de riesgo sísmico. También es importante comparar la dependencia de la aceleración con el tipo de suelo. La estación ubicada en CU y correspondiente a la última columna se encuentra en suelo rocoso, y tiene valores muy inferiores a la estación ubicada en las oficinas de la SCT y que se desplanta en suelo más blando.

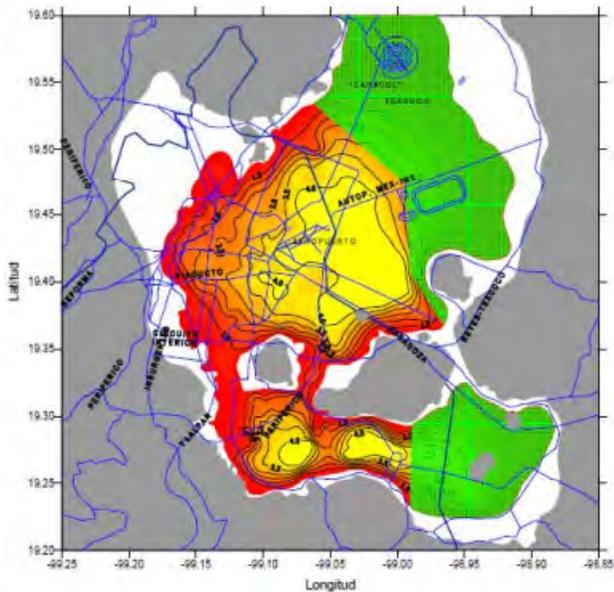


Figura 6 Tipos de ondas de sismo. Obtenida de *Gobierno de la Ciudad de México (9 de junio de 2020)*.

La tabla 3 muestra que hay una interacción entre la Magnitud del sismo, el epicentro, distancia entre el epicentro y el lugar en el que se percibe el sismo y el tipo de suelo de dicho lugar para tener una aceleración del sitio y con eso un riesgo sísmico. Adicional a esto, es ampliamente conocido en el sector de ingeniería sísmica, que el



tipo de estructura también impacta en dicha interacción (ver *Abo-El-Ezz et al. (2013)*; *Atkinson and Goda (2013)*; *Díaz et al. (2018)*; *Freddi et al. (2021)*; *Jara et al. (2017)*; *Sancha et al. (2019)*). Esto quiere decir que dos estructuras diferentes ubicadas en el mismo sitio “sentirán” un sismo diferente. Este punto es de vital importancia para el cálculo de riesgo sísmico, ya que las diferencias en afectaciones pueden ser muy grandes y para la percepción contraintuitivas.

La Figura 7 muestra las aceleraciones para los sismos del 19 de septiembre del 2017 con epicentro en Puebla y para el sismo del 19 de septiembre de 1985 con epicentro en Michoacán para las estaciones de CU y de la SCT de datos obtenidos de *Centro Nacional de Prevención (2022)*. Realizando un análisis espectral de las edificaciones tipo, se presenta la aceleración esperada para el número de pisos en cada estación y para cada sismo.

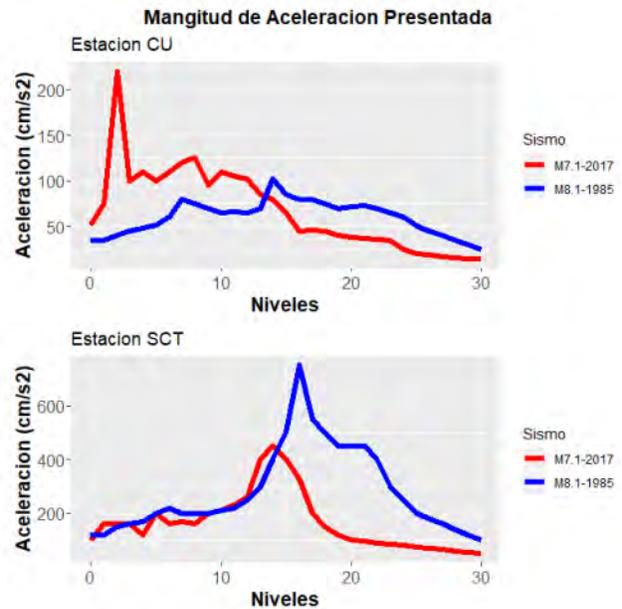


Figura 7 Aceleración Espectral

La aceleración para una edificación de aproximadamente tres niveles para el sismo del 2017 cercano a la estación de CU tiene un valor cercano a 22.5Gal. Para ese mismo sismo, pero para una edificación de quince niveles, la aceleración hubiera tenido un valor cercano a 6.0Gal. Esta diferencia es a la inversa, pero de mayor magnitud si el tipo de suelo se cambia de rocoso a suelo

blando. Suponiendo el sismo del 2017 para una edificación de tres niveles cercana a la estación de la SCT, el valor de aceleración sería de aproximadamente 18Gal, mientras que si la edificación fuese de quince niveles la aceleración hubiera alcanzado 40Gal. Un análisis similar se puede realizar comparando los sismos de 1985 y 2017 con resultados semejantes: la aceleración en la edificación es dependiente del epicentro del sismo, la magnitud, la distancia entre el epicentro y la edificación, el tipo de suelo en la edificación y las características estructurales y arquitectónicas de dicha edificación. Un modelo de riesgo sísmico para edificaciones de la ciudad de México debe de incluir todas estas características el momento de calcular el nivel de exposición de riesgo de lo contrario estará mal representando las consecuencias a las que se podría enfrentar la edificación.

Un valor de aceleración mayor está fuertemente ligado a una mayor magnitud de posible daño y por ende de pérdida esperada. Un modelo robusto para la evaluación de riesgo sísmico debería poder pronosticar adecuadamente el nivel de aceleración y su consecuencia económica. Sin embargo, como se describe anteriormente, obtener la posible aceleración y su afectación a las edificaciones depende de varias características que en ocasiones se contraponen.

En la actualidad, en México existe un modelo de riesgo estatutario desarrollado por [Servicio Sismológico Nacional \(1988\)](#) en colaboración con ingenieros de la Universidad Nacional Autónoma de México. Este modelo se ha utilizado en la industria por más de 20 años y es pieza fundamental para la generación de las pólizas catastróficas en nuestro país al entregar el valor de la Prima Pura o Pérdida Esperada al asegurador. Sin embargo, este modelo reportó una sobrestimación de las pérdidas obtenidas como consecuencia de los dos sismos del 2017. Todavía se encuentran en proceso de revisión del modelo, pero con números iniciales reportan una sobrestimación del 36% por una mala base de datos, 45% por actualización de amenazas, 41% por actualización de efectos en edificaciones, entre otras modificaciones (vea [Franco \(2021\)](#) y [Centro Nacional de Prevención \(2022\)](#)). Si bien, el modelo presentado en [Servicio Sismológico Nacional \(1988\)](#) tiene un número importante de variables, el tener un error de estimación del 45% habla de la debilidad del modelo mismo.

El objetivo de este trabajo es presentar un modelo robusto para la cuantificación de riesgo y la generación de pólizas de seguro catastrófico tomando en cuenta las variables y utilizando información de fácil acceso para el generador de pólizas. El resto del trabajo se divide

en cuatro secciones. La sección 2 aborda la forma en la que cada una de variables que impactan el análisis de riesgos para sismos ha sido formulada y adaptada en el área de seguros. La sección de Metodología presentará una nueva formulación que conjuga las variables en una función de riesgo. La tercera sección, Aplicación, tiene como propósito adaptar dicha nueva formulación a edificaciones de la CDMX para calcular el valor de Prima Pura de un seguro catastrófico. Finalmente, la sección de Conclusiones presenta un análisis de los resultados obtenidos en la sección de Aplicación.

2. MARCO TEÓRICO

El modelo presentado en este trabajo consta de tres partes mostradas en la Figura 8. La primera consiste en la generación del fenómeno perturbador, en este caso sismos. El siguiente paso es la caracterización estructural de la edificación a analizar. El último paso es el cómputo de la consecuencia económica dada la interacción de las dos primeras partes.

Generación Sintética de Sismos

Es imposible predecir la magnitud, ubicación y fecha del siguiente sismo en la actualidad. Múltiples estudios se han enfocado en analizar bases de datos y con ellas encontrar relaciones de frecuencia y magnitud de los sismos (vea [Teshamariam and Goda \(2013\)](#) y [Sawires et al. \(2019\)](#)). Este es un camino indirecto para el entendimiento de cómo se originan los sismos, ya que el análisis del pasado no implica el entendimiento de las causas que generan a los sismos. Por otro lado, existen los investigadores que entendiendo que los sismos son un mecanismo de disipación de energía, intentan calcular el nivel de energía acumulada entre las placas tectónicas para estimar futuros movimientos ([Monterrubio-Velasco et al. 2020](#)). En este caso, el alto grado de variabilidad del medio analizado, falta de observaciones y de capacidad de análisis, hace muy complicado extrapolar un estado actual a un comportamiento futuro. En teoría, la probabilidad anual de exceder un sismo de magnitud dada por la expresión

$$P(M > mag) = \lambda \int_{W_{m,r}} \int P(M > mag | m, r) f_{M,R} dmdr,$$

donde λ en la tasa de ocurrencia del sismo, $P(M > mag | m, r)$ es la probabilidad de que el sismo excedan el nivel mag dada una magnitud mag y una distancia r , y $f_{M,R}$ es la función de densidad de probabilidad en el dominio $\Omega_{m,r}$.



La visión que propone una relación causa-efecto es la deseada para explicar con objetividad los fenómenos físicos. Por ejemplo: es mucho más poderoso el entendimiento de la fuerza gravitacional, $F = mg$ para explicar que un objeto al no estar sostenido tenderá a acercarse al centro de la Tierra (caerá), que decir que, dado que se ha observado que los objetos caen, el siguiente también caerá. Sin embargo, el entendimiento científico aún no tiene la información suficiente para entender los sismos. Por esta razón es que, en este y otros modelos, la información histórica resulta una herramienta adecuada. Esto quiere decir que los sismos del futuro, estarán dentro de las estimaciones que se realicen hoy. Dada la complejidad y falta de información y la amplia efectividad de los modelos históricos, este trabajo propone utilizar valores históricos para predecir el comportamiento futuro de los sismos.

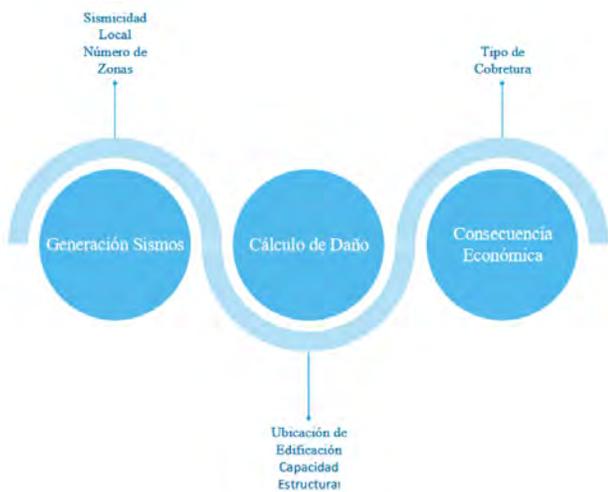


Figura 8 Modelo propuesto.

Frecuencia. Dentro de las relaciones históricas, el modelo de Gutenberg-Richter estima la frecuencia de sismos de hasta cierta magnitud siguiendo una relación lineal. Esta relación es tal que $M \leq \ln N = a - bM$, donde N es el número acumulado de sismos con magnitud mayor o igual que M . Los parámetros a y b son dependientes de la sismicidad local y se calculan, en el caso más simple, con regresiones lineales (vea Hong *et al.* (2009)). La Figura 9 tiene la relación para México contemplando los sismos registrados entre 1985 a 2021 y con una Magnitud mayor a 3.0. Conforme va creciendo la variable b , el número de sismos de mayor magnitud decrece. Existen versiones



modificadas de esta relación, algunas con mayor cantidad de componentes lineales. Estas agregan características de la zona, como tipo de placa, tipos de falla presentadas (frágiles o dúctiles), o longitud de zona de contacto (vea Zúñiga *et al.* (2017)). Otros modelos incluyen regresiones no lineales con dos o más características de las antes mencionadas pueden encontrarse en, por ejemplo, Arroyo *et al.* (2010); Cruz Atienza *et al.* (28 de septiembre 2017); Hariyanto *et al.* (2021); Sawires *et al.* (2019, 2021); Yao *et al.* (2021).

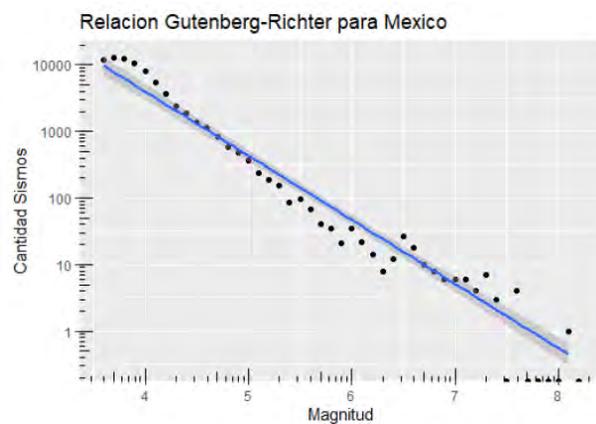


Figura 9 Relación Gutenberg-Richter. Elaboración propia con datos obtenidos de Servicio Sismológico Nacional (1988).

Este trabajo utiliza la relación simple de Gutenberg-Richter por dos razones:

1. La cantidad de información para alimentar el modelo es escasa.
2. Como se vio previamente, la cantidad de sismos registrados está altamente correlacionada con el número de estaciones sismológicas.

En el primer caso, el tener un modelo muy complejo no necesariamente resultaría en un modelo más robusto, ya que no existe la información para todos los parámetros. Para el segundo caso, es importante constatar como en diez años el número de sismos registrado en México ha crecido más de diez veces. Las relaciones que aplicaban hace diez años, no aplicarían hoy. Por consiguiente, encontrar una relación de orden mayor sería muy difícil. Estas dos limitantes implican un problema espistémico, en donde el problema no es originario del modelo sino

de los datos. También es importante notar que al utilizar la relación Gutenberg-Richter el objetivo era no intentar encontrar el origen o explicación de la frecuencia o magnitud de los sismos, ya que se asume que es un ejercicio más complejo de lo necesario. Si se utiliza un modelo más desarrollado, esa hipótesis quedaría descartada.

Una ventaja más de la Relación Gutenberg-Richter es que supone que los sismos son eventos que siguen una distribución Poisson tal que $X \sim P(\lambda)$ donde X es el siguiente evento sísmico y λ es una relación tal que $\lambda = \frac{e^{-\beta M_{\min}} - e^{-\beta M_{\max}}}{1 - e^{-\beta M_{\max}}}$ N_0 , donde N_0 es el número de sismos en el tiempo inicial, $\beta = b \ln 10$, y M_{\min} , M_{\max} corresponden a las magnitudes mínima y máxima registradas en la zona analizada. Esto genera que el siguiente evento sísmico ocurrirá en un tiempo t dado que $t = -\frac{\ln(1-u)}{\lambda}$, con $u \sim U(0, 1)$.

Intensidad La misma Relación Gutenberg-Richter tiene la posibilidad de calcular la Magnitud Momento M del siguiente sismo asociado a un tiempo de ocurrencia t calculada en la sección anterior dada la siguiente expresión descrita en [Teshamariam and Goda \(2013\)](#):

$$M = \frac{\ln \left(e^{-\beta M_{\min}} - (1 - u) \right) \left(e^{-\beta M_{\min}} - e^{-\beta M_{\max}} \right)}{\beta} \quad (1)$$

Es importante notar que la Relación Gutenberg-Richter calcula mediante un método de probabilidad basado en observaciones pasadas el tiempo al siguiente sismo y la magnitud correspondiente de dicho sismo. Entre más nutrida sea la base de datos de la zona generadora de sismos, mayor será la confiabilidad del modelo. Una problemática de este método es que no puede predecir lo que no ha visto. En la formulación de la siguiente magnitud, (1) supone magnitudes máxima y mínima. Esto implica que si la base de datos tiene una magnitud máxima de 8.2, el modelo jamás producirá un sismo futuro de magnitud 8.5. Pese a esta ausencia (1) es una forma objetiva de describir el comportamiento futuro dado el pasado.

Ubicación del hipocentro. El origen del sismo o hipocentro por sí solo no es una característica fundamental que afecte el riesgo sísmológico de un lugar. Lo importante a considerar es la distancia que existe entre dicho hipocentro y la edificación a analizar. En la teoría de sismos se analizan dos distancias:

- La profundidad del hipocentro a la superficie, denominada profundidad focal.

- La distancia del epicentro que es la longitud del epicentro al sitio a analizar.

La figura 10 muestra conceptualmente las distancias.

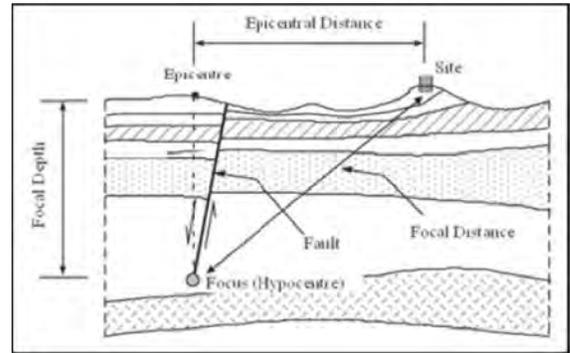


Figura 10 Distancias sismo. Obtenida de [Elnashai and Sarno \(2008\)](#).

De acuerdo con su profundidad, los sismos se pueden catalogar como superficiales (5 a 15km), intermedios (20 a 50km) y profundos (300 a 700km). Esta profundidad está muy relacionada al tipo de sismo que produce. Por ejemplo, el sismo del 19 de septiembre del 2017 al ser intraplaca, tuvo una profundidad mayor a los 300km. Por otro lado, el sismo del 7 de septiembre del 2017 fue superficial, ya que el mecanismo que lo generó fue el choque entre dos placas. Esto quiere decir que la zona en la que se genere el sismo definirá un estimado de su profundidad. No se espera que a las orillas de la costa de Oaxaca existan sismos muy profundos así como en el interior de la república se generen sismos superficiales.

A falta de un criterio más adecuado, la profundidad H y la distancia al epicentro R se suponen variables aleatorias uniformes con valores mínimos y máximos correspondientes a las distancias mínimas y máximas que existen entre una zona de falla y el sitio a analizar. O sea,

$$R \sim U(r_{\min}, r_{\max}), \quad (2)$$

$$H \sim U(h_{\min}, h_{\max}). \quad (3)$$

Las características de Magnitud, tiempo de ocurrencia y distancias son las fundamentales para describir el fenómeno telúrico. A continuación, se tratará la metodología para "llevar" ese movimiento al sitio, y después el comportamiento de la estructura.



Aceleración vs Magnitud

Como mencionamos en la sección 1, la importancia de trabajar con aceleraciones en lugar de magnitudes para calcular el riesgo sísmico. Es importante denotar que la aceleración depende de varias variables; entre ellas, la magnitud del sismo. En la literatura existen varios análisis para transformar magnitudes a aceleraciones. Por ejemplo, [García \(2005\)](#); [Hong and Goda \(2010\)](#); [Goda et al. \(2010\)](#); [Monterrubio-Velasco et al. \(2020\)](#); [Goda et al. \(2020\)](#). Muchos de ellos coinciden en que este factor de transformación, además de ser una función de interpolación, es altamente dependiente de la zona que se analice (vea también [Hariyanto et al. \(2021\)](#); [Yao et al. \(2021\)](#); [Zúñiga et al. \(2017\)](#); [Kunreuther and Heal \(2012\)](#)). Esto quiere decir que las funciones de transformación para un evento interplaca deben de ser diferentes a las funciones intraplaca. Asimismo se sugiere que los valores de interpolación sean ajustados a la localidad que se requiere. Por ejemplo, la función de transformación de la Ciudad de México debe de calibrarse con mediciones de la Ciudad de México, y no con los resultados obtenidos en Oaxaca. Estas características hacen que los análisis dependan de información que en algunos casos no existe, o es difícil de conseguir.

Para el caso de México, [Liu et al. \(2016\)](#) realizaron un análisis de regresión para obtener la función de transformación entre la magnitud del sismo y un valor de aceleración. Esta función es conocida como función de atenuación y para sismos intraplaca es

$$\log y = c_1 + c_2(M - 6) + c_3(M - 6)^2 + c_4 \log R + c_5 + \varepsilon, \quad (4)$$

donde M es la magnitud del sismo registrada a la mínima distancia focal R , y para $i = 1, \dots, 5$, c_i son las constantes de la regresión. Para el caso de sismos interplaca, la función de atenuación que mejor se adapta a las características de México es

$$\log y = c_1 + Mc_2 + Rc_3 - c_4 \log R + Hc_5 + \varepsilon. \quad (5)$$

En (4) y (5), y corresponde al valor de la aceleración espectral SA que se utiliza como fuente de diseño de las edificaciones en correspondencia con [Gobierno de la Ciudad de México \(9 de junio de 2020\)](#).

Previamente, se hizo mención de que el tipo de suelo afecta el nivel de aceleración presente en el sitio. Las relaciones (4) y (5) incluyen esta variabilidad al cambiar los coeficientes c_i para $i = 1, \dots, 5$, dependiendo del período fundamental T_n del suelo en donde se realiza el análisis. Es decir, para suelos con $T_n < 1.0s$ característicos



de suelos rocosos, los coeficientes serán diferentes a los suelos con $1.0s < T_n < 3.0s$, que corresponde a suelos blandos.

Caracterización de la Estructura

Las normas descritas en [Gobierno de la Ciudad de México \(9 de junio de 2020\)](#) proponen dos límites de diseño denominados:

- Diseño de servicio,
- Diseño de prevención de colapso.

Dentro de estos límites del diseño se pretende que cualquier estructura construida dentro del Valle de México resista cualquier sismo que pueda afectarla durante su vida útil. Para lograr este comportamiento resistente, la norma propone realizar análisis diferentes dependiendo el tipo de estructura. Estos análisis son complejos y dependen ampliamente de información específica de la estructura. El propósito de los análisis en la reglamentación es obtener el Período Natural de la estructura y someterla a un movimiento sísmico genérico de gran magnitud. La estructura para ser adecuada no debe presentar fallas después de la exposición al sismo. Este sistema de diseño es adecuado para el mundo de la ingeniería ya que se ha comprobado que la respuesta de la estructura se encuentra dentro de los rangos esperados. Sin embargo, no puede ser utilizado para la generación de coberturas ya que es un método con un sólo análisis que limita el nivel de exposición de otros sismos.

En la literatura se ha desarrollado la metodología denominada como Fragilidades (vea [Abo-El-Ezz et al. \(2013\)](#); [Sancha et al. \(2019\)](#); [Freddi et al. \(2021\)](#); [Atkinson and Goda \(2013\)](#); [Jara et al. \(2017\)](#); [Díaz et al. \(2018\)](#)). El objetivo de esta técnica es describir el comportamiento de una estructura siguiendo características generales de la misma dada la respuesta de otras estructuras similares analizadas con anterioridad. Es un método indirecto de respuesta estructural pero ampliamente usado en análisis que requieren probabilidad condicional de estructuras como análisis sísmico (vea [Sancha et al. \(2019\)](#); [Del Gaudio et al. \(2015\)](#); [Díaz et al. \(2018\)](#)). El objetivo de esta metodología es obtener un nivel de daño dado un nivel de esfuerzo tal que

$$P(ds \geq ds_i | SAE) = \Phi \left(\frac{\log \frac{SAE}{100} - \log \mu}{\sigma} \right), \quad (6)$$

donde ds es el nivel de daño de la estructura, SAE es el nivel de esfuerzo provocado por la aceleración, μ y σ son (respectivamente) la media y la desviación estándar

de la ductilidad específica de la edificación, y Φ es la distribución normal.

La Fragilidad supone una componente de probabilidad del comportamiento estructural al asignarle un valor μ a la ductilidad de la estructura. Esta ductilidad es la capacidad de deformación dado un esfuerzo. Se supone también que, a mayor ductilidad, mayor será la resistencia de la estructura para soportar daños (vea [Sancha et al. \(2019\)](#)). Es importante mencionar que la ductilidad está altamente ligada a las propiedades de las estructuras (vea [Díaz et al. \(2018\)](#); [Freddi et al. \(2021\)](#); [Meroni et al. \(2017\)](#); [Sancha et al. \(2019\)](#)). Además, se ha estudiado que es dependiente de la zona en la que se encuentre la edificación ([Díaz et al. \(2018\)](#)) debido a los reglamentos locales. Esto quiere decir que un edificio de estructura de concreto de cinco niveles tendrá un valor de ductilidad diferente en la Ciudad de México y en Estados Unidos.

El trabajo [Sancha et al. \(2019\)](#) presenta un análisis de ductilidad para estructuras en México. La figura 11 muestra los resultados para los valores propuestos y su respectivo nivel de daño de la estructura. Por ejemplo, para una estructura definida por la línea en color azul, una aceleración correspondiente a 1.0 gravedad equivaldría a un daño cercano al 5% de la estructura. Por otro lado, esa misma aceleración para una estructura representada por la línea morada tendría un daño equivalente al 90% de la estructura. Las curvas de fragilidad son una aproximación rápida para obtener daños esperados dadas condiciones de esfuerzo, en este caso, aceleración.

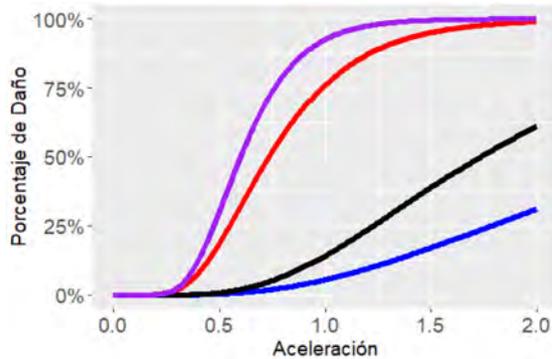


Figura 11 Curvas de Fragilidad para diferentes resistencias. Elaboración propia con datos de [Díaz et al. \(2018\)](#).

Cálculo de la Póliza de Seguro

Siguiendo estándares actuariales, la cobertura de una edificación para un sismo debe ser equivalente al daño

esperado dado un nivel de riesgo. Esto equivale a la expresión

$$v_{PD}(\geq pd) = \int_{\Omega_{SAE}} P(PD \geq pd|SAE) f_{SAE}(sae) dsae, \quad (7)$$

donde $P(PD \geq pd|SAE)$ es la función de fragilidad mencionada anteriormente dado una aceleración, y $v_{PD}(\geq pd)$ es la probabilidad de exceder un estado pd en un tiempo de un año.

La relación (7) puede ser manipulada para que en lugar de representar el valor de daño, sea correspondiente a una prima esperada tal que

$$PP_i := \sum_{j=1}^{N_0} \int_{pdmin}^{pdmax} -\frac{d\beta_j(pd)}{dpd} E(PR_i|pd, j) dpd, \quad (8)$$

donde PP_i equivale a la prima pura o pérdida esperada dado el factor de daño pd y el origen de dicho factor N_0 . La Prima Pura es el punto de equilibrio que representa el promedio ponderado de las pérdidas. Sin embargo, la normativa requiere tener un nivel de confianza con un Periodo de Retorno de 1500 años. Una forma de llegar a este nivel de apetito de riesgo es utilizar la siguiente expresión.

$$\begin{aligned} \mu(k) &:= \sum_{j=1}^{N_0} \int_{pdmin}^{pdmax} -\frac{d\beta_j(pd)}{dpd} P(PR|pd, j) dpd \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{1}{1500}\right), \end{aligned} \quad (9)$$

donde $1 - \exp\left(-\frac{1}{1500}\right)$ es el valor que marca la reglamentación como límite de diseño. Note que (9) implica el conocimiento de varios fenómenos aleatorios y la interacción entre ellos. Este modelo incluye variables aleatorias como son: la magnitud del sismo, el intervalo entre sismos, la ubicación del hipocentro, la ductilidad de la estructura, entre otros. En la práctica cuando existen relaciones complejas entre variables, es preferible realizar una simulación computacional en gran escala (por ejemplo usando el método Monte Carlo) para con ella, conocer el comportamiento de las variables juntas y llegar a describir parcialmente el fenómeno multivariado. En este caso, el valor esperado de la pérdida o Prima Pura se convierte en el promedio de las simulaciones y una forma de llegar al valor de la probabilidad $1 - \exp\left(-\frac{1}{1500}\right)$ es utilizando los valores de promedio $\mu(pd)$, desviación



estándar $\sigma(pd)$, y un escalar ω tal que

$$1 - \exp\left(-\frac{1}{1500}\right) < \mu(pd) + \sigma(pd) \cdot \omega. \quad (10)$$

El escalar ω es una forma de evaluar el desempeño de una edificación. Entre mayor sea este valor proporcionalmente a la desviación estándar, la estructura será más resistente, ya que es menos probable que sufra daño durante los eventos perturbadores.

3. METODOLOGÍA

Este estudio tiene como objetivo la generación de un nuevo modelo para calcular la Pérdida Esperada para una Edificación al ser afectada por sismos. La sección 2 describe la complejidad de dicho análisis, ya que implica la interacción de muchas variables aleatorias. En la literatura se ha optado por obtener resultados utilizando Simulaciones de Monte Carlo y después calculando los valores esperados de dichas simulaciones. Este trabajo sigue el mismo patrón, y para obtener el valor de la Pérdida Esperada, utiliza un gran número de simulaciones.

La figura 12 representa el proceso a seguir para la generación de las pólizas de sismo de acuerdo con la sección 2. El método inicia con la selección de variables

- Zonas de afectación y su sismicidad
- Número Edificaciones y sus características estructurales
- Número de Simulaciones

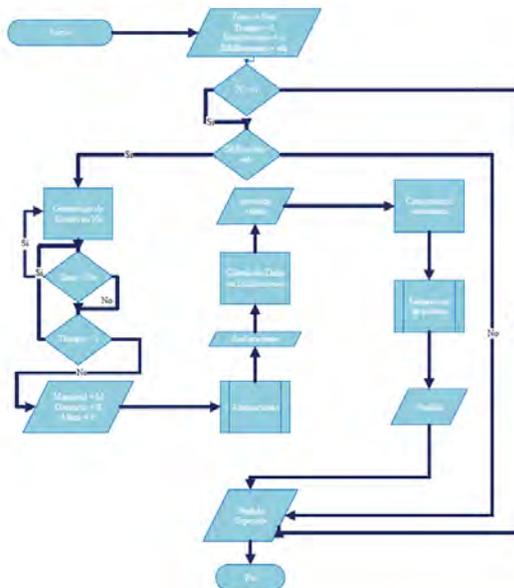
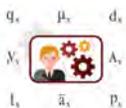


Figura 12 Algoritmo para generar pólizas.

Los parámetros que afectan la sismicidad de la zona son: cantidad, magnitud y periodicidad de sismos, distancia entre la zona y el sitio a analizar, tipo de falla que genera sismos. Para el segundo bloque, el modelo toma en consideración: el tipo de estructura, número de niveles, valor de reposición, ubicación. Finalmente se define un número de simulaciones límite. El objetivo es tener un criterio de paro en simulaciones: la reducción de la desviación estándar entre resultados de simulaciones diferentes.

La sección 2 comenta la existencia de tres componente para calcular el riesgo sísmico de una edificación:

- Generación de Sismos.
- Comportamiento de la edificación ante el fenómeno perturbador.
- Calcular la Pérdida Esperada de dicho comportamiento para tener un nivel de cobertura.

De forma semejante, la metodología aquí propuesta inicia con el cálculo de la actividad sísmica. El proceso inicia seleccionando una de las zonas que tienen injerencia para el sitio a analizar. En dicha zona se calcula el tiempo de ocurrencia del siguiente sismo siguiendo la Relación Gutenberg-Richter, su Magnitud correspondiente utilizando (1), y su ubicación dentro de la zona con (2)-(3).

Si el tiempo de ocurrencia es menor al tiempo definido como límite t , este proceso se repite hasta alcanzar el máximo permitido. Una vez que se llega a este valor, se prosigue a repetir el mismo análisis con la siguiente zona y así sucesivamente hasta completar el número de zonas definidas que afecten al sitio *NoZonas*. Este paso genera todos los sismos y sus magnitudes a los cuales puede estar expuesta la edificación durante el tiempo analizado, es decir una simulación. Por esta razón es que el procedimiento se repite *si* veces.

El proceso antes descrito genera todas las simulaciones de los posibles sismos que afectarán a las edificaciones analizadas. El siguiente paso es transformar dichos sismos a aceleraciones. Para este proceso, al sismo registrado por cada zona se le aplican (4) o (5), dependiendo de si es un sismo de Zona en Subducción o Intraplaca. Para este proceso es necesario tener la información de la Edificación a analizar como el Periodo Natural de la estructura T_n , así como su ubicación y tipo de suelo en donde se desplanta la edificación. En este segundo bloque, el modelo calcula las aceleraciones correspondientes a cada uno de los sismos registrado en el bloque anterior por cada zona y por cada simulación.

El modelo prosigue a calcular la afectación en la estructura o daño una vez que se tienen las aceleraciones. Para este apartado, el modelo utiliza el concepto de Fragilidad visto en el Marco Teórico y representado en (6). En este punto es importante mencionar que el daño total de la estructura en una simulación es la acumulación de los daños individuales que genere cada uno de los sismos presentados en cada una de las zonas que se analizan. Es decir que, si a una estructura la afectan dos sismos en una simulación y estos producen un daño del 10 % cada una, el daño de la simulación será del 20 %, y no del 10 %.

Finalmente, el modelo utiliza el número total de simulaciones para calcular los valores de Pérdida Esperada y la Pérdida Máxima a cierto nivel. En este punto es donde el Método Monte Carlo se utiliza para poder describir el comportamiento de las Pérdidas y generar sus respectivas coberturas.

La siguiente Sección ejemplifica esta metodología utilizando el caso de varias edificaciones ubicadas en la Ciudad de México y las zonas generadoras de sismo que pueden llegar a afectar a dicha ubicación.

4. APLICACIÓN

Datos de Inicio de Simulación

Esta sección muestra la metodología propuesta en el apartado anterior para 20 pólizas de seguros catastróficos

en la Ciudad de México. Siguiendo las recomendaciones del Marco Teórico, este ejercicio propone utilizar 16 zonas sísmicas presentes en la República Mexicana y que pueden tener injerencias en el comportamiento sísmico de la Ciudad de México. Estas 16 zonas se presentan en la tabla 4 y están representadas en la figura 13 con sus respectivos valores de Magnitudes observadas y profundidades de hipocentro posibles. Los valores de la Tabla como las Figuras se obtuvieron de un análisis exhaustivo realizado por Zúñiga *et al.* (2017).

■ **Tabla 4** Descripción de las Zonas Sísmicas en México.

Zona	a	b	$Mw_{\text{mín}}$	$Mw_{\text{máx}}$	$h_{\text{mín}}$	$h_{\text{máx}}$
SUB1	0.55	2.39	2.80	8.2	0	40
SUB2	0.75	3.95	2.60	8.0	0	40
SUB3	0.77	4.20	2.70	7.8	0	40
SUB4	0.75	4.07	3.20	7.7	0	40
IN1	0.80	3.50	2.70	7.2	40	180
IN2	0.83	3.77	2.70	7.8	40	255
IN3	0.82	4.35	3.00	7.9	40	460
BC1	0.69	2.92	1.30	7.1	0	20
BC2	0.57	3.27	1.40	7.2	0	15
SMO	0.65	2.21	3.00	5.7	0	20
MVB	0.78	2.90	2.09	5.7	0	20
NAM	0.99	4.15	3.00	5.7	0	20
RIV2	0.42	2.20	3.60	6.9	0	20
GMX	0.77	2.50	2.80	5.3	0	20
BB	0.60	1.88	3.00	5.0	0	20
BAR	0.68	1.72	2.90	6.5	0	20

Los coeficientes para las ecuaciones de atenuación (4)-(5) se obtenidos del estudio realizado por Arroyo *et al.* (2010) y se muestran en la figura 14 para zonas de Subducción, y en la figura 15 para zonas de Intraplaca, ambas obtenidas de la misma fuente. Es importante resaltar que estos coeficientes cambian de acuerdo con la estructura. La tabla 5 tiene los valores para un análisis de $T_n = 1, 0s$.



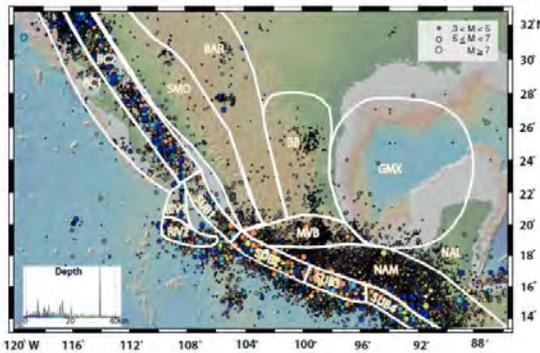


Figura 13 Zonas Subducción. Obtenida de Arroyo *et al.* (2010).

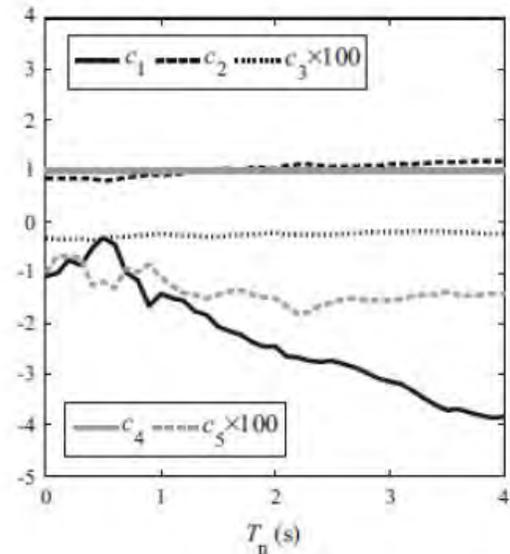


Figura 15 Coeficientes para Atenuación de Zonas Intraplaca.

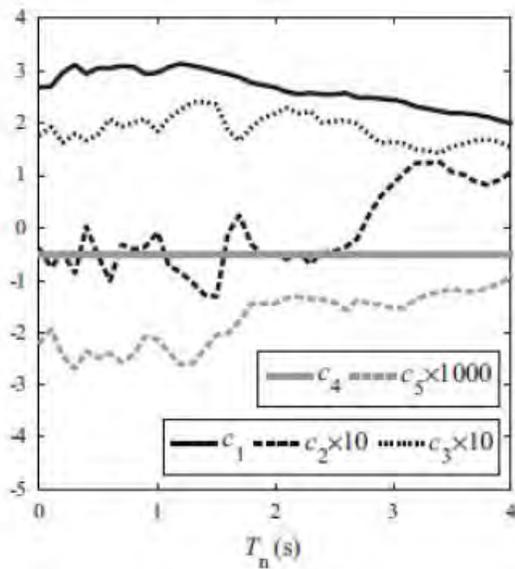


Figura 14 Coeficientes para Atenuación de Zonas en Subducción.

Coefficiente	Valor Subducción	Valor Interplaca
c1	3.000	-0.3093
c2	-0.018	0.5447
c3	0.188	-0.0002
c4	-0.510	1.0000
c5	-0.002	0.0040

■ **Tabla 5** Coeficientes de Atenuación. Obtenido de Arroyo *et al.* (2010).

La sección 2 menciona diferentes métodos para primero el cálculo de la resistencia de una edificación, después modelar su comportamiento y subsecuente a eso predecir el daño tras un sismo. Para este ejercicio se supone que el comportamiento estructural de la edificación está en concordancia con [Gobierno de la Ciudad de México \(9 de junio de 2020\)](#). El reglamento establece que se requiere un análisis dinámico “modal” como primer punto para estructuras en general y un diseño estático simplificado cuando son estructuras simples. Este análisis representa nivel de información muy detallado, que todas las estructuras construidas en los últimos años deben tener para



poder acceder a una licencia de construcción. En ese sentido, para este proyecto utiliza un sistema simplificado para encontrar la relación entre sismo y daños.

Si bien cada edificación es única existen comportamientos semejantes de acuerdo con el sistema constructivo, uso y número de niveles. El Marco Teórico mencionó las herramientas del cálculo de la fragilidad estructural. En este concepto, un grado de aceleración corresponderá a un grado de daño esperado dadas las características de la estructura, dada (6). En este análisis utilizamos esta herramienta para modelar el comportamiento de la estructura y su respectivo nivel de daño. Las curvas de fragilidad son obtenidas de valores relacionados con las edificaciones en la Ciudad de México y presentados en la tabla 6.

Finalmente, para el cálculo de la pérdida esperada se realiza el procedimiento referido por (8)-(9), en donde el valor esperado de daño se multiplica por el valor de la edificación que implicaría el valor a pagar para recuperar el funcionamiento en su totalidad.

Resultados

El primer paso es realizar la simulación de las Magnitudes y ubicación de hipocentro de cada una de las 16 zonas de acuerdo con proceso presentado en el Marco Teórico. La Figura 4.5 tiene los resultados para dos zonas: 3 y 8, para 60,000 simulaciones la primera columna y para 150 simulaciones en la segunda columna. La Magnitud Máxima presentada en la Gráfica superior izquierda corresponde a 7.1Mw y es concordante con la Magnitud Máxima presentada en los registros históricos. Adicionalmente, es importante notar, que las Magnitudes Máximas son diferentes para cada una de las Zonas, tal y como se plantea en el Marco Teórico, ya que éstas son dependientes de su fuente de origen. Las gráficas de la columna de la izquierda presentan un menor número de simulaciones para poder contrastar otras características. Es importante notar que en algunas simulaciones, no hubo sismos en esa zona. En la Zona 8 no hay valores de magnitud para las simulaciones entre 10 y 25. En este mismo conjunto de simulaciones, la Zona 3 sí presentó sismos. Este conjunto de Gráficas es una buena representación de las diferencias sísmicas entre Zonas. La Zona 3 tiene sismos de Magnitudes superiores los cuales también son más frecuentes que los sismos presentados en la Zona 8. Sin embargo, estas características no implican que la Zona 3 represente mayor riesgo sísmico que la Zona 8 para la Ciudad de México. Esa comparativa se realizará más adelante.

Edificación	Periodo	mu	sig
1	0.2	3.24	0.19
2	0.2	3.32	0.02
3	0.2	2.89	0.89
4	0.2	2.85	0.82
5	0.2	2.93	0.63
6	0.2	2.24	0.27
7	0.2	2.37	0.01
8	0.7	2.91	0.25
9	0.7	2.84	0.67
10	0.7	2.86	0.31
11	0.7	3.08	0.43
12	0.7	1.50	0.25
13	0.7	4.10	0.52
14	1.0	4.08	0.12
15	1.0	4.20	0.60
16	1.0	3.98	0.43
17	1.0	4.22	0.80
18	2.0	3.87	0.15
19	2.0	3.99	0.07
20	3.0	3.94	0.14

■ **Tabla 6** Valores para Curvas de Fragilidad. Obtenido de *Arroyo et al. (2010)*.



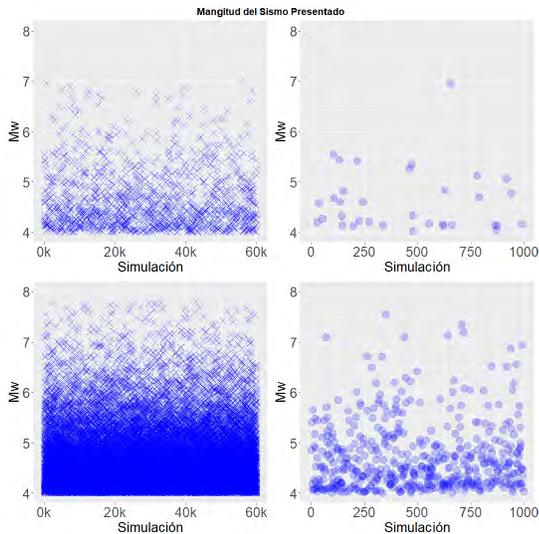
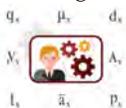


Figura 16 Magnitud de Sismos.

La figura 16 motiva que comentemos algunas limitaciones del modelo y del Apetito de Riesgo (Periodo de Retorno, T_r). En la reglamentación Mexicana, el regulador solicita realizar el cálculo de la Prima Pura o Pérdida Esperada para un $T_r = 1500$ lo que implica una probabilidad de ocurrencia en un año de $P(X = x) = \frac{1}{1500} = 0.00067 = 0.067\%$. Como consecuencia de esta solicitud y de la forma en la que se modelan los sismos, se requerirían tener al menos 1,500 años de datos sismológicos para poder tener la Magnitud Máxima Posible de un sismo con un el Periodo de Retorno solicitado. Sin embargo, la Sección de Introducción muestra que en los últimos 20 años es cuando comenzó la colocación de sismógrafos con mayor amplitud en el país. Por esta razón es que es imposible conocer la Magnitud de un sismo con esas características.

En la figura 16 se puede ver que si bien los Periodos de Retorno para los sismos máximos son diferentes para las dos zonas, estos no superan los 100 años de datos que tiene México de información. Siguiendo estos datos, el querer “predecir” un sismo con un T_r diez veces mayor al máximo registrado, implicaría tener un sismo de un grado más de magnitud aproximadamente. Esto quiere decir pasar de un sismo magnitud 8.0Mw a uno de 9.0Mw. Sin embargo, no existe evidencia que sustente dicho crecimiento o que provoque que la región pueda generar dicho sismo. Este efecto de reporte se ejemplifica en la Figura 17 donde se observa la Magnitud Mínima



de todos los sismos reportados durante un año obtenidas de Centro Nacional de Prevención (2022). Este valor es fundamental para este método. De acuerdo con los datos en la figura 17, el valor mínimo para el sismo en 1920 era 6.90Mw, mientras que en 1966 ese mismo valor fue de 3.25Mw. Estos cambios son de vital importancia para el cálculo sísmico y hace pensar que un periodo de retorno tan elevado como el que marca la reglamentación no debería de ser adecuado, ya que es imposible modelarlo.



Figura 17 Evolución de la Magnitud Mínima para un Sismo en México.

También existe un límite inferior para las magnitudes adicional al límite superior que provoca el uso de la Relación Gutenberg-Richter. En este caso es de 4.5Mw para todas las zonas. La Introducción menciona que en México en los últimos años ha habido un incremento exponencial en el número de sismos registrados con magnitudes menores a 4.0Mw. Esta mayor frecuencia de sismos no es relevante para este estudio ya que la falta de información pertenece a sismos que no provocan daño alguno a las estructuras. Por esta razón es que el estudio prosigue con un corte para todos los sismos menores a 5.0Mw.

La Figura 18 tiene las distribuciones de densidad de las magnitudes de sismos para tres diferentes zonas. Las Zonas: 5, 7 y 12 presentan diferentes comportamientos. La zona 5 tiene una media de sismo de 3.43 y una desviación estándar de 0.61. En comparación, la zona 7 tiene media de 4.22 y desviación estándar de 0.66. Si bien las tres zonas tienen un límite inferior igual, la Zona 7 tiene una mayor probabilidad de tener sismos de gran magnitud en comparación con las otras dos Zonas. La Zona 7 tiene una media mayor a la Zona 12, pero esta última tiene una mayor ocurrencia de sismos superiores a 7.0Mw. En este punto no es posible definir cual zona representa mayor riesgo sísmico para la Ciudad de México, una que tenga

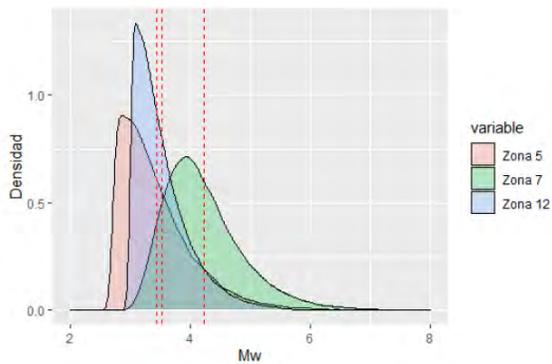


Figura 18 Distribución de magnitudes para diferentes zonas.

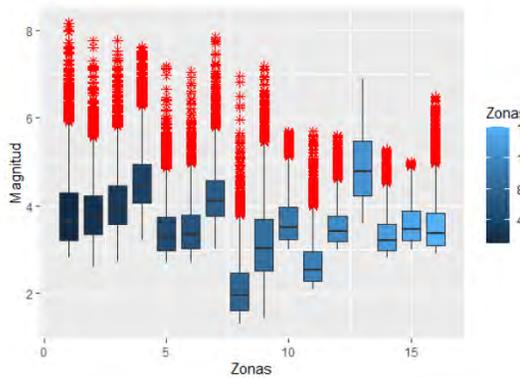


Figura 19 Diagrama de cajas de Magnitudes por Zona.

una mayor frecuencia de sismos u otra que tenga sismos de mayor magnitud, pero menos recurrentes.

La Figura 19 muestra la magnitud que incurre cada Zona por simulación. Esta gráfica tiene como objetivo ver las diferentes actividades sísmicas de cada región y como estas cambian entre simulaciones para conocer la cantidad de valores extremos que se encontraron en la Figura 18. Las Zonas 3, 4 y 9 tienden a ser más activas y con mayores magnitudes que las Zonas 13, 14 y 15. Esto va en concordancia con los valores de la tabla 1.

Los valores extremos para las distribuciones son muy importantes para la mayoría de las zonas. Por ejemplo, para la zona 2, el valor medio de la distribución corresponde a una magnitud de 2.0Mw, pero tiene valores extremos cercanos a los 7.0Mw. Por otro lado, la zona 13, es la única zona que no presenta valores extremos.

El siguiente paso es calcular el valor de la aceleración para cada uno de los sismo que se obtuvieron en las simulaciones para cada zona. Este apartado usa (4)-(5), dependiendo de si el sismo se generó en una zona de subducción o intraplaca. La figura 20 tiene los resultados de las aceleraciones para las mismas simulaciones y zonas que la figura 16. Un punto importante a destacar es la escala del eje vertical En la primera parte, las magnitudes van de 4 a 8.0 mientras que en esta segunda gráfica, los valores comprenden resultados de 0 a 200. Esto corresponde a valores de aceleración. Es importante también notar que la densidad de simulaciones en los rangos mayores es mucho menor en la figura 20 que en la figura 16. Esto significa que una magnitud de sismo fuerte, no genera en todas las ocasiones una magnitud de aceleración grande. Este efecto es el comportamiento descrito en (4)-(5) de atenuación.

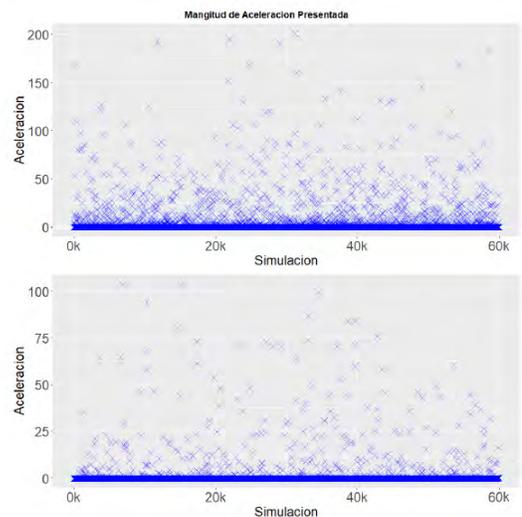


Figura 20 Aceleraciones para dos Zonas.

Para mayor claridad de esta transformación, la figura 21 tiende en la izquierda la representación para Magnitud Momento y en la parte derecha la de Aceleración Espectral.



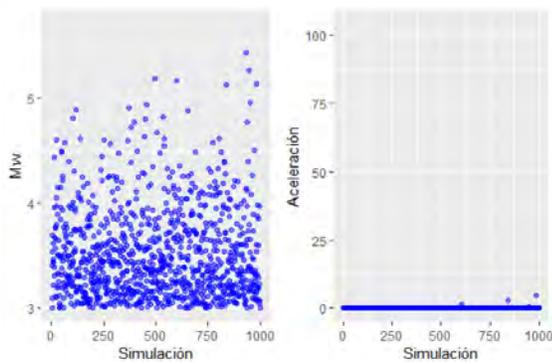
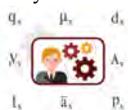


Figura 21 Comparativa de Momento Magnitud con Aceleración.

La figura 20 muestra 60,000 simulaciones, mientras que la figura 22 tiene 150 simulaciones. En esta última que no hay una relación directa entre Magnitudes y Aceleraciones. Por ejemplo, para la Zona 8, existen muchas magnitudes momento superiores al mínimo registrado en el lapso de las 150 simulaciones. Sin embargo, para el apartado de las aceleraciones, solamente tres simulaciones registran valores mayores a 0.

Esto se debe a que la distancia entre el hipocentro del sismo y la Ciudad de México debe ser mayor a la de otros sismos y por ende su aceleración en el sitio de análisis es menor. Un efecto similar sucede con las Magnitudes de la Zona 3. Una vez que se transforman en aceleraciones las magnitudes no se ordenan de la misma forma que en el apartado anterior.

De la misma manera que, para las Magnitudes la figura 18 tiene las distribuciones, la figura 22 presenta las gráficas de las distribuciones obtenidas de todas las simulaciones de las aceleraciones para las mismas tres zonas. Si bien la forma de las distribuciones de Magnitud y Aceleración son semejantes, es importante marcar como para la Aceleración, los comportamiento de las Zonas 12 y 14 son más parecidos que para las Magnitudes. En la práctica, un sismo que produzca una aceleración mayor a $100\text{cm}/\text{s}^2$ se consideraría riesgoso. En este caso, las tres zonas lo pueden producir, pero las Zonas 12 y 14 tiene casi el mismo nivel de probabilidad de tenerlo en un año. La zona 5 tiene una media de 0.43 con una desviación estandar de 4.94, para la zona 12 la media es de 0.10 y la desviación de 2.04 y finalmente para la zona 14 la media es de 0.02 y la desviación estandar de 0.43. Es importante notar que los valores medios para las tres zonas están muy cercanas a cero y las desviaciones estandar son un



orden de magnitud mayor a dichas medias. Estas dos situaciones reflejan que existen muchos valores cercanos a 0.0 de aceleración pero que también hay magnitudes mayores en una proporción muy pequeña. En comparación con la figura 18, en donde la magnitud de la media era un orden mayor que la magnitud de la desviación estandar, lo que implicaba que los resultados estaban más agrupados que en las simulaciones de aceleraciones.

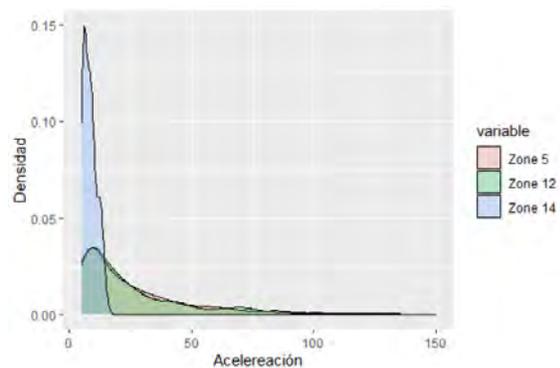


Figura 22 Distribución de aceleraciones para varias Zonas.

El siguiente paso en la metodología es calcular el Porcentaje de Daño que incurre la estructura dados los sismos presentados en las 16 Zonas. En este apartado el cálculo de afectación se obtiene después de someter a la edificación a los 16 sismos y sumar su afectación. En los apartados anteriores cada simulación tenía 16 resultados. A partir de esta, solamente se tendrá un resultado por simulación y edificación. La figura 23 tiene los Porcentajes de Daños para dos edificaciones, la 5 y la 12.

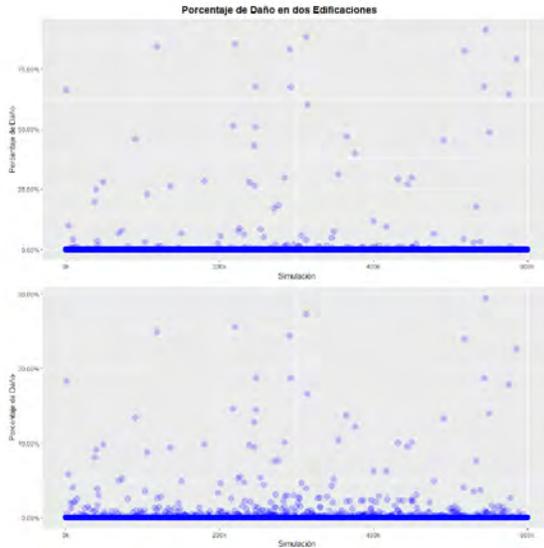


Figura 23 Porcentaje de daño para dos Zonas.

La primera observación es la diferencia en la magnitud máxima de daño. Para la edificación 12 es hasta tres veces mayor la simulación de daño máximo en comparación con la edificación 5. Sin embargo, es difícil conocer si tienen distribuciones muy diferentes el resto de las simulaciones ya que esta representación no permite apreciar bien los detalles. Es importante también notar la distribución de dichos daños. Para ambos casos, la gran mayoría de las simulaciones arrojan un daño de 0.0%, lo que implica que la edificación es resistente a los sismos presentados. Otra observación por resaltar es que las magnitudes que implican grandes afectaciones a las edificaciones ocurren solamente en un número proporcionalmente bajo de simulaciones.

Una forma de tener una mejor representación de las distribuciones es utilizando las mismas gráficas de distribución de Magnitud y de Aceleración. Este ejercicio es el realizado en la figura 24. En ella, la media de daño para el edificio 3 es un poco mayor que la media para la edificación 5. Sin embargo, es importante notar que las magnitudes de dichos daños son muy pequeñas como para representar verdaderas pérdidas a la estructura o daños importantes que pongan en riesgo la ocupación de la edificación. Es importante observar que, para un ejercicio con 60,000, como el presentado en la figura 23, los valores mayores a un $T_n > 1500$ años serían solamente las trece simulaciones de mayor magnitud.

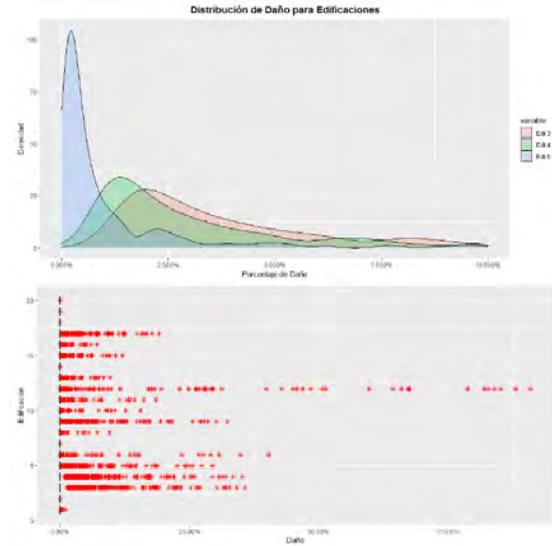


Figura 24 Distribución de daño.

La parte inferior de la Figura 24 tiene las distribuciones representando los valores extremos. Para todas las edificaciones la media es muy cercana a cero y la gran mayoría de eventos que producen daño son considerados como eventos extremos. Las edificaciones 2, 7, 14, 18, 19 y 20 no muestran daños mayores al 1.0%, lo que implica que sus condiciones estructurales son muy favorables. Por otro lado, la edificación 8 tiene valores experimentó una destrucción casi total, por lo que sería una edificación a la cual se le debe de poner particular atención en la obtención de la póliza ya que las probabilidades indican que puede ejercerse.

La tabla 7 muestra los valores esperados, desviación estándar y valor del 99.93% para el Porcentaje de Daño para cada Edificación. Si bien los valores esperados de Daño son relativamente bajos para todas las edificaciones, los valores extremos tienen magnitudes diferentes. Es importante notar que hay edificaciones que no presentan daño alguno y que en general el daño es relativamente bajo a pesar de haber sido sometidas a aceleraciones significativas. Este comportamiento es producto del alto nivel de diseño y buen comportamiento estructural que supone el cumplir con las Normas Técnicas Complementarias de Construcción de la Ciudad de México. El Marco Teórico menciona que en, las dichas Normas, el requerimiento estructural implica que ninguna estructura avalada por ellas presentará un daño que resulte en colapso aún en



Edificación	μ	σ	$\alpha_{99,93}$
1	0.00e+00	0.000000	0.00
2	0.00e+00	0.000000	0.00
3	4.35e-04	0.007230	0.18
4	3.60e-04	0.006550	0.17
5	1.51e-04	0.004130	0.09
6	6.56e-05	0.003720	0.02
7	0.00e+00	0.000000	0.00
8	8.50e-06	0.000655	0.01
9	2.02e-04	0.004890	0.12
10	1.96e-05	0.001250	0.01
11	3.91e-05	0.001840	0.02
12	3.25e-04	0.000132	0.26
13	2.16e-05	0.000960	0.01
14	0.00e+00	0.000000	0.00
15	3.67e-05	0.001350	0.02
16	1.16e-05	0.000623	0.01
17	1.28e-04	0.002890	0.07
18	0.00e+00	0.000000	0.00
19	0.00e+00	0.000000	0.00
20	0.00e+00	0.000000	0.00

■ **Tabla 7** Valores de Daño Esperado.

el evento más catastrófico registrado en México. Estas simulaciones corroboran esa reglamentación.

Una vez obtenidos los valores del Daño Esperado, este se multiplica por el valor de remplazo de la Edificación que en este caso es el valor asegurado del inmueble para obtener el valor de la Pérdida Pura. Los resultados de esta operación se muestran en la parte superior de la figura 25.

Ésta presenta el nivel de Pérdida en los extremos, es decir con una probabilidad menor al 5% en la gráfica inferior. Así, como en los ejercicios anteriores se presenta una gráfica de densidad en la parte superior para conocer el valor de la Pérdida Esperada y que tan lejos están los valores extremos de dicho promedio. La parte inferior

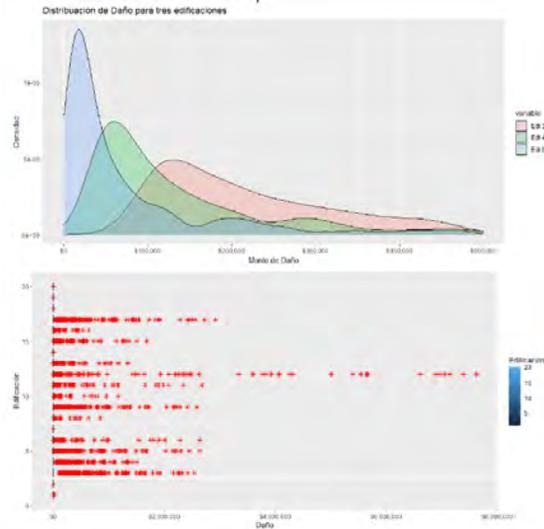


Figura 25 Distribución de pérdida económica.

de la figura 25 muestra el punto máximo de la muestra representado por el Valor con una probabilidad e 99.93% o el equivalente al valor esperado por la reglamentación para cada una de las Edificaciones. En esta gráfica es importante constatar que el Porcentaje de Pérdida no equivale al Valor Máximo de esta gráfica, ya que una edificación con un valor asegurado muy grande, pero con un daño menor puede producir una pérdida más grande que una edificación menor con un daño mayor.

El caso de la edificación 17 es importante. Cuando esta edificación se clasifica por el porcentaje de máximo daño esperado, se encuentra en la séptima posición. Sin embargo, al introducir el valor de remplazo pasa a ser la segunda edificación más afectada. Esto se debe a que es una edificación con un gran valor de remplazo, y es donde el concepto de riesgo se puede aplicar bien. Es decir, la multiplicación de la probabilidad de daño por la consecuencia, resulta en un indicador para la toma de decisiones. La edificación 17 es más riesgosa que la edificación 3 pese que a esta última tenga una probabilidad máxima de daño mayor.

El siguiente paso es estimar el valor de ω para cada una de las edificaciones. Estos valores están reportados en la figura 26. Es importante recordar que, entre mayor sea el valor de, ω , mayor deberá ser el valor de la prima a cargar en proporción a el valor ya que la edificación es más riesgosa. El caso ideal sería cuando $\omega = 1$, ya que

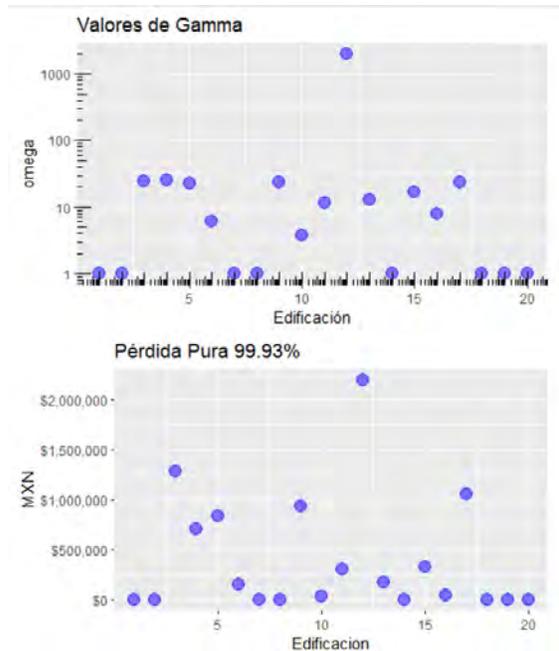


Figura 26 Pérdida máxima con valor de ω .

representa una edificación que no sufre daños bajo los fenómenos perturbadores que puede incurrir durante su vida de funcionamiento.

En la figura 25, la edificación 12 es la que presenta los valores extremos de mayor magnitud. Por esta razón es de esperarse que tenga la magnitud más grande de ω , el cual es dos ordenes de magnitud mayor que el resto de los valores. Para el resto de las edificaciones, los valores de ω se pueden clasificar en dos grupos. El primero tiene valores de $\omega = 1$, lo que representa edificaciones que su comportamiento estructural es adecuado y no se esperaría que tuvieran alguna penalización en la póliza de seguro sísmico. El siguiente grupo tiene edificaciones que fueron afectadas, pero sus daños no representan un peligro inminente de colapso. En estos casos las edificaciones tienen que ser reforzadas o reparadas pero pueden seguir siendo utilizadas. Para este segundo grupo los valores de $3 < \omega < 30$. Esto implica que el valor de la póliza equivaldría a un múltiplo entre tres y treinta veces el valor esperado de la pérdida pura.

Finalmente, la figura 27 tiene la representación de la magnitud de la pérdida del portafolio de las edificaciones dada una probabilidad de excedencia, representado por



Figura 27 Pérdida del portafolio.

(10). Gran parte del comportamiento de esta gráfica es resultado de la edificación 12. A menor es la probabilidad de excedencia, mayor es el monto de la Pérdida del Portafolio. Con estos resultados se obtiene que un 99.53 % de las ocasiones, con el esquema de pólizas propuesto, el portafolio tendrá ganancias. Asimismo, en el 99.93 % de las simulaciones, las pérdidas esperadas representan menos del 3% del valor del portafolio. Una forma de mejorar el comportamiento del portafolio sería negando la cobertura a la edificación 12. Esto ocurre porque esta edificación representa gran parte de las pérdidas y su valor de ω es considerablemente diferente al resto de las edificaciones.

5. CONCLUSIÓN

Este estudio presenta un nuevo modelo para realizar análisis de riesgo sísmico para edificaciones en la Ciudad de México. El modelo consiste en tres subpartes: generación de sismos, afectación a estructura y finalmente calcular la afectación económica de los daños provocados. En cada una de esas partes el modelo presenta funciones racionales, que, si bien son aproximaciones, han probado en la literatura producir resultados acertados o más adecuados que modelos más complejos.

Es importante también comentar los límites superiores e inferiores artificiales para las magnitudes que implica utilizar la Relación Gutenberg-Richter. La cola inferior depende del nivel de instrumentación de la zona. Es decir, entre más sismógrafos existan y mejor calibrados, la Relación Gutenberg-Richter podrá simular mejor sismos de menor magnitud. Sin embargo, para los sismos de mayor magnitud, si no han sucedido, no hay evidencia de



que puedan suceder, por lo que la historia es el máximo probable. Esto genera un problema ya que el siguiente sismo de gran magnitud no estará incluido dentro de las simulaciones.

Otra área de oportunidad de este trabajo es la modelación de la respuesta de las estructuras. La sección 2 propone el uso de curvas de Fragilidad para estimar el daño de la edificación. En la actualidad, el Reglamento de Construcción de la Ciudad de México requiere que todas las construcciones tengan un análisis sísmico de la edificación antes de ser construidas. Este análisis es realizado por expertos, verificado por un grupo de especialistas y aprobado por la dependencia gubernamental. De la misma manera que para otorgar un crédito nuevo la institución financiera solicita licencias de construcción, estas también pueden solicitar el análisis sísmico de la estructura. En él encontrarán el resumen de daños esperados y con ese número se pudiera calcular una póliza más exacta e individualizada para la edificación. Aún con estas mejoras, el modelo es robusto, adaptable y fácil de implementar para cualquier edificación en la Ciudad de México y con eso tener un valor de Prima Pura para la cobertura de riesgo sísmico.

REFERENCIAS

- Abo-El-Ezz, A., M.-J. Nolle, and M. Nastev, 2013 Seismic fragility assessment of low-rise stone masonry buildings. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration* **12**: 87–97.
- Arroyo, D., D. García, M. Ordaz, M. A. Mora, and S. Krishna Singh, 2010 Strong ground-motion relations for mexican interplate earthquakes. *Journal of Seismology* **14**: 769–85.
- Atkinson, G. and K. Goda, 2013 Probabilistic seismic hazard analysis of civil infrastructure. In *Handbook of Seismic Risk Analysis and Management of Civil Infrastructure Systems*, p. 3–28, Elsevier.
- Centro Nacional de Prevención, 2022 Sismos en ciudad de México. Portal Único del Gobierno .
- Centro Nacional de Prevención de Desastres, 2022 *Atlas Nacional de Riesgos*. Gobierno de México.
- Cruz Atienza, V. M., S. Krishna, and M. Ordaz, 28 de septiembre 2017 ¿qué ocurrió el 19 de septiembre de 2017 en México? Ciencia UNAM .
- Del Gaudio, C., P. Ricci, G. Verderame, and G. Manfredi, 2015 Development and urban-scale application of a simplified method for seismic fragility assessment of rc buildings. *Engineering Structures* **91**: 40–57.
- Díaz, S. A., L. G. Pujades, A. H. Barbat, D. A. Hidalgo-Leiva, and Y. F. Vargas-Alzate, 2018 Capacity, damage and fragility models for steel buildings: A probabilistic approach. *Bulletin of Earthquake Engineering* **16**: 1209–1243.
- Elnashai, A. S. and L. D. Sarno, 2008 Earthquake characteristics. In *Fundamentals of Earthquake Engineering*, pp. 1–43, John Wiley and Sons.
- Franco, G., 2021 Earthquake mitigation strategies through insurance. In *Encyclopedia of Earthquake Engineering*, p. 1–18, Springer Berlin Heidelberg.
- Freddi, F., C. Galasso, G. Cremen, A. Dall'Asta, L. D. Sarno, et al., 2021 Innovations in earthquake risk reduction for resilience: Recent advances and challenges. *International Journal of Disaster Risk Reduction* **60**: 102267.
- García, D., 2005 Inslab Earthquakes of Central Mexico: Peak Ground-Motion Parameters and Response Spectra. *Bulletin of the Seismological Society of America* **95**: 2272–2282.
- Gobierno de la Ciudad de México, 9 de junio de 2020 Normas técnicas complementarias y susid. Gaceta Oficial de la Ciudad de México .
- Goda, K., H. Hong, and G. M. Atkinson, 2010 Impact of using updated seismic information on seismic hazard in western Canada. *Canadian Journal of Civil Engineering* **37**.
- Goda, K., K. Wilhelm, and J. Ren, 2020 Relationships between earthquake insurance take-up rates and seismic risk indicators for Canadian households. *International Journal of Disaster Risk Reduction* **50**: 101754.
- Hariyanto, T., B. Filsa, C. Bhukti Pribadi, and C. N. Safitri, 2021 Determination of earthquake intensity based on pga (peak ground acceleration) using multi-event earthquake data. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science* **731**: 012027.
- Hong, H. and K. Goda, 2010 Characteristics of horizontal ground motion measures along principal directions. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration* **9**: 9–22.
- Hong, H., A. Pozos-Estrada, and R. Gomez, 2009 Orientation effect on ground motion measurement for Mexican subduction earthquakes. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration* **8**: 1–16.
- Jara, J. M., B. A. Olmos, and G. Martínez, 2017 Dynamic Properties and Seismic Vulnerability of Typical RC Bridges Located in México. *Procedia Engineering* **199**: 2973–2978.
- Kunreuther, H. and G. Heal, 2012 Managing catastrophic risk. Working paper .



- Liu, T., A. Pozos-Estrada, R. Gomez, and H. Hong, 2016 Seismic hazard estimation: Directly using observations versus applying seismic hazard model. *Natural Hazards* **80**: 639–655.
- Meroni, F., T. Squarcina, V. Pessina, M. Locati, M. Modica, *et al.*, 2017 A damage scenario for the 2012 northern italy earthquakes and estimation of the economic losses to residential buildings **8**.
- Monterrubio-Velasco, M., F. R. Zúñiga, Q. Rodríguez-Pérez, O. Rojas, A. Aguilar-Meléndez, *et al.*, 2020 Synthetic seismicity distribution in guerrero–oaxaca subduction zone, mexico, and its implications on the role of asperities in gutenbergrichter law **13**: 6361–6381.
- Sancha, A. R.-D. L., J. M. Mayoral, T. C. Hutchinson, G. Candia, J. Montgomery, *et al.*, 2019 Assessment of fragility models based on the sept 19th, 2017 earthquake observed damage. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* **125**: 105707.
- Sawires, R., M. A. Santoyo, J. A. Peláez, and R. D. Corona Fernández, 2019 An updated and unified earthquake catalog from 1787 to 2018 for seismic hazard assessment studies in mexico. *Scientific Data* **6**.
- Sawires, R., M. A. Santoyo, J. A. Peláez, and J. Henares, 2021 Western mexico seismic source model for the seismic hazard assessment of the jalisco-colima-michoacán region. *Natural Hazards* **105**: 2819–2867.
- Servicio Sismológico Nacional, 1988 Universidad Nacional Autónoma de México.
- Silva-Ortiz, L. M., 2019 *Crónica de seis siglos de sismos en México: lecciones aprendidas y perspectivas*. Asociacion Mexicana de Instituciones de Seguros AC.
- Tesfamariam, S. and K. Goda, 2013 Handbook of seismic risk analysis and management of civil infrastructure systems. In *Woodhead Publishing Series in Civil and Structural Engineering*, Woodhead Publishing.
- U.S. Geological Survey, 1985 M 8.0 - 26 km nw of el habilal, mexico. Earthquake Hazards Program .
- Yao, X., S. Qi, C. Liu, S. Guo, X. Huang, *et al.*, 2021 An empirical attenuation model of the peak ground acceleration in the near field of a strong earthquake. *Natural Hazards* **105**: 691–715.
- Zúñiga, F. R., G. Suárez, Ángel Figueroa-Soto, and A. Mendoza, 2017 A first-order seismotectonic regionalization of mexico for seismic hazard and risk estimation. *Journal of Seismology* **21**: 1295–1322.



Fausto Guevara López es ingeniero civil graduado con honores del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM) campus Monterrey. También es Maestro en Ciencias con especialidad en Estructuras y Diseño Probabilístico por la

Universidad de Illinois en Urbana-Champaign, tiene un MBA por dicha institución y recientemente se graduó de la Maestría en Riesgo por la Universidad Anáhuac México. Sus trabajos de investigación están publicados en revistas internacionales dictaminadas como Structural Safety y Georisk Assessment and Management of Risk for Engineered Systems and Geohazards. Ha ejercido la docencia a nivel licenciatura y posgrado en el ITESM campus Monterrey, en la Universidad de Illinois en Urbana-Champaign y en la Universidad del Valle de Toluca. Cuenta con diez años de experiencia en el diseño, la construcción y la verificación de estructuras; durante cinco años fungió como director administrativo de Médica San Isidro, periodo en el cual la empresa tuvo un crecimiento de 50 % en ventas y 3 % en utilidad. Actualmente es director general y socio fundador de Mitani Pharma, empresa farmacéutica productora de medicamentos inyectables de alta especialidad.



MAESTRÍA EN RIESGO

Próximas aperturas

Enero de 2023

Campus Norte

Julio de 2023

Campus Sur

ENFOQUE:

Profesionalizante, pensando en personas que trabajan.

MODALIDAD

Escolarizada

DURACIÓN

Ocho trimestres

HORARIO

Martes a jueves de
7:00 a 9:00 hrs.

PLAN DE ESTUDIOS

PRIMER TRIMESTRE	SEGUNDO TRIMESTRE	TERCER TRIMESTRE	CUARTO TRIMESTRE	QUINTO TRIMESTRE	SEXTO TRIMESTRE	SÉPTIMO TRIMESTRE	OCTAVO TRIMESTRE
Probabilidad I	Inferencia estadística: estimación paramétrica	Electiva	Análisis de serie de tiempo, económicas y financieras	Modelos estocásticos en finanzas	Valuación de instrumentos financieros I	Valuación de instrumentos financieros II	Seminario de Investigación en ciencias exactas III
Algoritmos y programación	Probabilidad II	Electiva	Fundamentos cuantitativos para la administración del riesgo	Electiva	Seminario de Investigación en ciencias exactas I	Seminario de Investigación en ciencias exactas II	Electiva
Taller de Análisis de regresión	Algoritmos numéricos	Finanzas corporativas	Electiva	Electiva	Electiva	Electiva	Electiva

Beneficios de estudiar este programa:

El egresado será una persona íntegra, con una profunda formación humana y moral inspirada en los valores perennes del cristianismo, con conocimientos, habilidades y destrezas que le permitan asumir el desarrollo de su actividad con responsabilidad, de manera práctica, con perspectiva global y con enfoque empresarial.



Además, contará con los conocimientos y las habilidades para desarrollar y aplicar modelos para cuantificar y pronosticar riesgos que afectan a las instituciones, generando información estratégica para la prevención de los mismos, desarrollando una capacidad analítica en el estudio y la solución de problemas financieros y en la identificación, evaluación y control de factores de riesgo, mediante la aplicación de modelos matemáticos y estadísticos avanzados y del conocimiento del entorno económico y financiero, contando con elementos sobre el marco legal tanto nacional como internacional.



REQUISITOS

DE ADMISIÓN

- Solicitud de admisión **Descárgala aquí**
- Título de licenciatura (tres copias por ambos lados)
- Cédula de licenciatura (tres copias por ambos lados)
- Certificado oficial de estudios
- Dos cartas membretadas de recomendación, académicas o de experiencia laboral
- Cuatro fotografías de tamaño infantil (blanco y negro en papel mate)
- Currículum (tres copias)
- Acta de nacimiento
- Copia de CURP

Posgrados Anáhuac

Conoce nuestros:

Convenios de descuento

Opciones de financiamiento

20%
DE DESCUENTO
A EGRESADOS
DE LA UNIVERSIDAD ANÁHUAC MÉXICO

¡Vive la experiencia Anáhuac!

Contáctanos para más información o si deseas iniciar tu proceso de admisión

Coordinación académica:

Campus Sur

Mtra. Martha Reyes Villa

martha.reyes@anahuac.mx

Campus Norte

Dr. José Daniel López Barrientos

daniel.lopez@anahuac.mx

Centro de Atención de Posgrado y Educación Continua



55 54 51 61 77

55 79 18 21 59

posgrado@anahuac.mx

anahuac.mx/mexico/posgrados

**Facultad de
Ciencias Actuariales**

GRANDES LÍDERES
Y MEJORES PERSONAS



Asociación Mexicana de
Actuarios Consultores, A.C.

¡INSCRIPCIONES
ABIERTAS!

DIPLOMADO EN PENSIONES

...porque tu educación te distingue



OBJETIVO

Proporcionar al estudiante de este diplomado un conocimiento ordenado y suficiente que constituya una base sólida para el diseño, valuación de planes de públicos y privados de pensiones y su administración.



DURACIÓN

140 Hrs.



INICIO

Febrero 2023



Público en General
Miembros CONAC
Miembros AMA
Miembros AMAC
Estudiantes

INSCRIPCIÓN*

\$1,000 + IVA
\$1,000 + IVA
\$1,000 + IVA
N/A
\$1,000 + IVA

INVERSIÓN

\$50,000 + IVA
\$40,000 + IVA
\$40,000 + IVA
\$29,000 + IVA
\$25,000 + IVA

* Pago único en caso de tomar el diplomado completo. Si se toman algunos módulos, el pago de la inscripción será por cada módulo.

www.amac.mx
informes@amac.mx
55 5559 0514



Asociación Mexicana de
Actuarios Consultores, A.C.

DIPLOMADO EN PENSIONES

...porque tu educación te distingue



MÓDULO 1

Generalidades de los Sistemas Pensionarios



MÓDULO 2

Economía de las Pensiones



MÓDULO 3

Demografía: Aplicación a Sistemas Pensionarios



MÓDULO 4

Esquemas de Pensiones: Diseño



MÓDULO 5

Sistemas de Financiamiento:
Valuación Actuarial



MÓDULO 6

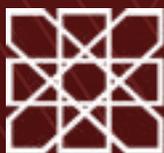
Aspectos Contables y Financieros de los
Sistemas de Pensiones

www.amac.mx
informes@amac.mx
55 5559 0514

PREMIO NACIONAL DE ACTUARÍA

Viñas aplicadas a medidas de riesgo

CATEGORÍA DE INVESTIGACIÓN, PRIMER LUGAR



Viñas aplicadas a medidas de riesgo

Eric Daniel Hernández Jardón^{*,1}

*Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México

RESUMEN Este trabajo obtuvo el primer lugar en el Premio Nacional de Actuaría organizado por el Colegio Nacional de Actuarios A.C. El objetivo de este artículo es desarrollar una metodología basada en la modelación, la estructura de dependencia que hay entre los riesgos que representan diferentes tipos de seguro para la estimación de elementos requerimiento de capital de solvencia acorde con la regulación mexicana. El video de la presentación en Jornada de Actualización correspondiente puede encontrarse [aquí](#).

Palabras clave

Cópulas, Árboles,
Solvencia

1. INTRODUCCIÓN

La agregación de riesgos desde la perspectiva de las compañías de seguros es un proceso de combinación de riesgos de todas las líneas de negocio de seguros, en particular, es importante comprender la estructura de dependencia entre las diferentes líneas de negocio de

seguros. En este sentido, la estructura de dependencia para las compañías de seguros se interpreta como el comportamiento de una línea de negocio, con otras líneas de negocio más allá de la dependencia lineal. En general, podemos dividir a una compañía de seguros en dos grandes categorías: seguros de vida, y seguros de no-vida (también llamados seguros generales o de daños), el seguro de vida promete una suma global o pagos regulares para beneficiarse de una póliza de vida en caso de fallecimiento del asegurado, mientras que el seguro de no-vida protege contra daños o pérdidas a un activo.

También la agregación de riesgo de pérdida de las líneas de negocios de seguros sirve para determinar el requerimiento de capital para reducir el riesgo de insolvencia. Esto se realiza en particular bajo las normas del esquema regulatorio de Solvencia II.

Nuestro objetivo es desarrollar una metodología para

Derechos reservados © 2022 por el Colegio Nacional de Actuarios

Última actualización del manuscrito: 20 de diciembre de 2022

Versión revisada, corregida y resumida por Aldo Martínez Arias, Ana Pamela Flores Herrera y José Daniel López Barrientos.

Este artículo es publicado por el Colegio Nacional de Actuarios (CONAC) y contiene información de una variedad de fuentes. Es un trabajo cuyo fin es únicamente informativo y no debe interpretarse como asesoramiento profesional o financiero. El CONAC no recomienda ni respalda el uso de la información proporcionada en este estudio. El CONAC no ofrece ninguna garantía, expresa o implícita, ni representación de ningún tipo y no asume ninguna responsabilidad en relación con el uso o mal uso de este trabajo.

¹ Correo electrónico: eric_daniel78@ciencias.unam.mx



la estimación del requerimiento de capital de solvencia acorde con la regulación mexicana. La metodología se basa en la modelación de la estructura de dependencia que hay entre los riesgos que representan diferentes tipos de seguro. De aquí surgen preguntas clave que responderemos a lo largo del documento:

- ¿Qué es el requerimiento de capital de solvencia?
- ¿Qué elementos vamos a calcular?
- ¿Cómo vamos a modelar la estructura de dependencia?

En la sección siguiente respondemos a la primera y segunda preguntas. Para poder responder a la primera, abordamos al esquema regulatorio de solvencia, debido a que este esquema siempre ha tenido como objetivo un correcto cálculo del requerimiento de capital, planteamos cómo fue este cálculo desde lo que se denomina Solvencia 0, hasta lo que hoy se conoce como Solvencia II. Entre los cambios más importantes que notamos es que el cálculo pasó de ser determinista, a estocástico. Como el enfoque de este trabajo está basado en la regulación mexicana, aquí explicamos todo lo que implica el cálculo del requerimiento de capital de solvencia, en particular nos concentramos en el Requerimiento de Capital por Riesgos Financieros y de Seguros RC_{TyFS} . El cálculo de este requerimiento implica obtener un Valor en Riesgo (VaR), debido a esto también explicamos qué es una medida de riesgo, y como no se puede decir que es una buena medida de riesgo, planteamos la coherencia de una medida de riesgo, también damos ejemplos de estas medidas, detallamos que es el VaR, y su uso en esquemas de Solvencia II. Además, explicamos cómo el cálculo del Requerimiento de Capital por Riesgos Financieros y de Seguros RC_{TyFS} , se realiza sobre variables de pérdida de los distintos riesgos que involucran a los distintos tipos de seguro.

En las secciones 2 y 3 respondemos a la tercera pregunta. A lo largo de ellas, probamos su existencia de acuerdo al Teorema de Sklar, y exhibimos algunas de sus propiedades más importantes, como son las cotas de Fréchet-Hoeffding. Después vemos cuáles son los tipos de cópulas que nos ayudarán a modelar la estructura de dependencia. Nos enfocamos en las dos familias más relevantes de cópulas, las Elípticas y las Arquimedianas, así como sus cópulas de supervivencia y rotadas. Estudiaremos estas últimas porque, como veremos, algunas cópulas capturan solo la dependencia positiva, y para explicar dependencias negativas, lo que hacemos, es rotarlas.

En la sección 4, estudiamos un conjunto de datos de

mercado, proporcionados por la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF) a través de [su portal](#). Los datos que usaremos serán los últimos reportados en el Sistema Estadístico del Sector Asegurador. Nuestro estudio tomará como punto focal al índice de severidad como una representación de los riesgos del negocio de seguros, y los transformamos para obtener el índice de severidad por cada uno de los tipos de seguro que componen a nuestros datos, para así poder ajustar diferentes viñas, y evaluar los modelos resultantes a detalle. Por último, obtuvimos simulaciones de los resultados y calculamos su VaR, lo cual será la nueva estimación del requerimiento de capital. Presentamos estos resultados en la sección 5.

Todos los códigos están disponibles [aquí](#).

Historia y fundamentos de Solvencia

¿Qué es Solvencia?

Desde la aparición de las prácticas de seguro, hasta las aseguradoras, como las conocemos hoy en día, surgieron situaciones de falta de capital para poder hacer frente a las necesidades de los asegurados, podemos entender estas situaciones como falta de solvencia.

Para entender el concepto de Solvencia, como lo conocemos hoy en día, consideramos cuánto dinero tenemos ahora, y cuánto podremos gastar en comida, transporte, etc. Solvencia es **la capacidad de hacer frente a nuestras necesidades u obligaciones**. En el caso del seguro, este concepto se traduce en la disponibilidad (requerimiento) de capital para poder hacer frente a sus obligaciones.

A continuación expondremos el esquema regulatorio de Solvencia que se aplica para las aseguradoras, así como los acuerdos de Basilea (que aplican para entidades bancarias), daremos una perspectiva desde sus inicios, hasta la estructura que mantienen actualmente.

Fundamentos históricos de Solvencia

En 1903, cuando se puso en marcha el sistema regulador sueco, basándose en un principio que, a la letra, rezaba “El cumplimiento de todos los acuerdos que se establezcan en torno al seguro debe quedar garantizado”. Posteriormente, en 1957, la constitución de la Comunidad Económica Europea (CEE), marcó el inicio de la supervisión del mercado asegurador. En efecto, entonces comenzó la cooperación entre las autoridades supervisoras. Entre los temas que abordó esta cooperación estaban el tratamiento de las reservas técnicas, los activos que deberían cubrir estas reservas y las medidas de control de estos activos. De este modo, nació el proyecto de hallar el margen mínimo de solvencia basándose en tres pilares:



1. Activos disponibles sobre las primas recaudadas durante el último ejercicio.
2. Activos disponibles para cubrir los siniestros incurridos a lo largo de los últimos tres ejercicios.
3. Activos disponibles para las reservas técnicas.

Las Primeras Directivas sobre los Seguros de no-vida y de Vida fueron publicadas por la CEE el 24 de julio de 1973, y el 5 de Marzo de 1979, respectivamente. Estas dos directivas marcaron los primeros pasos hacia el establecimiento de un libre mercado del sector asegurador dentro de la Unión Europea, y en las que se documentaron los requerimientos necesarios para que las compañías pudieran cumplir sus requisitos de solvencia.

La base principal de estos requisitos puede encontrarse en **Kastelijm (1986)**, acerca de las provisiones que se debían tomar en los ramos de vida y no-vida. Sin embargo, debido a las diferencias entre los países miembros, la composición del margen de solvencia tuvo como resultado una colección de compromisos, en los que se puede destacar a los dos primeros, ya que en un sentido amplio, se trata de definir qué es un seguro de vida.

Este trabajo considera un margen mínimo de solvencia (*msm*, por sus siglas en inglés) resultado de aplicar un coeficiente sobre estas provisiones técnicas. A continuación mostramos cómo era el cálculo de estos márgenes:

- Seguros de Vida. La fórmula básica para el margen de solvencia requerido en las compañías de seguros de vida está dada por

$$\begin{aligned} & \text{Primer resultado:} \\ & 4\% \text{ de las reservas matemáticas} \\ + & \text{ Segundo resultado:} \\ & 0.3\% \text{ de la suma en capital en riesgo.} \end{aligned}$$

De acuerdo con **Kastelijm (1986)**, esta fórmula podía ser usada y aceptada para:

- (a) Reaseguro: La provisión máxima puede ser del 15% de las reservas matemáticas y del 50% de la suma de capital en riesgo.
 - (b) Seguro temporal de corto plazo: Una reducción marginal 0.3% es posible.
- Seguros de no-vida. El margen de solvencia debería ser el mayor entre dos índices, el índice de primas y el índice de siniestros. El índice de primas es:
 - 18% de las primas brutas hasta los diez millones de unidades monetarias.

- 16% de las primas brutas que excedieran los diez millones de unidades monetarias.

El índice de siniestros es:

- 26% de los siniestros brutos incurridos hasta los siete millones de unidades monetarias.
- 23% de los siniestros brutos incurridos que excedan los siete millones de unidades monetarias.

El principal inconveniente de este modelo, y por tanto de Solvencia 0 es que cuanto más prudente era el cálculo de las provisiones técnicas, mayor era el margen mínimo de solvencia. Esto significaba, que entre más adversa al riesgo fuera una compañía, más pagaría para conseguir su solvencia, es decir, casi todo el dinero recaudado por primas, lo tendría siempre en reservas.

Solvencia I

Dados los problemas que causaba el cálculo del margen de solvencia, en 1994 fue cuando se retomó la revisión del marco de solvencia, creándose un grupo de trabajo dirigido por Helmut Müller, del cual surge un informe (vea (**Müller 1997**, p.116)), en donde se concluye que:

“El margen de solvencia cumple con las funciones de alarma y seguridad, pero no reemplaza por completo a lo que pueda ser un análisis exhaustivo de cada empresa, y aunque en menor medida establece el principio de prudencia en la cobertura de las provisiones técnicas”.

Con el propósito de mejorar la legislación vigente, la Comisión se centró en revisar la composición y el cálculo del margen de solvencia, las inversiones más adecuadas para su cobertura, posibles medidas de las autoridades supervisoras y conseguir cierto nivel de homogeneización. De estas medidas surgieron trabajos que fueron las nuevas directivas para así dar paso a lo que se conoce como *Solvencia I*.

De aquí podemos resaltar que el principal cambio respecto de *Solvencia 0* fue que las provisiones técnicas tenían que ser de mejor calidad.

Basilea

Antes de hablar de *Solvencia II*, habrá que hacer un recuento rápido de la historia de los acuerdos de Basilea, debido al parecido diseño de los principios supervisores de ambos.

En 1972 se creó el *Groupe de Contact*, como parte de una supervisión bancaria internacional. En 1974, y como reacción a las crisis bancarias ocurridas en Alemania



y los Estados Unidos, los representantes de los bancos centrales más importantes del mundo expidieron un comunicado en el cual urgieron una mayor coordinación entre las autoridades nacionales a cuyo cargo estaba la supervisión del sistema bancario internacional, y para tal efecto, crearon el *Committee on Banking Regulations and Supervisory Practices*, posteriormente conocido como *The Basle Committee on Banking Supervision*. El primer documento de alcances internacionales suscrito por el Comité se publicó en 1975. Desde entonces se le ha conocido en la literatura especializada como el *Concordato*, por sus repercusiones sobre la cooperación internacional en materia de supervisión (vea [Cooke and Kurowicka \(2006\)](#)).

En 1987, el Comité de Basilea avanzó en el estudio de dos temas centrales: la definición del capital y elegir el sistema de ponderación de los riesgos. Los obstáculos eran las diferencias nacionales en la definición de capital bancario, y en general, las discrepancias entre los sistemas contables bancarios de los países. A finales del año, el Comité anunció una propuesta de convergencia internacional de mediciones y normas de capital. Tras recibir comentarios a la misma en el primer semestre de 1988, el Comité publicó en julio de dicho año el denominado *Acuerdo de Basilea*, posteriormente conocido como *Basilea I* (vea [Basle Committee 1982](#))).

El marco regulatorio de Basilea I trabajó en los puntos siguientes:

- Definición de los elementos constitutivos del capital.
- Las ponderaciones por tipo de riesgo.
- Proponer un porcentaje de capital ponderado por riesgos.
- Definición de mecanismos de transición.

Basilea II

En 1999, el Comité dio un paso significativo en la historia de la regulación financiera internacional al proponer la sustitución de *Basilea I* por una diferente, con un objetivo cercano a las nuevas realidades financieras internacionales. El nuevo acuerdo, conocido como *Basilea II*, propone mejorar la exigencia de capital para los bancos internacionalmente activos. El objetivo principal de *Basilea II* es exigir que el capital mínimo requerido refleje mejor la exposición de los bancos a los diferentes riesgos.

Se publicaron dos documentos consultivos, uno en 1999 y otro en 2001, con el propósito de explicar las bases de un nuevo acuerdo. Ya en estos dos textos se hicieron explícitos tres pilares sobre los cuales se fincaría el nuevo esquema regulador. Estos pilares son:

1. Requerimientos mínimos de capital. Desde *Basilea*

I donde se definió el capital mínimo requerido de un banco como la relación entre el capital regulador y los activos ponderados por riesgo de la entidad, y estableció que esta relación en ningún momento debía descender por debajo de 8%. Esta relación también es conocida como la relación de solvencia de una entidad y expresa cuánto capital hay de respaldo para cada operación del banco.

2. Proceso Supervisor. La finalidad de este pilar que los bancos busquen desarrollar mejores técnicas de gestión de riesgos y velar porque los bancos cuenten con el capital necesario para cubrir su exposición a los diferentes riesgos.
3. Divulgación de la información. La finalidad del tercer pilar radica en la disciplina de mercado como una forma de hacer contrapeso a la mayor libertad otorgada a los bancos en la definición de los requerimientos mínimos de capital.

Solvencia II

En 2001 fue presentado el proyecto de *Solvencia II*, el cual se establecía como un acuerdo para buscar un margen de solvencia que reflejara lo mejor posible los riesgos, y que fuera fácil de modificar ante cambios en el entorno financiero.

En una primera fase, las bases de este esquema regulatorio eran las siguientes.

- Los requisitos de capital deben ser cubiertos por fondos propios, es decir que los activos se valorarán por el importe por el cual podrían intercambiarse, y los pasivos se valorarán por el importe por el cual podrían liquidarse, o transferirse.
- Se pide la constitución de provisiones técnicas adecuadas utilizando métodos estadísticos y actuariales.

En una segunda fase, se introdujeron dos niveles de solvencia:

- Nivel inferior: Capital Mínimo Requerido (MCR, por sus siglas en inglés). Este podía calcularse mediante una fórmula estándar.
- Nivel superior: Requerimiento de Capital de Solvencia (SCR por sus siglas en inglés). Para el caso mexicano esta dada en el capítulo 6.2 de la Circular Única de Seguros y Fianzas.

El proceso de *Solvencia II* va acompañado por una serie de estudios de impacto supervisados en un principio por CEIOPS (QIS1, QIS2, QIS3), y posteriormente por la



Comisión Europea (QIS4 Y QIS5), los cuales tratan de asemejar los principios de solvencia en expresiones analíticas que permiten una evaluación adecuada y eficiente del riesgo de una entidad aseguradora.

De manera resumida, los estudios y su principal aportación:

- QSI1. Da las principales características que deben tener los cálculos para llevar a cabo la evaluación de provisiones técnicas.
- QSI2. Plantea un modelo como un conjunto de expresiones analíticas y cuya finalidad es la obtención del SCR.
- QSI3. Se afina y detalla en modelo presentado en QSI2.
- QSI4. Calcula el SCR mediante el cálculo de capital de solvencia para cada categoría de riesgo, así como el cálculo del MCR.

Solvencia II en México

En 2008, la CNSF difundió la primera versión de la Ley de Instituciones de Seguros y Fianzas (LISF), la cual se sustenta en el esquema de *Solvencia II* con el que habían trabajado los miembros del CEE, así como la formación de un Comité de *Solvencia II*, por parte de la Asociación Mexicana de Instituciones de Seguros (AMIS). Durante 2009, el Comité de *Solvencia II* desarrolló un primer estudio de impacto cuantitativo para México (QIS1 mexicano), el cual revisó las metodologías empleadas el el QIS4 europeo, con lo que logró redefinir los elementos y modelos para ser empleados en el mercado mexicano.

La LISF integra algunos artículos relevantes en cuanto a Solvencia II. A saber,

1. Gobierno Corporativo: Artículos 69 y 79.
2. Requerimiento de Capital de Solvencia: Artículos 232 al 240.
3. Reservas técnicas; Artículos: 216, 217, 218, 229.
4. Reaseguro; Artículos: 107,230,251, y de 256 al 264.

Conforme a lo establecido en las disposiciones legales, las compañías aseguradoras en México deben cumplir en una presentación anual de reportes regulatorios, los cuales reflejan su situación respecto a su organización, operaciones, contabilidad, inversión y patrimonio. Esta información se les solicita con los fines de regulación, supervisión, control, inspección, vigilancia y obtener información estadística.



A continuación se enuncian a grandes rasgos los reportes regulatorios que solicita la CNSF, así como las implicaciones que tiene sobre ellos Solvencia II.

- **Reporte regulatorio sobre información corporativa (RR-1).** Este reporte contiene la información general sobre la compañía, sus accionistas o propietarios, así como información sobre su constitución física, legal, y estructura organizacional y la estructura de ciertos Comités dentro de la compañía que deben ser implementados, para así cumplir con el pilar I de Solvencia II.
- **Reporte regulatorio sobre Gobierno Corporativo (RR-2).** De las partes más importantes de este reporte es la inclusión del Manual de Admisión de Riesgos de la compañía, el documento de Autoevaluación de Riesgos y Solvencia Institucionales (ARSI) que incluye la Prueba de Solvencia Dinámica y Manual de Reaseguro.
- **Reporte regulatorio sobre Reservas Técnicas (RR-3).** Este reporte incluye todos los componentes de la reserva de riesgos en curso para cada ramo en operación entre las cuales destacan el BEL-obligaciones futuras por el riesgo cubierto, el BEL-gastos de administración y el Margen de riesgo.
- **Reporte regulatorio sobre Requerimientos de Capital (RR-4).** El reporte incluye los resultados obtenidos del Sistema de Cálculo del Requerimiento de Capital de Solvencia, la información de reservas técnicas de seguros y los triángulos de reclamaciones pagadas y recuperación de garantías de fianzas.
- **Reporte regulatorio sobre Activos e inversiones (RR-5).** En este reporte se debe entregar la documentación sobre las inversiones de la institución, los contratos celebrados con intermediarios financieros y la comprobación de las aportaciones a los fondos especiales de seguros.
- **Reporte regulatorio sobre Reaseguro y Reafianzamiento (RR-6).** Algunos de los temas más importantes que maneja el reporte son los contratos realizados con reaseguradoras extranjeras, información sobre los cúmulos de responsabilidades emitidas y retenidas, así como los límites máximos de retención.
- **Reporte regulatorio sobre Estados Financieros (RR-7).** En este reporte se entrega un esquema general sobre los estados financieros de la institución, el detalle de cada uno de sus conceptos y la documentación que evidencie la certificación de dichos estados financieros.
- **Reporte regulatorio sobre Información estadística**

(RR-8). En éste se detallan las entregas de la información para los Sistemas Estadísticos del Sector Asegurador (SESA) de acuerdo a lo establecido en los manuales de cada ramo.

- **Reporte regulatorio sobre Operaciones Contratadas con Terceros (RR-9).** Aquí se reportan los contratos de prestación de servicios vigentes que las instituciones tengan celebrados con las personas morales, por medio de un contrato de adhesión sin la participación directa de un agente. Dichos participantes son reportados a la CNSF para ser aprobados, es decir despachos, brokers y otros medios de venta distintos a agentes de seguros.
- **Reporte regulatorio sobre Estados Financieros de Sociedades Controladoras (RR-10).** Aquí se presentan los estados financieros, las reclasificaciones dentro del Balance General y los estados financieros de la sociedad controladora y de las subsidiarias. Esto aplica para instituciones controladoras con diversas subsidiarias tal que la información sobre la integración accionaria de la Sociedad Controladora y el total de acciones en circulación también deben ser descritas y reportadas.
- **Reporte regulatorio sobre Estados Financieros de Intermediarios de reaseguro (RR-11).** Estados financieros de los intermediarios de reaseguro cumpliendo una serie de requisitos encaminados a demostrar una sólida posición financiera.

Pilares de solvencia

En esencia, *Solvencia II* se rige por tres pilares de actuación. El primero consiste en cuantificar los requerimientos de capital para afrontar los riesgos asumidos, el segundo se ocupa del control interno, y el tercero busca transparencia de la información. A continuación se describe cada uno de manera general.

1. Pilar I. Consiste en la búsqueda de los procedimientos para el cálculo de los requerimientos de capital, acordes con el diverso nivel de complejidad de las instituciones y cuyos resultados sean más sensibles al riesgo. Este proceso depende del BEL, del margen de riesgo y del requerimiento de Capital de Solvencia.
2. Pilar II. Se centra en la actuación del órgano supervisor que debe ocuparse de que las compañías se encuentren bien dirigidas y que cumplan adecuadamente con los niveles de gestión de riesgo. Los principales aspectos que evalúa este pilar son:

- Sistema de gestión y seguimiento del riesgo.
- Estrategia y apetito al riesgo.
- Autoevaluación del riesgo y la solvencia.

3. Pilar III. Busca fomentar la transparencia del mercado exigiendo a las instituciones la divulgación de su información con el fin de establecer una transparencia correspondiente a su situación financiera así como de solvencia, dicha información es destinada a los participantes del mercado.

Medidas de riesgo

Podemos entender al riesgo como un evento con incertidumbre, es decir, un evento que puede o no ocurrir, y que trae consigo consecuencias adversas. Para poder cuantificar el riesgo, definimos un espacio de probabilidad dado por la tripleta (Ω, \mathcal{F}, P) , en donde Ω representa un espacio muestral y cualquier $\omega \in \Omega$ es un experimento, \mathcal{F} es una σ -álgebra y P es una medida de probabilidad.

En este contexto, pensemos en los seguros los cuales se refieren al negocio de transferir (total o parcialmente) el impacto económico de contratiempos imprevistos a un precio específico. Debido a que la compañía no sabe de manera concreta si el impacto económico tendrá lugar o no, el precio de esta transferencia dependerá de la cuantificación que se pueda hacer del riesgo, por ejemplo, si se vende un seguro de vida, a una persona de 60 años y otro a una persona de 25 años, podríamos inferir que hay mayor probabilidad, y por lo tanto un mayor riesgo, de que la persona de 60 años muera primero y por lo que el precio de tal producto debería ser más elevado que el de la persona de 25 años.

Para definir formalmente una medida de riesgo, suponemos que L es una variable aleatoria de pérdida sobre (Ω, \mathcal{F}, P) con un horizonte de tiempo δ . Denotaremos por $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ al espacio de todas las variables aleatorias definidas en (Ω, \mathcal{F}) . Para riesgos financieros, usamos el conjunto $\mathcal{M} \subset L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e interpretamos las variables aleatorias en este espacio como un portafolio de pérdidas en un horizonte de tiempo.

Suponga que \mathcal{M} es un cono convexo. Esto es,

- Si $L_1 \in \mathcal{M}$ y $L_2 \in \mathcal{M}$ entonces $L_1 + L_2 \in \mathcal{M}$.
- $\lambda \in \mathbb{R}$ para todo $\lambda > 0$.

Definición 1.1. Una medida de riesgo es un mapeo $\rho : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, definido en algunos conos de variables aleatorias.

Interpretaremos a $\rho(L)$ como la cantidad de capital que se debe agregar a una posición con una pérdida dada por L , de modo que la posición sea aceptable para un controlador de riesgo interno o externo.



Tratamos de responder a las siguientes preguntas: ¿qué medidas de riesgo son buenas?, ¿qué significa una buena medida de riesgo? Desafortunadamente no es posible hacerlo concretamente. Sin embargo, el concepto de coherencia de una medida de riesgo nos da una buena aproximación. Vea (Klugman *et al.* 2019, Definition 3.10).

Definición 1.2. Una medida de riesgo es coherente si satisface los axiomas de invarianza, subaditividad, homogeneidad positiva y monotonía.

El VaR se ha vuelto una medida estándar para medir la exposición al riesgo. En términos de probabilidad, se puede definir como el α -ésimo cuantil de la distribución futura de las pérdidas y ganancias. Esto es, si denotamos a esta distribución como F_R , entonces el VaR con un nivel de confianza $\alpha \in (0, 1)$, denotado por VaR_α está definido por

$$VaR_\alpha(L) = \inf\{l | P(L \leq l) \geq \alpha\}.$$

Desafortunadamente, el VaR no cumple con el axioma de subaditividad. Sin embargo, sí cumple la propiedad de subaditividad en el conexto de distribuciones elípticas. Utilizaremos este hecho más tarde.

Debido a que las entidades reguladoras han impuesto un requerimiento mínimo de capital para cubrir los riesgos, el VaR se ha convertido en una medida universal. Esto gracias a las ventajas que esta brinda, como son:

- Su fácil interpretación.
- Puede ser calculado bajo distintos métodos.
- Puede tomar en cuenta los riesgos específicos al incluir la distribución del riesgo.

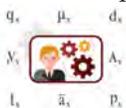
Aunque algunas de sus deventajas son:

- No describe la peor pérdida.
- No describe las pérdidas en la cola izquierda de la distribución
- Muchas veces cae en el supuesto de la normalidad.

Una medida de riesgo que sí es coherente es la llamada *Expected Shortfall* (ES). Se define como el promedio de las pérdidas superiores al VaR_α . Esto es, dado un nivel de confianza $\alpha \in (0, 1)$,

$$ES_\alpha(L) = E(L | L \geq VaR_\alpha) \\ = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 VaR_u(L) \, du$$

Esta medida ofrece ventajas adicionales al VaR_α , ya que el VaR_α no brinda información sobre la magnitud de los valores que lo superan, mientras que el ES_α , sí.



Otra forma en que podemos expresar al ES_α , es la pérdida esperada dado que ésta excede el α -ésimo percentil (denotado por π_α) de la distribución de L .

$$ES_\alpha = E(L | L \geq \pi_\alpha) \\ = \frac{1}{1 - F(\pi_\alpha)} \int_{\pi_\alpha}^{\infty} l f(l) \, dl \\ = \pi_\alpha + \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\pi_\alpha}^{\infty} (l - \pi_\alpha) f(l) \, dl \\ = VaR_\alpha(L) + \frac{\int_{\pi_\alpha}^{\infty} S(l) \, dl}{S(\pi_\alpha)} \\ = VaR_\alpha(L) + e(\pi_\alpha),$$

donde $S(\cdot)$ es la función de supervivencia de la variable aleatoria, $\pi_\alpha = VaR_\alpha(L)$, y $e(\pi_\alpha)$ es la llamada *función de exceso sobre la media*. Esta expresión nos asegura que ES_α es mayor que su correspondiente VaR_α por el promedio de exceso de todas las pérdidas que exceden al VaR_α .

Otra medida habitual es el *Conditional VaR*. Ésta representa el valor esperado de las pérdidas que exceden al VaR. O sea,

$$CVar_\alpha(L) = E(L - VaR_\alpha(L) | L > VaR_\alpha(L)) \\ = ES_\alpha(L) - VaR_\alpha(L).$$

Es fácil ver que el CVaR está relacionado con la función de exceso sobre la media, a través de:

$$CVar_\alpha(L) = e(VaR_\alpha(L)).$$

Por lo tanto, la evaluación de la función de exceso sobre la media en los cuantiles produce CVaR.

Una medida muy usual también es el llamado *Tail Conditional Expectation* (TVaR). Esta medida se define como

$$TVaR_\alpha(L) = -E\left(\frac{L}{l} \mid \frac{L}{l} \leq -VaR_\alpha(L)\right),$$

Solvencia II y las cópulas

Hasta este punto hemos visto que una de las partes fundamentales de solvencia siempre ha sido tener un correcto cálculo del capital de solvencia.

Definición 1.3. Se define como la cantidad de recursos necesarios para hacer frente a los riesgos asumidos en función de su administración y tal que la probabilidad de que éstos sean suficientes corresponda a un nivel de confianza α

$$RCS = \rho(L_{CIA,\alpha}) - E(L_{CIA}),$$

donde L_{CIA} denota la variable aleatoria de pérdida de la compañía de seguros y ρ es una medida de riesgo.

Tanto el enfoque europeo, como el mexicano usan como medida de riesgo al VaR y un nivel de confianza del 99.5% bajo un horizonte temporal de un año, donde horizonte temporal se refiere a que dicho capital deberá ser suficiente para cubrir el riesgo durante un año.

Para la estimación del RCS, se plantean dos enfoques:

- Enfoque bottom-up. Consiste en calcular los capitales requeridos por cada riesgo de manera individual y posteriormente agregarlos en un requerimiento total tomando en cuenta la interdependencia entre los diversos riesgos y subriesgos. Dicho enfoque es el adoptado por la Unión Europea.
- Enfoque top-down. Consiste en construir un modelo estocástico que incorpore todos los riesgos de manera simultánea, generando directamente una distribución del RCS agregado. Este enfoque es el adoptado por la regulación mexicana.

En este trabajo nos concentraremos en el enfoque top-down. En México el Requerimiento de Capital de Solvencia se señala en el artículo 236 de la Ley de Instituciones de Seguros y de Fianzas (LISF), y se calcula conforme a lo establecido en el capítulo 6 de la Circular Única de Seguros y de Fianzas (CUSF). En específico de acuerdo con el capítulo 6.2 del RCS se determina con base en:

1. Riesgos Técnicos y Financieros de Seguros.
2. Riesgos Basados en la Pérdida Máxima Probable.
3. Riesgos Técnicos y Financieros de los Seguros de Pensiones.
4. Riesgos Técnicos y Financieros de Fianzas.
5. Otros Riesgos de Contraparte.
6. Riesgo Operativo.

Y la fórmula general está dada por:

$$RCS = \max \left(RC_{TyFS} + RC_{PML}, 0.9 RC_{TyFS} \right) + RC_{TyFP} + RC_{TyFF} + RC_{OC} + RC_{Op},$$

donde

- RC_{TyFS} es el Requerimiento de Capital por Riesgos Técnicos y Financieros de Seguros.
- RC_{PML} es el Requerimiento de Capital por Riesgos Basados en la Pérdida Máxima Probable.
- RC_{TyFP} es el Requerimiento de Capital por Riesgos Técnicos y Financieros de los Seguros de Pensiones.

- RC_{TyFF} es el Requerimiento de Capital por Riesgos Técnicos y Financieros de Fianzas.
- RC_{OC} es el Requerimiento de Capital por Otros Riesgos de Contraparte.
- RC_{Op} es el Requerimiento de Capital por Riesgo Operativo

La variable de nuestro interés será RC_{TyFS} , donde dicho requerimiento de capital, de acuerdo con el capítulo 6.3 de la CUSF, considerará las pérdidas que pueda sufrir la institución ocasionadas por los siguientes riesgos:

1. Los riesgos técnicos de suscripción por seguros directo y reaseguro tomando en las operaciones de vida (incluyendo los riesgos de primas y reservas, y el riesgo por eventos extremos), accidentes y enfermedades y daños.
2. Riesgos financieros dividido en riesgos de mercado y riesgo de crédito o contraparte.
3. Los riesgos de concentración asociados a una inadecuada diversificación de activos y pasivos
4. El riesgo de descalce entre activos y pasivos.

En adición el modelo deberá ser basado en la generación de escenarios estocásticos que reflejen la variabilidad de los riesgos ante situaciones extremas, en horizonte de tiempo de un año y a partir de la fecha de cálculo.

Así, el requerimiento de capital por Riesgos Técnicos y Financieros de Seguros está dado por

$$RC_{TyFS} = \max\{0, VaR_{99.5\%}(L)\},$$

con

$$L = -\Delta A + \Delta P - \Delta REA_{PML} \\ = L_A + L_p + L_{PML},$$

donde la variable L_A esta formada por las pérdidas en el valor de los activos sujetos a los riesgos de mercado, de tasa de interés, accionario, de spread y de tipo de cambio, así como a las pérdidas en el valor de los activos sujetos al riesgo de concentración y de crédito. Esto es,

$$L_A = -\Delta A = -(A(1) - A(0)).$$

Por otra parte, la variable L_p está formada por las pérdidas generadas por el incremento en el valor de los pasivos sujetos a los siguientes riesgos:

- Riesgos técnicos de suscripción de vida (mortalidad, caducidad, invalidez, supervivencia, pérdidas orgánicas, muerte accidental y muerte colectiva).



se utiliza una cópula, el problema radica en que estos ramos y subramos son muchos, y las cópulas pueden tener problemas para grandes dimensiones por ello nuestro objetivo será presentar una metodología para poder modelar esta estructura de dependencia de manera adecuada. Las secciones 2 y 3 se encargan de ello.

2. TEORÍA DE CÓPULAS

Como hemos estudiado en la sección anterior, tanto para el sector financiero, como para el asegurador, es importante la medición del riesgo. Debemos considerar las interacciones entre los diversos factores de riesgo estudiando dependencias en dos clases: La dependencia longitudinal (a lo largo del tiempo) que puede ser modelada a través de series de tiempo, y la dependencia transversal (entre los factores de riesgo) que se puede ser modelada a través de **cópulas**.

En términos generales, una cópula es una función que contiene información relacionada con la dependencia de dos o más variables aleatorias, partiendo del estudio individual de cada una. Es decir nos dan la estructura de dependencia para aproximar el comportamiento conjunto, separando los comportamientos individuales.

Definición 2.1. Sean $d \geq 2$, y $U_i \sim U(0,1)$ para cada $i = 1, 2, \dots, d$. La función $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ es una d -cópula si se trata de la función de distribución multivariada del vector $\mathbf{u} := (U_1, \dots, U_d)$. Esto es, $C(\mathbf{u}) = C(u_1, \dots, u_d)$.

De la Definición anterior se desprenden las propiedades siguientes.

1. $C(u_1, \dots, u_d)$ es creciente en cada componente u_i .
2. $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, d$ y $u_i \in [0, 1]$.
3. Para todos $(a_1, \dots, a_d), (b_1, \dots, b_d) \in [0, 1]^d$ con $a_i \leq b_i$ tenemos que

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_d} C(u_{1i_1}, \dots, u_{di_d}) \geq 0,$$

donde $u_{j1} = a_j$ y $u_{j2} = b_j$ para $j = 1, 2, \dots, d$.

Las propiedades 1 y 3 son propias de cualquier función de distribución multivariada, mientras que la propiedad 2 proviene del hecho de que las funciones de distribución marginales son uniformes estándar. Vea (Joe 1997, p.120-141).

Sklar mostró que es posible resumir la estructura de dependencia de un vector aleatorio a través de la cópula a

partir de dos observaciones: la primera, que toda función de distribución multivariada tiene una cópula asociada; y la segunda, que la función de distribución multivariada puede ser construida a partir de la cópula y las funciones de distribución marginales.

Teorema 2.2 (Teorema de Sklar (Sklar 1959)). Sea $F(r_1, \dots, r_d)$ la función de distribución conjunta de las variables aleatorias R_1, \dots, R_d con funciones de distribución marginales $F_1(r_1), \dots, F_d(r_d)$. Entonces existe una función $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$F(r_1, \dots, r_d) = C(F_1(r_1), \dots, F_d(r_d)) \quad \forall r \in \mathbb{R}^d. \quad (1)$$

Si $F_1(r_1), \dots, F_d(r_d)$ son continuas, entonces C es única. De otra forma, C está definida únicamente en $\text{Ran}(F_1) \times \dots \times \text{Ran}(F_d)$ donde $\text{Ran}(F_i) := \{z : z = F(x) \text{ para alguna } x\}$ denota el rango de F_i , $i = 1, 2, \dots, d$.

Demostración. Probaremos el caso en el que las marginales son continuas. Podemos garantizar que las marginales son uniformes y por lo tanto tienen por distribución a una cópula.

Entonces, expresando (1) en términos de $r_i = F_i^{\leftarrow}(u_i)$, para $i = 1, \dots, d$ se obtiene:

$$C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{\leftarrow}(u_1), \dots, F_d^{\leftarrow}(u_d)). \quad (2)$$

Por (2), una cópula C puede ser representada en términos de la función de distribución multivariada F y sus distribuciones marginales F_1, \dots, F_d . Por otro lado, partiendo de F, F_1, \dots, F_d y $u_i = F(r_i)$ para $i = 1, \dots, d$ se tiene que:

$$\begin{aligned} F(r_1, \dots, r_d) &= P(R_1 \leq r_1, \dots, R_d \leq r_d) \\ &= P(F_1(R_1) \leq F_1(r_1), \dots, F_d(R_d) \leq F_d(r_d)) \\ &= P(U_1 \leq u_1, \dots, U_d \leq u_d) \\ &= C(u_1, \dots, u_d). \end{aligned} \quad (3)$$

Por lo tanto, (2) implica que la cópula C asociada a la distribución multivariada F existe, mientras (3) implica que esta cópula es única. \square

Las ecuaciones (1) y (3) muestran la relación entre cópula y la función de distribución conjunta. El Teorema 2.2 indica, por un lado, que la función de distribución conjunta puede ser entendida como la combinación de distribuciones marginales a través de la cópula, mientras que (3) muestra cómo se puede expresar la cópula de la función de distribución multivariada. Vea (Bedford and Cooke 2002b).

Podemos concluir que el Teorema 2.2 puede interpretarse como la descomposición de la función de distribución



multivariada en dos componentes: la estructura de dependencia y el comportamiento univariado. La primera componente corresponde a la cópula, mientras que la segunda esta asociada a las distribuciones marginales.

Antes de seguir, notemos algunas de las implicaciones que nos deja el Teorema 2.2.

- Si F_1, F_2, \dots, F_d son funciones de distribución univariadas, y C es una d -cópula cualquiera, entonces la función F definida por $F(r_1, \dots, r_d) = C(u_1, \dots, u_d)$ es una función de distribución conjunta con marginales F_1, F_2, \dots, F_d . Esto nos quiere decir que para cualquier función de distribución F se puede derivar una cópula C usando (3). En el caso de cuando las distribuciones marginales son continuas, se puede obtener a través de la fórmula:

$$C(u_1, \dots, u_d) = (F_1^{\leftarrow}(u_1), F_2^{\leftarrow}(u_2), \dots, F_d^{\leftarrow}(u_d)) \quad (4)$$

donde F_i^{\leftarrow} denota la función inversa generalizada. Por lo cual podemos concluir que las cópulas son esencialmente una forma de transformar un vector aleatorio R_1, R_2, \dots, R_d en otro vector aleatorio $(U_1, U_2, \dots, U_d) = (F_1(R_1), F_2(R_2), \dots, F_d(R_d))$ que tienen marginales uniformes, y también preservan la dependencia entre los componentes.

- El Teorema 2.2 nos da una herramienta para construir distribuciones multivariadas con marginales y cópulas arbitrarias. Si conocemos la cópula C de un vector aleatorios d -dimensional y sus marginales F_1, \dots, F_d , entonces:

$$F(r_1, r_2, \dots, r_d) = C(F_1(r_1), F_2(r_2), \dots, F_d(r_d)). \quad (5)$$

La idea principal detrás de esto es poder encontrar la distribución conjunta de un vector aleatorio con sólo estimar las marginales y la cópula.

- Si usamos el Teorema 2.2, para pasar de la función densidad f , por medio de una distribución F absolutamente continua, con marginales continuas estrictamente crecientes F_1, F_2, \dots, F_d , usando la regla de la cadena, una función de densidad de la cópula está dada por:

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{\partial^d C(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_1 \cdots \partial u_d} \quad (6)$$

Retomando (3), tenemos una manera de vincular la función cópula con distribuciones marginales arbitrarias para llegar a la función de distribución con-

junta, de la cual obtenemos la correspondiente relación para las densidades:

$$f(r_1, \dots, r_d) = c(F_1(r_1), \dots, F_d(r_d)) \cdot f_1(r_1) \cdots f_d(r_d). \quad (7)$$

Las cópulas tienen un rango específico de valores que pueden tomar. Las cotas de Fréchet-Hoeffding nos permiten acotar el valor de la cópula superior e inferiormente.

Teorema 2.3 (Cotas de Fréchet- Hoeffding). Sean

$$W^d(\mathbf{u}) := \max \left\{ \sum_{i=1}^d u_i + 1 - d, 0 \right\}, \quad (8)$$

$$M^d(\mathbf{u}) := \min \{u_1, \dots, u_d\}.$$

Podemos acotar los valores de una d -cópula de la forma siguiente:

$$W^d(\mathbf{u}) \leq C(\mathbf{u}) \leq M^d(\mathbf{u}). \quad (9)$$

Demostración. Para la primera desigualdad en (9), tenemos que:

$$\begin{aligned} C(u_1, \dots, u_d) &= P(F_1(R_1) \leq u_1, \dots, F_d(R_d) \leq u_d) \\ &= 1 - P(F_1(R_1) > u_1, \dots, F_d(R_d) > u_d) \\ &\geq 1 - \sum_{i=1}^d P(F_i(R_i) > u_i). \end{aligned}$$

Desarrollando tenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d P(F_i(R_i) > u_i) &= \sum_{i=1}^d [1 - P(F_i(R_i) \leq u_i)] \\ &= \sum_{i=1}^d (1 - u_i) \\ &= d - \sum_{i=1}^d u_i. \end{aligned}$$

De aquí se sigue que $C(u_1, \dots, u_d) \geq 1 - d + \sum_{i=1}^d u_i$.

Para la segunda desigualdad en (9), tenemos que, para $i = 1, \dots, d$,

$$C(u_1, \dots, u_d) \leq C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i.$$

Por lo tanto, $C(u_1, \dots, u_d) \leq \min \{u_1, \dots, u_d\}$ \square

Teorema 2.4 (Cota Inferior de Fréchet - Hoeffding). Para toda $d \geq 2$ y cualquier $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$ fijo, existe una d -cópula $C_{\mathbf{u}}$ que depende de \mathbf{u} , tal que $W^d(\mathbf{u}) = C_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})$.



Dado $U \sim U(0,1)$, se puede verificar que:

$$(U, U - 1) \sim W^2 \text{ y } (U, \dots, U) \sim M^d.$$

Gracias a estas representaciones estocásticas, la dependencia entre los componentes modelados por M^d es *perfectamente positiva*, en el sentido de que si un componente aumenta, todos los demás componentes también aumentan casi seguramente, mientras que la dependencia modelada por los componentes de W^2 se llama *dependencia negativa perfecta*, en el sentido de que si un componente aumenta, el otro componente casi seguramente disminuye. Sin embargo, esta noción de dependencia negativa perfecta no puede extenderse al caso $d \geq 3$, ya que si dos componentes son perfectamente negativos entre sí, ambos no pueden ser perfectamente negativos de un tercero. De aquí, podemos decir que:

- La cota inferior de Fréchet-Hoeffding no es cópula para $d > 2$. Para el caso $d = 2$ se conoce como la *cópula de contracomonotonía*.
- La cota superior si es cópula. Se conoce como la *cópula de comonotonía*.

Ejemplos de Cópulas

Existen diversos criterios para clasificar los distintos tipos de cópulas. Puede hacerse en función de la dependencia, de sus parámetros, de su soporte (continuo o discreto), o del tipo de relación que reflejan. Una forma común de clasificarlas es la siguiente.

Cópulas Fundamentales

Ejemplo 2.5 (Cópula de independencia). *Uno de los ejemplos más intuitivos acerca de la cópula se encuentra cuando hay independencia entre variables aleatorias. Si R_1 y R_2 son dos variables aleatorias independientes, se tiene que su función de distribución conjunta es*

$$\begin{aligned} F(r_1, r_2) &= F_1(r_1)F_2(r_2) = P(R_1 \leq r_1, R_2 \leq r_2) \\ &= P(F_1(R_1) \leq F_1(r_1), \dots, F_d(R_d) \leq F_d(r_d)) \\ &= P(U_1 \leq u_1, \dots, U_d \leq u_d) = u_1 u_2 = C^I(u_1, u_2), \end{aligned}$$

donde $U_1, U_2 \sim U(0,1)$. Esta cópula se llama *cópula de independencia*. De forma general, para d variables aleatorias, la cópula de independencia es:

$$C^I(u_1, \dots, u_d) = \prod_{j=1}^d u_j.$$

Vea la figura 1.

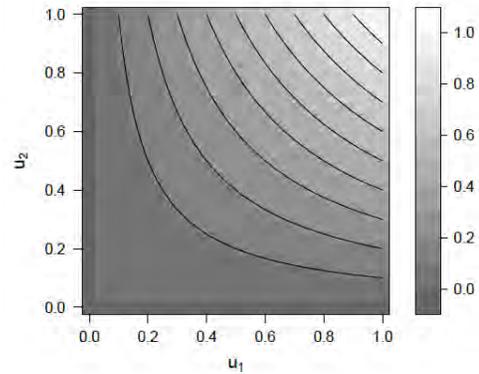
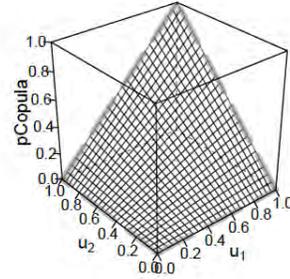


Figura 1 Independencia y sus curvas de nivel.

Ejemplo 2.6 (Comonotonía). *Entendemos por dependencia perfectamente positiva entre dos variables aleatorias cuando una de ellas es una función creciente de la otra, esta dependencia es conocida como comonotonía. La cópula que representa este tipo de dependencia es la que está asociada a la cota superior de Fréchet $M^d(u_1, \dots, u_d)$. Si tenemos R_1, \dots, R_d variables aleatorias comonótonas, entonces*

$$\begin{aligned} F(u_1, \dots, u_d) &= \min\{F_1(r_1), \dots, F_d(r_d)\} \\ &= P(U \leq \min\{F_1(r_1), \dots, F_d(r_d)\}) \\ &= P(U \leq F_1(r_1), \dots, U \leq F_d(r_d)) \\ &= P(F_1^{-1}(U) \leq r_1, \dots, F_d^{-1}(U) \leq r_d). \end{aligned}$$

De aquí concluimos que R_1, \dots, R_d se encuentran en función de la misma variable aleatoria U .

En el caso de variables aleatorias continuas, la comonotonía se presenta en que cada una de las variables aleatorias es una función creciente de una sola variable aleatoria Z . Formalmente

$$(R_1, \dots, R_d) \stackrel{d}{=} (v_1(Z), \dots, v_d(Z)), \quad (10)$$



donde v_1, \dots, v_d son funciones monótonas crecientes. Vea la figura 2.

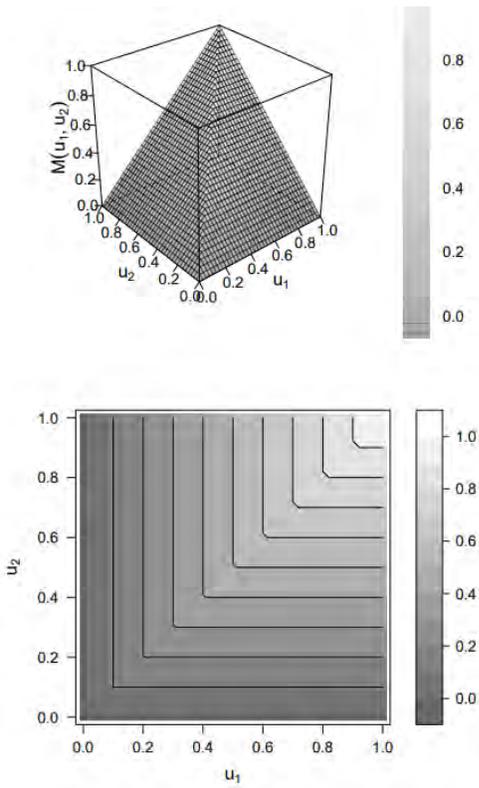


Figura 2 Comonotonía y sus curvas de nivel.

Ejemplo 2.7 (Contracomonotonía). Análogo al caso de comonotonía, la contracomonotonía se refiere al caso en el que existe dependencia perfecta negativa entre variables aleatorias, y su cópula está asociada con la cota inferior de Fréchet (únicamente válida para $d = 2$), definida por (8). Otra forma de entender este concepto, es similar a (10), donde en el caso $d = 2$ tenemos

$$(R_1, R_2) \stackrel{d}{=} (v_1(Z), v_2(Z)),$$

donde v_1 es una función monótona creciente, mientras que v_2 es una función monótona decreciente. Note que la cópula de contracomonotonía corresponde al caso en que dos variables aleatorias R_1 y R_2 dependen del vector $(U, 1 - U)$, con $U \sim U(0, 1)$. Vea la figura 3.



Contracomonotonía

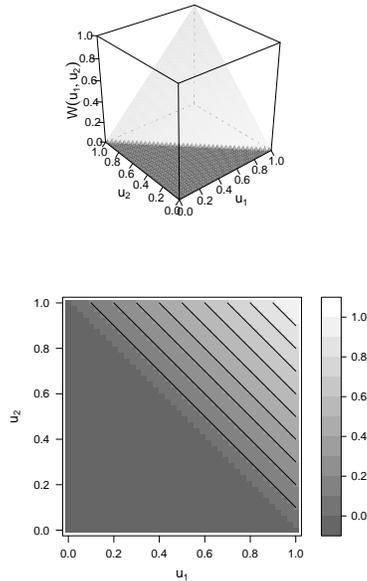


Figura 3 Contracomonotonía y sus curvas de nivel.

Cópulas implícitas. Son cópulas que surgen de distribuciones conocidas, es decir, su forma funcional coincide con una función de distribución conocida. Un ejemplo es (4).

Cópulas explícitas. Poseen una forma funcional propia y sencilla, un ejemplo de éstas son las meta-distribuciones que vimos en la ecuación (5).

Familias de cópulas

Las cópulas modelan estructuras de dependencia, por ello son importantes en la construcción de funciones de distribución multivariantes y, como consecuencia, tener a nuestra disposición una variedad de cópulas puede ser muy útil para construir modelos estocásticos que tienen diferentes propiedades que a veces son indispensables en la práctica, por ejemplo: colas pesadas, asimetrías, etc. En esta sección comentaremos las familias de cópulas más conocidas.

Ahora mencionamos algunas propiedades generales deseables de las familias de cópulas.

Propiedades generales

Denotemos a $\{C_\theta\}$ como la familia de cópulas donde θ es un parámetro perteneciente a $\Theta \subset \mathbb{R}^d$ con $d \geq 1$. Según (Durante 2010), las propiedades deseables de las cópulas son las siguientes.

1. Interpretabilidad. Los miembros de la familia deberían de tener alguna interpretación en probabilidad sugiriendo situaciones donde ésta puede ser considerada.
2. Flexible y de amplio rango de dependencia. Los miembros de la familia deben de describir diferentes tipos de dependencia, incluyendo:
 - a) La cópula de independencia C^I .
 - b) Una de las cotas de Fréchet-Hoeffding, esto como caso límite respecto a un parámetro.
3. Fácil de manejar. Los miembros de la familia deben poder expresarse en forma cerrada, o, al menos, deberían simularse fácilmente por medio de algún algoritmo conocido.

Cópulas Elípticas

Son cópulas asociadas a las distribuciones elípticas, y su principal característica es que representan relaciones de dependencia simétricas, sin importar que se analice la cola izquierda o derecha de las distribuciones implícadas. Algunas de estas deficiencias son mostradas en (Embrechts and Mcneil 2002).

Definición 2.8 (Distribución elíptica). Se dice que un vector aleatorio $X = (X_1, \dots, X_d)$ tiene una distribución elíptica con vector de medias $\mu \in \mathbb{R}^d$ y matriz de covarianzas $\Sigma = (\sigma_{i,j})$ si X se puede expresar de la forma

$$X \stackrel{d}{=} \mu + RAU,$$

A $A^T = \Sigma$ es la descomposición de Cholesky de Σ , U es un vector aleatorio distribuido uniformemente en la $(d-1)$ -esfera y R es una variable aleatoria positiva, independiente de U , con densidad dada, para cada $r > 0$, por:

$$f_g(r) = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} r^{d-1} g(r^2),$$

donde g es el generador de la densidad multivariada.

En este caso, la función de densidad de una distribución elíptica esta dada, para todo $x \in \mathbb{R}^d$, por

$$h_g(x) = |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} g\left((x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)\right).$$

Definición 2.9 (Cópulas Elípticas). Dado X un vector aleatorio con distribución elíptica F , llamamos cópula elíptica a la función de distribución del vector aleatorio

$$\left(F\left(\frac{X_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right), \dots, F\left(\frac{X_d}{\sqrt{\sigma_{dd}}}\right)\right).$$

La dos cópulas más importantes de esta familia son la cópula Gaussiana y la cópula t de student, las cuales se derivan de funciones de distribución multivariadas con los mismos nombres.

La cópula Gaussiana con matriz de correlación \mathbf{P} es de la forma:

$$C_{\mathbf{P}}(\mathbf{u}) = \frac{\Phi_{\mathbf{P}}\left(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)\right)}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |\mathbf{P}|^{\frac{1}{2}}},$$

donde $\Phi_{\mathbf{P}}$ es la función de distribución multivariada con matriz de correlaciones $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{d \times d}$, y Φ^{-1} es la función de distribución inversa de la distribución normal estándar. Vea la figura 4.

Cópula Gaussiana con $\rho=0.7$

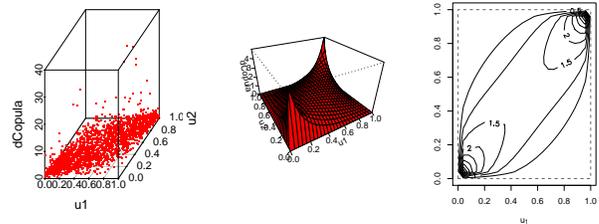


Figura 4 La primera y segunda imágenes representan la densidad; y la tercera, la curva de nivel de una cópula gaussiana de dimensión $d = 2$ y 2000 observaciones.

La cópula t -Student con matriz de correlación $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ y $v > 0$ grados de libertad es de la forma

$$C_{v,\mathbf{P}}(\mathbf{u}) = t_{v,\mathbf{P}}\left(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_d)\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+d}{2}\right) |\mathbf{P}|^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) (v\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_d)} \left(1 + \frac{1}{v} x' \mathbf{P}^{-1} x\right)^{-\frac{v+d}{2}} dx,$$

donde $t_{v,\mathbf{P}}$ es la función de distribución de t -Student multivariada con matriz de correlación $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ y $v > 0$ grados de libertad, y t_v^{-1} es la función de distribución inversa asociada a la distribución t -Student univariada con v grados de libertad. Vea la figura 5.



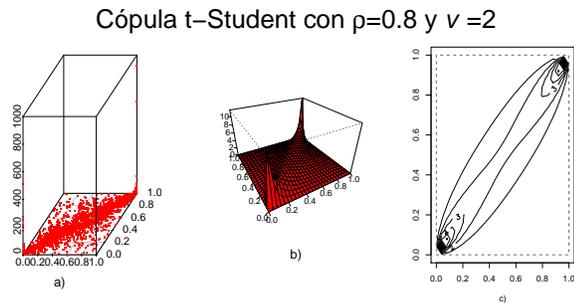


Figura 5 Las imágenes de la izquierda y del centro representan la densidad; y la de la derecha, las curvas de nivel de una cópula t -Student de dimensión $d = 2$ y 2000 observaciones.

Una ventaja que poseen las cópulas Gaussiana y t -Student respecto a las funciones de distribución de las cuales se derivan, es que a partir de las cópulas es posible utilizar variables aleatorias que sigan distribuciones marginales que no sean Gaussianas o t -Student. Notemos que las dos cópulas elípticas recién referidas se encuentran definidas en términos de las funciones inversas Φ^{-1} y t_v^{-1} , éstas se evalúan en variables $u_i = F_i(r_i)$ con $i = 1, \dots, d$ donde F_i corresponde a una función de distribución arbitraria. De aquí, las variables aleatorias cuya estructura de dependencia este descrita por una cópula Gaussiana o t -Student pueden describir comportamientos marginales diferentes. Vea la figura 6.

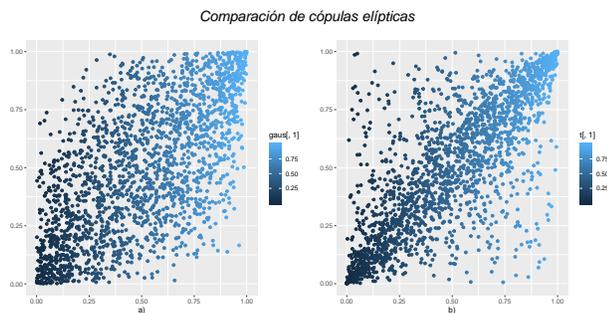


Figura 6 Comparación entre dos cópulas elípticas. La de la izquierda es una cópula Gaussiana; y la de la derecha, una cópula t -Student.



Cópulas Arquimedianas

Esta familia captura una gran variedad de estructuras de dependencia, ya que la representación arquimediana de cópulas permite reducir el estudio de una cópula multivariante a una única función univariante.

Definición 2.10 (Generador arquimediano). Llamamos generador arquimediano a cualquier función continua y decreciente $\Psi : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ que satisfice:

- $\Psi(0) = 1$,
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t) = 0$,
- es estrictamente decreciente en $[0, \inf\{t : \Psi(t) = 0\}]$.

Definición 2.11 (Cópula Arquimediana). Una d -cópula es llamada arquimediana si admite la siguiente representación:

$$C(u) = \Psi \left(\Psi^{-1}(u_1) + \Psi^{-1}(u_2) + \dots + \Psi^{-1}(u_d) \right) \quad (11)$$

para todo $u \in [0, 1]^d$ y algún generador arquimediano Ψ .

Teorema 2.12. (Durante 2010) Sean Ψ un generador arquimediano y una función C_Ψ como en (11). Entonces C_Ψ es una d -cópula si y sólo si Ψ satisface que:

- Ψ es $d - 2$ veces diferenciable en $[0, \infty)$, y su k -ésima derivada es tale que $(-1)^k \Psi^{(k)}(t) \geq 0$,
- $(-1)^{d-2} \Psi^{(d-2)}$ es decreciente y convexa en $[0, \infty)$.

La mayoría de cópulas arquimedianas pertenece a esta familia, y se trata de funciones de uno o dos parámetros. Esto permite representar fácilmente diferentes tipos de dependencia, pero también implica una de sus mayores limitaciones, ya que resulta complicado describir relaciones de dependencia complejas con un número reducido de parámetros, especialmente en dimensiones altas. Vea (Nelsen 2006) para más detalles. Tomamos los siguientes cuatro ejemplos de y (Joe 1997).

1. Cópula Clayton (también conocida como la cópula Cook-Johnson o Kimedorf-Sampson). Vea la figura 7. El generador de esta cópula es $\Psi(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$ con $\theta > 0$. La cópula de Clayton es de la forma:

$$C(u_1, \dots, u_d) = \left(u_1^{-\theta} + \dots + u_d^{-\theta} - d + 1 \right)^{\frac{1}{\theta}} \quad (12)$$

2. Cópula Clayton generalizada. El generador de esta cópula es $\Psi(t) = \theta^{-\delta} (t^{-\theta} - 1)^\delta$ con $\theta > 0$ y $\delta \geq 1$. Para el caso bivariado, la cópula Clayton generalizada es:

$$C(u_1, u_2) = \left[\left((u_1^{-\theta} - 1)^\delta + (u_2^{-\theta} - 1)^\delta \right)^{\frac{1}{\delta}} + 1 \right]^{-\frac{1}{\theta}}$$

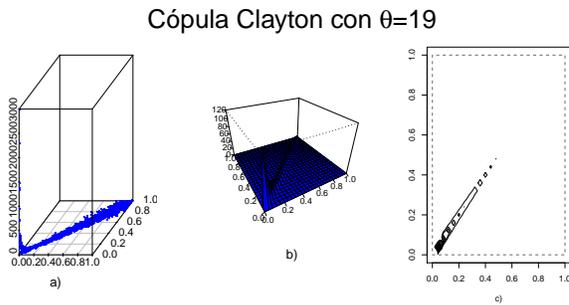


Figura 7 La primera y segunda imágenes representan la densidad; y la tercera, la curva de nivel de una cópula Clayton de dimensión $d = 2$ y 2000 observaciones.

3. Cópula Gumbel (también conocida como cópula de Gumbel-Hougaard.) Su generador esta definido por $\Psi(t) = (-\ln(t))^\theta$ con $\theta > 1$. En este caso la cópula Gumbel toma la forma:

$$C(u_1, \dots, u_d) = e^{(-\ln(u_1))^{-\theta} + \dots + (-\ln(u_d))^{-\theta}}^{\frac{1}{\theta}} \quad (13)$$

Para el caso bivariado, está dada por

$$C_\theta(u_1, u_2) = \exp \left\{ - \left((-\ln(u_1))^\theta + (-\ln(u_2))^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \right\},$$

para $1 \leq \theta \leq \infty$. Vea la figura 8.

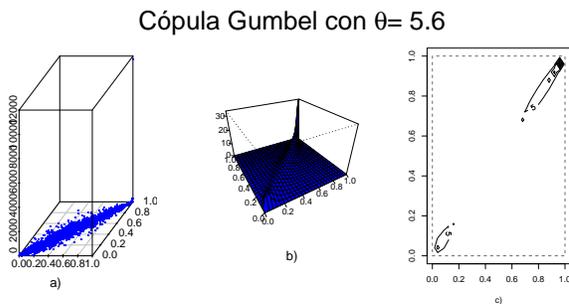


Figura 8 Las imágenes de la izquierda y el centro representan la densidad; y la de la derecha, la curva de nivel de una cópula Gumbel de dimensión $d = 2$ y 2000 observaciones.

4. Cópula Frank. El generador de la cópula Frank esta definido por: $\Psi(t) = -\ln \left(\frac{\exp(-\theta t) - 1}{\exp(-\theta) - 1} \right)$ con $\theta > 0$. Vea la figura 9. La cópula asociada a este generador es:

$$C(u_1, \dots, u_d) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{\prod_{i=1}^d (e^{-\theta u_i} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)^{d-1}} \right)$$

Cópula Frank con $\theta=8$

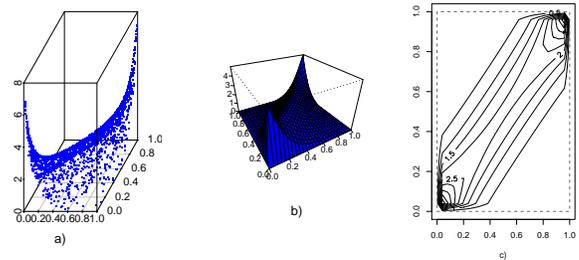


Figura 9 Las imágenes de la izquierda y el centro representan la densidad; y la de la derecha, la curva de nivel de una cópula Frank de dimensión $d = 2$ y 2000 observaciones.

Como se puede observar, estas cópulas Arquimedianas describen tipos de dependencia completamente diferentes. Por ejemplo, la cópula Gumbel muestra dependencia en los extremos únicamente en la cola superior, mientras que la cópula Clayton la exhibe en la cola contraria. Por su parte, la cópula Frank no muestra dependencia en ninguna de las dos colas; y la cópula Clayton generalizada muestra dependencia en los extremos de ambas colas, aunque pueden ser intensidades diferentes. Vea la figura 10

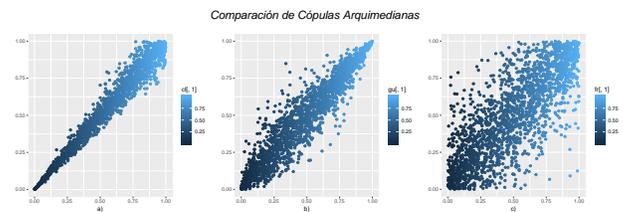


Figura 10 Comparación entre tres cópulas Arquimedianas. La imagen de la izquierda representa una cópula Clayton; la del centro, una Gumbel; y la de la derecha, una Frank.



Cóputas Arquimedianas Jerárquicas. Como ya hemos mencionado, una de las principales desventajas que tienen las cóputas Arquimedianas es que no representan bien la dependencia en dimensiones altas, o sea, con $d \geq 3$. Ahora daremos una alternativa que ha sido usada para usar cóputas arquimedianas en altas dimensiones, las cuales son conocidas como cóputas arquimedianas jerárquicas.

Las cóputas arquimedianas jerárquicas fueron introducidas en (Joe 1997). Se trata de cóputas arquimedianas anidadas en tres y cuatro dimensiones, esto debido a que se obtienen anidando entre sí las cóputas arquimedianas. Éstas pueden capturar diferentes relaciones de dependencia entre diferentes grupos de riesgo y con un número pequeño de parámetros.

Para que una estructura jerárquica arquimediana sea una cóputa adecuada, se debe verificar una condición de anidamiento. Por ejemplo, una cóputa arquimediana tridimensional completamente anidada, puede ser escrita como:

$$C(u_1, u_2, u_3) = C_1(C_2(u_1, u_2), u_3) \\ \Psi_1 \left(\Psi_1^{-1}(u_1) + \Psi_1^{-1} \circ \Psi_2 \left(\Psi_2^{-1}(u_2) + \Psi_2^{-1}(u_3) \right) \right).$$

Para que la estructura jerárquica sea una cóputa adecuada, $\Psi_1^{-1} \circ \Psi_2$ deben tener derivadas completamente monótonas, donde Ψ_1 y Ψ_2 son generadores de cóputa padre, e hijo respectivamente. Si los generadores Ψ_1 y Ψ_2 pertenecen a la misma familia, la verificación de la condición de anidamiento puede hacerse fácilmente. Sin embargo, si estos no pertenecen a la misma familia, la condición puede no ser válida para cualquier elección de parámetros.

De manera general, una cóputa arquimediana d -dimensional completamente anidada puede escribirse así:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_d) = C_1(C_2(u_1, \dots, u_{d-1}), u_d) \\ = \Psi_1 \left(\Psi_1^{-1} \circ C_2(u_1, \dots, u_{d-1}) + \Psi_1^{-1}(u_d) \right).$$

Cóputa de Supervivencia

Otro tipo importante de cóputas son las de supervivencia. El resultado siguiente enuncia sus propiedades.

Proposición 2.13. Sea $R = (R_1, \dots, R_d)$ un vector aleatorio con función de distribución F y funciones marginales de distribución F_1, \dots, F_d . Entonces existe una cóputa de supervivencia



\hat{C} tal que

$$S(r_1, \dots, r_d) = \hat{C}(S_1(r_1), \dots, S_d(r_d)) \\ = P(R_1 > r_1, \dots, R_d > r_d) \\ = P(1 - F_1(R_1) \leq S_1(r_1), \dots, 1 - F_d(R_d) \leq S_d(r_d)),$$

donde S_i es la función de supervivencia de las marginales, es decir $S_i = 1 - F_i$, para $i = 1, \dots, d$. Generalmente, la cóputa de supervivencia \hat{C} de una cóputa C con marginales $U = (U_1, \dots, U_d)$ es usada para denotar la función de distribución de $1 - U$, donde $U := (F_1(R_1), \dots, F_d(R_d))$.

Notemos que las cóputas son simples funciones de distribución multivariadas. En particular, las cóputas tienen función de supervivencia \bar{C} . Si U tiene función de distribución C y la cóputa de supervivencia de C es \hat{C} , la relación entre la cóputa de supervivencia \hat{C} y la función de supervivencia S esta dada por

$$S(u_1, \dots, u_d) = P(U_1 > u_1, \dots, U_d > u_d) \\ = P(1 - U_1 \leq 1 - u_1, \dots, U_d \leq 1 - u_d) \\ = \hat{C}(1 - u_1, \dots, 1 - u_d).$$

Por ejemplo, en el caso bivariado, la relación entre la cóputa C y la cóputa de supervivencia \hat{C} esta dada por:

$$\hat{C}(1 - u_1, 1 - u_2) = 1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2).$$

Cóputas rotadas

Debido a que las cóputas Clayton y Gumbel capturan sólo la dependencia positiva, también introducimos versiones rotadas de ellas para poder modelar la dependencias negativas. Cuando hablamos de una cóputa rotada, nos referimos a rotar la cóputa en sentido contrario al de las manecillas del reloj, esto en 90, 180 y 270 grados. Es decir, para $(U_1, U_2) \in [0, 1]^2$, tenemos que la cóputa rotada 90° (ó 270°) tienen parámetro $\theta < 0$; y una rotada 180° , tiene parámetro $\theta > 0$, si y sólo si $(1 - U_1, U_2)$ (resp. $(U_1, 1 - U_2)$) y $(1 - U_1, 1 - U_2)$ siguen la cóputa original C con parámetro θ . De hecho (Nelsen 2006) nos proporciona las funciones de distribución correspondientes

$$C_{90}(u_1, u_2) = u_2 - C_{-\theta}(1 - u_1, u_2), \\ C_{180}(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 + C_\theta(1 - u_1, 1 - u_2), \\ C_{270}(u_1, u_2) = u_1 - C_{-\theta}(u_1, 1 - u_2);$$

así como las funciones de densidad:

$$c_{90}(u_1, u_2) = c_{-\theta}(1 - u_1, u_2), \\ c_{180}(u_1, u_2) = c_\theta(1 - u_1, 1 - u_2), \\ c_{270}(u_1, u_2) = c_{-\theta}(u_1, 1 - u_2).$$

Por lo tanto, la cópula Clayton rotada se obtiene sustituyendo C por la correspondiente función distribución, es decir por (12). De manera análoga con la cópula Gumbel rotada, con (13). Vea las figuras 11 y 12.

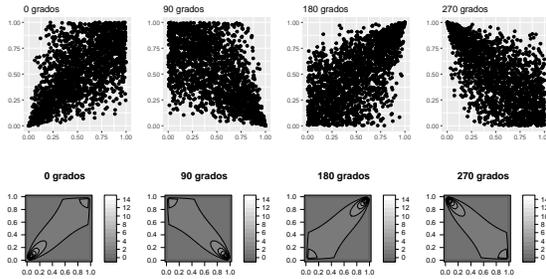


Figura 11 Gráficos de puntos y curvas de nivel de una cópula Clayton biviariada de parámetro $\theta = 2$, y sus rotaciones a $90^\circ, 180^\circ$ y 270° .

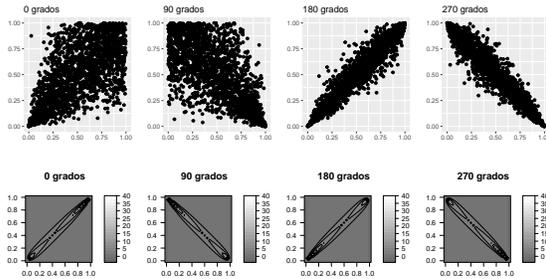


Figura 12 Gráficos de puntos y curvas de nivel de una cópula Gumbel biviariada de parámetro $\theta = 2$, y sus rotaciones a $90^\circ, 180^\circ$ y 270° .

Medidas de dependencia

Las medidas de dependencia son usadas el sector asegurador para evaluar cuantitativamente la estructura de dependencia a través de distribuciones de pérdida (también llamadas distribuciones de riesgo). En esta sección nos enfocaremos en las tres medidas de dependencia más usadas: Dependencia lineal (también conocida como **coeficiente de correlación de Pearson**), y las dependencias no lineales, que son el *coeficiente de correlación de rango*, que incluye la ρ de Spearman y la τ de Kendall, y el *coeficiente de dependencia en colas*.

Usaremos la teoría de cópulas para discutir brevemente las ventajas que puede tener la correlación lineal cuando no se encuentra bajo modelos elípticos. Mientras que para los otros dos tipos de medidas de dependencia, son dependencias basadas en cópulas, pues a diferencia de la correlación lineal, estas medidas son funciones de la cópula solamente, y por lo tanto, pueden utilizarse en la parametrización de las cópulas.

En las secciones posteriores, construiremos modelos para capturar la estructura de dependencia en un conjunto de datos.

La dependencia lineal es una noción bien conocida y ampliamente utilizada para medir dependencias. De hecho en el esquema Europeo de Solvencia II se propone utilizar la dependencia lineal para determinar el requerimiento de capital. Sin embargo, tiene ciertos inconvenientes si no se está bajo el supuesto de normalidad; o en un caso general, elíptico.

Coeficiente de correlación de Pearson. Para una pareja (R_i, R_j) con $\mathbb{E}(R_i^2) < \infty$ y $\mathbb{E}(R_j^2) < \infty$, el coeficiente de correlación de Pearson $\rho_{i,j}$ está definido por:

$$\rho_{i,j} = \frac{\text{cov}(R_i, R_j)}{\sqrt{\text{Var}(R_i)} \sqrt{\text{Var}(R_j)}}$$

para $i, j = 1, \dots, d$. Para un vector R de dimensión d , la matriz de correlaciones P es

$$P = \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & \rho_{1,2} & \cdots & \rho_{1,d} \\ \rho_{2,1} & \rho_{2,2} & \cdots & \rho_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{d,1} & \rho_{d,2} & \cdots & \rho_{d,d} \end{pmatrix}.$$

Según (Paul Embrechts 1999), algunas de las propiedades y desventajas más importantes del coeficiente de correlación son:

- $|\rho(R_i, R_j)| \leq 1$.
- Si R_i y R_j son independientes, entonces $\rho(R_i, R_j) = 0$.
- Si $\rho(R_i, R_j) = 1$, entonces es equivalente a decir que R_i y R_j son perfectamente dependientes. Esto significa que $R_j = \alpha + \beta R_i$ casi seguramente para algún $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \neq 0$. Si $\beta > 0$, entonces la dependencia es positiva, y si $\beta < 0$ hay dependencia negativa.
- Que R_i y R_j sean perfectamente dependientes no implica que $|\rho(R_i, R_j)| = 1$.



- $\rho(a + bR_i, c + dR_j) = \rho(R_i, R_j)$ con $a, c \in \mathbb{R}$ y $d, b > 0$ quiere decir que la correlación es invariante únicamente ante transformaciones lineales estrictamente crecientes.
- La correlación de Pearson está definida sólo cuando las varianzas de R_i y R_j son finitas. Esta restricción no es ideal para una medida de dependencia y, de hecho, puede causar problemas cuando trabajamos con distribuciones de cola pesada. Por ejemplo, esto puede representar un problema cuando se modelan pérdidas en diferentes líneas de negocio con distribuciones de variación infinita, ya que pueden no describir la dependencia de sus riesgos utilizando la correlación.

Proposición 2.14 (Fórmula de Hoeffding). Sean R_i y R_j variables aleatorias con varianzas finitas y distribuciones marginales F_i y F_j , con función de distribución conjunta F . Entonces

$$\rho(R_i, R_j) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (F(r_i, r_j) - F_i(r_i)F_j(r_j)) dr_i dr_j}{\sqrt{\text{Var}(R_i)} \sqrt{\text{Var}(R_j)}}.$$

Gracias al Teorema 2.2, esta última expresión puede escribirse así

$$\rho(R_i, R_j) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (C(F(r_i), F(r_j)) - F_i(r_i)F_j(r_j)) dr_i dr_j}{\sqrt{\text{Var}(R_i)} \sqrt{\text{Var}(R_j)}}$$

Donde C es la cópula a la que se refiere (1).

Dependencia no lineal

Dadas las limitaciones que tiene el coeficiente de correlación de Pearson, es importante poder definir otras medidas como son: la ρ de Spearman, la τ de Kendall, y el coeficiente de dependencia en colas, las cuales pueden ser expresadas en términos de cópulas.

Estas medidas son conocidas como medidas de dependencia no lineal, ya que miden cualquier tipo de dependencia entre dos variables. La idea es examinar si los valores grandes de una variable están asociados de alguna manera con valores grandes de otra variable, y si lo mismo es cierto para valores pequeños de las dos variables.

Por lo tanto primero introduciremos el concepto de concordancia de acuerdo con las definiciones dadas por (Nelsen 2006) y (Joe 1997).

La concordancia ofrece información acerca del signo de la dependencia entre dos variables aleatorias. A partir



de este concepto es posible establecer un ordenamiento (en términos del tipo de dependencia, es decir, dependencia positiva o negativa) de las funciones de distribución.

El caso más simple es donde se comparan las funciones de distribución multivariadas con respecto a la función de distribución de independencia de d variables aleatorias.

Definición 2.15 (Cuadrante positivo dependiente). Sea $\mathbf{R} = (R_1, R_2)$ un vector aleatorio bivariado con función de distribución F . Decimos que \mathbf{R} o F es cuadrante positivo dependiente (PQD por sus siglas en inglés) si

$$\mathbb{P}(R_1 > r_1, R_2 > r_2) \geq \mathbb{P}(R_1 > r_1)\mathbb{P}(R_2 > r_2) \quad (14)$$

para todos $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. Esto es equivalente a

$$\mathbb{P}(R_1 \leq r_1, R_2 \leq r_2) \geq \mathbb{P}(R_1 \leq r_1)\mathbb{P}(R_2 \leq r_2) \quad (15)$$

$$F_{R_1, R_2}(r_1, r_2) \geq F_{R_1}(r_1)F_{R_2}(r_2)$$

para todos $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$.

Por (14), podemos decir que las variables R_1 y R_2 tienen una probabilidad más alta de tomar valores grandes juntas, mientras que por (15), sabemos que tomarán valores más pequeños juntas, en comparación con R_1^1 y R_2^1 , donde $R_1 \stackrel{d}{=} R_1^1$, $R_2 \stackrel{d}{=} R_2^1$, y R_1^1 y R_2^1 son independientes uno de otro.

Definición 2.16 (Cuadrante negativo dependiente). Sea $\mathbf{R} = (R_1, R_2)$ un vector aleatorio bivariado, con función de distribución F . Decimos que \mathbf{R} o F es cuadrante negativo dependiente (NQD por sus siglas en inglés) si:

$$\mathbb{P}(R_1 > r_1, R_2 > r_2) \leq \mathbb{P}(R_1 > r_1)\mathbb{P}(R_2 > r_2) \quad (16)$$

para todos $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. Esto es equivalente a

$$\mathbb{P}(R_1 \leq r_1, R_2 \leq r_2) \leq \mathbb{P}(R_1 \leq r_1)\mathbb{P}(R_2 \leq r_2) \quad (17)$$

$$F_{R_1, R_2}(r_1, r_2) \leq F_{R_1}(r_1)F_{R_2}(r_2)$$

para todos $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$.

Por (16), las variables R_1 y R_2 tienen una probabilidad más baja de tomar valores grandes juntas, mientras que, por (17), tomarán valores más pequeños juntas, en comparación con R_1^1 y R_2^1 donde $R_1 \stackrel{d}{=} R_1^1$, $R_2 \stackrel{d}{=} R_2^1$, y R_1^1 y R_2^1 son independientes uno de otro.

Se puede definir un ordenamiento de concordancia entre las funciones de distribución. Dadas F y G dos funciones de distribución, se dice que G es más concordante que F (y se escribe $F \prec_c G$) si se cumple que:

$$F(r_1, r_2) \leq G(r_1, r_2) \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

Es decir que si $(R_1, R_2) \sim F$ y $(R_1^1, R_2^1) \sim G$, la concordancia significa que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_1 \leq r_1, R_2 \leq r_2) &\leq \mathbb{P}(R_1^1 \leq r_1, R_2^1 \leq r_2) \quad \forall r_1, r_2; \\ \mathbb{P}(R_1 > r_1, R_2 > r_2) &\leq \mathbb{P}(R_1^1 > r_1, R_2^1 > r_2) \quad \forall r_1, r_2 \end{aligned}$$

En el lenguaje de la teoría de cópulas, lo anterior quiere decir que si (14) o (15) se mantienen para dos variables aleatorias R_1 y R_2 que tienen cópula C , entonces $C(u_1, u_2) \leq u_1 u_2$. Es decir, que la cópula C es PQD si para todos $u_1, u_2 \in [0, 1]$ se mantiene la condición anterior. Si se cambia el sentido de la misma, entonces estamos en la cópula es NQD.

De forma análoga, si tenemos cualesquiera dos cópulas C_0 y C_1 tales que $C^0 \prec_c C^1$, es decir, que C^1 es una cópula PQD, o que C^0 es una cópula NQD, entonces es posible establecer el siguiente ordenamiento:

$$\begin{aligned} W^d(u_1, u_2) &\prec_c C^0(u_1, u_2) \prec_c C^1(u_1, u_2) \\ &\prec_c C^1(u_1, u_2) \prec_c M^d(u_1, u_2), \end{aligned}$$

donde W^d es la cópula de contracomonotonía; C^I , la cópula de independenciam; y M^d es la cópula de comotonía.

Medidas de correlación de rango. Las correlaciones de rango son simples medidas escalares de dependencia que dependen sólo de la cópula de una distribución bivariada, y no de las distribuciones marginales, a diferencia de la correlación lineal, que depende de ambas.

Así pues, la estimación empírica de las medidas de correlación de rango puede ser calculada de forma no paramétrica, o sea, a partir de los rangos de los datos. En otras palabras, necesitamos saber sólo el orden de la muestra para cada variable de interés, y no los valores numéricos reales.

La razón práctica principal para observar las correlaciones de rango es que pueden usarse para calibrar cópulas para datos empíricos. A nivel teórico, al ser funciones directas de la cópula, las correlaciones de rango tienen propiedades más atractivas que la correlación de Pearson. Hay dos variedades principales de correlación de rango, a saber:

- τ de Kendall. Dados (R_1, R_2) un vector de dos variables aleatorias continuas y (R_{1i}, R_{2i}) y (R_{1j}, R_{2j}) ; $i, j \in \{1, \dots, d\}$ dos copias independientes e idénticamente distribuidas de (R_1, R_2) con función de distribución bivariada F , el coeficiente de correlación de rango de Kendall es:

$$\rho_\tau(R_1, R_2) := P((R_{1i} - R_{1j})(R_{2i} - R_{2j}) > 0)$$

$$\begin{aligned} &-P((R_{1i} - R_{1j})(R_{2i} - R_{2j}) < 0) \\ &= 2P((R_{1i} - R_{1j})(R_{2i} - R_{2j}) > 0) - 1 \\ &= 4 \int F dF - 1. \end{aligned} \quad (18)$$

Podemos interpretar lo anterior como la diferencia de entre la probabilidad de concordancia $(R_{1i} - R_{1j})(R_{2i} - R_{2j}) > 0$, y la probabilidad de discordancia $(R_{1i} - R_{1j})(R_{2i} - R_{2j}) < 0$. En este contexto, dos variables son concordantes si el sentido de los cambios en una variable tiende a estar asociado con el sentido de los cambios de la otra. Es decir, los cambios positivos (resp. negativos) de una variable se encuentran asociados con los cambios positivos (resp. negativos) de la otra. De forma análoga, dos variables aleatorias son discordantes si cambios los positivos (resp. negativos) de una de ellas tienden estar asociados con los cambios negativos (resp. positivos) de la otra.

También introduciremos una versión empírica de (18). Sean (R_1, R_2) un vector aleatorio; N_{con} , el número de pares de observaciones concordantes; y N_{dis} , el número de pares de observaciones discordantes. Si tenemos un empate de r_1 (o de r_2), los pares son llamados extra- r_1 (o extra- r_2). Llamamos a $N_{extra-r_1}$ y $N_{extra-r_2}$ los números de pares de extra- x y extra- y , respectivamente. Entonces la versión empírica de (18) es:

$$\begin{aligned} \hat{\tau}(R_1, R_2) &= (N_{con} - N_{dis}) \times \\ &\frac{1}{\sqrt{N_{con} + N_{dis} + N_{extra-r_1}}} \times \\ &\frac{1}{\sqrt{N_{con} + N_{dis} + N_{extra-r_2}}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Por lo tanto, $\hat{\tau}$ toma valores en $[-1, 1]$. Un alto número de pares concordantes indica una "asociación" fuerte, que implica una $\hat{\tau}$ cercana a 1; mientras que una "asociación" débil implica una $\hat{\tau}$ cercana a -1.

- ρ de Spearman (ρ_s). Sean R_1 y R_2 dos variables aleatorias continuas con funciones de distribución marginales F_1 y F_2 respectivamente, y función de distribución conjunta F . La ρ de Spearman es la correlación de $F_1(R_1)$ y $F_2(R_2)$. Ya que $F_1(R_1), F_2(R_2) \sim U(0, 1)$, entonces sus respectivas esperanzas son $\frac{1}{2}$; y sus varianzas son $\frac{1}{12}$. Es decir,

$$\begin{aligned} \rho_s(R_1, R_2) &= \rho(F_1(R_1), F_2(R_2)) \\ &= 12 \int \int F_1(r_1) F_2(r_2) dF(r_1, r_2) - 3, \end{aligned}$$



donde ρ es el coeficiente de correlación de Pearson. En otras palabras, ρ_s es la correlación lienal de las variables aleatorias, transformadas en probabilidad. La matriz ρ_s para un vector aleatorio multivariado \mathbf{R} es $\rho_s(\mathbf{R}) = \rho(F_1(R_1), \dots, F_d(R_d))$, y debe ser positivo semidefinida.

La τ de Kendall y la ρ de Spearman tienen algunas propiedades en común. Destacamos las siguientes.

- Ambas son medidas de dependencia simétricas que toman sus valores del intervalo $[-1, 1]$.
- Si tenemos variables aleatorias independientes, entonces ambos estadísticos toman el valor nulo. Sin embargo, que estos estadísticos valgan 0 no implica independencia entre las variables aleatorias.
- Se puede demostrar que toman el valor 1 cuando R_1 y R_2 son comonótonas. Como sabemos, esta relación está explicada por la cota superior de Fréchet-Hoeffding.
- Se puede demostrar que toman el valor -1 cuando R_1 y R_2 son contracomonótonas. Como sabemos, esta relación está explicada por la cota inferior de Fréchet-Hoeffding.
- Si R_1 y R_2 son continuas, estas medidas son estrictamente invariantes respecto a transformaciones crecientes.

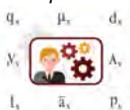
En el caso de las funciones marginales continuas, las medidas de correlación de rango se pueden definir en términos de la cópula C asociada a F , F_1 y F_2 , y tomando en cuenta que τ y ρ_s son estrictamente invariantes respecto a transformaciones. Al respecto, (Nelsen 2006) demuestra que

$$\begin{aligned} \rho_s(R_1, R_2) &= 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(u_1, u_2) - u_1 u_2) du_1 du_2 \\ &= 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) du_1 du_2 - 3, \\ \tau(R_1, R_2) &= 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.17. Considere cuatro variables aleatorias con distribución con normal estándar y $\tau = 0.7$. Aquí consideramos las cópulas Normal, t -Student con tres grados de libertad, Clayton y Gumbel, y generamos 10,000 muestras aleatorias.

Como podemos notar, estas cuatro distribuciones tienen un comportamiento significativamente diferente en sus colas, aunque todas compartan las mismas marginales e incluso la misma τ .

A partir de la figura 13, podemos decir lo siguiente.



Cópulas con marginales $N(0,1)$ y $\tau=0.7$

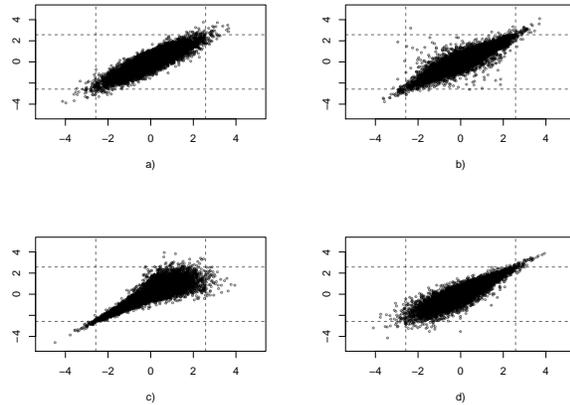


Figura 13 Comparación de 10,000 simulaciones, de la cópula normal representada por a), cópula t -Student representada por b), cópula Clayton representada por c) y la cópula Gumbel representada por d). Las líneas punteadas son los cuantiles 0.005 y 0.995 de una distribución normal estándar.

- La cópula Normal bivariada parece no tener una dependencia fuerte en las colas.
- La cópula t -Student bivariada parece tener más masa y estructura en ambas colas, lo que sugiere una “dependencia de cola”.
- La cópula Clayton bivariada refleja que valores pequeños en una variable son acompañados de valores pequeños en otra variables, es decir refleja una “dependencia de cola inferior”.

Coefficiente de dependencia en las colas. Mientras que τ y ρ_s miden dependencia de todo el espacio $[0, 1]^2$, la dependencia entre valores extremos de dos variables también es de gran interés. El concepto de dependencia de cola se basa nuevamente en la idea de pares de variables concordantes y discordantes, pero se concentra en los cuadrantes superior derecho e inferior izquierdo de $[0, 1]^2$. Una de las ventajas que nos ofrece el estudio de las funciones de distribución multivariadas a partir de la cópulas es la posibilidad de identificar los patrones de dependencia existentes entre los valores extremos de las variables aleatorias.

Si las funciones de distribución marginales de las variables aleatorias de interés son continuas, la dependencia de las colas puede ser expresada como una medida ba-

sada en la cópula asociada a la función de distribución conjunta. Por consiguiente, esta medida de dependencia en las colas también es invariante bajo transformaciones monótonas crecientes.

Si R_1 y R_2 son dos variables aleatorias con funciones de distribución F_1 y F_2 , respectivamente, el coeficiente de dependencia en la cola superior ente R_1 y R_2 está definido como:

$$\lambda_u = \lim_{u \rightarrow 1^-} P(R_2 > F_2^{\leftarrow}(u) \mid R_1 > F_1^{\leftarrow}(u)).$$

Si el límite existe, entonces $\lambda_u \in [0, 1]$. Se dice que R_1 y R_2 son asintóticamente dependientes en la cola superior si $0 < \lambda_u \leq 1$ y son asintóticamente independientes en el caso que $\lambda_u = 0$. Para el caso de la cola inferior tenemos que:

$$\lambda_l = \lim_{u \rightarrow 0^+} P(R_2 \leq F_2^{\leftarrow}(u) \mid R_1 \leq F_1^{\leftarrow}(u)).$$

Si tenemos funciones de distribución continuas, la dependencia en las colas puede ser expresada como una medida basada en la cópula asociada (vea (Bedford and Cooke 2002b)):

$$\begin{aligned} \lambda_l &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{P(R_1 \leq F_1^{-1}(u), R_2 \leq F_2^{-1}(u))}{P(R_1 \leq F_1^{-1}(u))} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u}, \\ \lambda_u &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{\bar{C}(u, u)}{1 - u} = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}. \end{aligned}$$

Si la cópula posee una forma cerrada, entonces el cálculo de los coeficientes de dependencia en las cola λ_l y λ_u es sencillo, pues se usan sólo las ecuaciones anteriores y la regla de L'Hôpital.

Ejemplo 2.18 (Cálculo de los coeficientes de colas para cópulas). *Los coeficientes recién referidos para cópulas arquimedianas con generador Ψ diferenciable son:*

$$\begin{aligned} \lambda_l &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Psi(2t)}{\Psi(t)} = 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Psi'(2t)}{\Psi'(t)}, \\ \lambda_u &= 2 - \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1 - \Psi(2t)}{1 - \Psi(t)} = 2 - 2 \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\Psi'(2t)}{\Psi'(t)}. \end{aligned}$$

- La cópula Clayton de parámetro $\theta \in (0, \infty)$ se obtiene haciendo $\lambda_l = 2^{-\frac{1}{\theta}}$ y $\lambda_u = 0$. En otras palabras, podemos decir que la cópula Clayton es dependiente en la cola inferior, pero independiente en la cola superior.

- La una cópula Gumbel de parámetro $\theta \in [1, \infty)$ se obtiene haciendo $\lambda_l = 0$ y $\lambda_u = 2 - 2^{-\frac{1}{\theta}}$. En otras palabras, podemos decir que la cópula Clayton es dependiente en la cola inferior, pero independiente en la cola superior.

Si el cálculo de los coeficientes de dependencia en las colas se realiza para cópulas simétricas, entonces estos coeficientes son iguales.

- Los coeficientes de la cópula normal bivariada están dados por $\lambda_l = \lambda_u = 1$. Por lo tanto las cópulas normales son independientes en la cola, a menos que sean iguales a la cola superior de Fréchet-Hoeffding.
- Los coeficientes de la una cópula t -Student bivariada están dados por $\lambda_l = \lambda_u = 2t_{v+1} \left(-\sqrt{\frac{(v+1)(1-\rho)}{1+\rho}} \right)$, donde t_{v+1} denota la función de distribución de una distribución t -Student con $v + 1$ grados de libertad.

3. MÉTODO DE VIÑAS

Como pudimos notar en la sección anterior, las funciones de distribución de las cópulas típicamente tienen un número relativamente pequeño de parámetros. Dependiendo de sus valores, las cópulas pueden exhibir diversos grados de dependencia en la cola, un número relativamente pequeño de parámetros significa que es probable que tales cópulas sean menos útiles para describir las relaciones dentro de un conjunto dimensional alto de factores de riesgo, también un número pequeño de parámetros libres resulta en un alto grado de simetría.

Las cópulas son mucho más fáciles de visualizar en dimensiones bajas (por ejemplo $d = 2$). Para ello surgen los modelos viña, que son modelos gráficos flexibles que nos permiten describir cópulas multivariadas usando cópulas bivariadas, llamadas *cópulas-par*. Esto simplifica el problema ya las propiedades de las cópulas bivariadas pueden extenderse para dimensiones altas.

Esta sección presenta una explicación sobre la construcción de *cópulas-par* (PCC por sus siglas en inglés) o también conocidas como cópulas viña. Las cópulas viña se pueden utilizar para conjuntos de datos de alta dimensión, es decir cuando tenemos una dimensión $d \geq 3$, y puede incorporar estructuras de dependencia complejas.

Comenzamos descomponiendo cópulas multivariadas en PCC. Note que la relación de la densidad de la cópulas con la densidad del vector inicial, para así poder aclarar como es la descomposición de cópulas-par. Recordemos que 7 se refiere a la relación entre las densidades, tanto del vector aleatorio inicial, como de la cópula:

$$f(r_1, \dots, r_d) = c(F_1(r_1), \dots, F_n(r_d)) \cdot f_1(r_1) \cdots f_n(r_d).$$



Esto da

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{f(F_1^{\leftarrow}(u_1), \dots, F_d^{\leftarrow}(u_d))}{f_1(F_1^{\leftarrow}(u_1)) \cdots f_d(F_d^{\leftarrow}(u_d))}.$$

Sin embargo, tenemos que el problema que tienen las cópulas multivariadas es su construcción para dimensiones altas. Para ello (Joe 1997) y (Bedford and Cooke 2002b), introdujeron un manera flexible de extender las cópulas bivariadas a dimensiones más altas. Con este fin, se utiliza la descomposición de una densidad multivariable en una cascada de PCC, para así poder construir modelos multivariados altamente dependientes. Estos modelos son mucho más flexibles, pues para cada par modelado, se puede elegir cualquier tipo de cópula bivariada.

Este método toma como punto de partida la función de densidad conjunta, para después darle la siguiente factorización:

$$\begin{aligned} f_{1,2,\dots,d}(r_1, r_2, \dots, r_d) &= f_1(r_1) \cdot \frac{f_{1,2}(r_1, r_2)}{f_1(r_1)} \\ &\frac{f_{1,2,3}(r_1, r_2, r_3)}{f_{1,2}(r_1, r_2)} \cdots \frac{f_{1,\dots,d}(r_1, \dots, r_d)}{f_{1,\dots,d-1}(r_1, \dots, r_{d-1})} \\ &= f_1(r_1) \cdot f_{2|1}(r_2|r_1) \cdot f_{3|1,2}(r_3|r_1, r_2) \cdots \\ &f_{d|1,2,\dots,d-1}(r_d|r_1, r_2, \dots, r_{d-1}) \\ &= \prod_{j=2}^d f_{j|1,2,\dots,j-1}(r_j|r_1, \dots, r_{j-1}) \cdot f_1(r_1), \quad (20) \end{aligned}$$

donde, para $j = 2, \dots, d$ la función de densidad condicional está dada por

$$f_{j|1,\dots,j-1}(r_j|r_1, \dots, r_{j-1}) = \frac{f_{1,\dots,j-1,j}(r_1, \dots, r_{j-1}, r_j)}{f_{1,\dots,j-1}(r_1, \dots, r_{j-1})}.$$

Esta factorización es única (hasta un nuevo etiquetado de las variables). La idea es descomponer cada uno de los factores en esta relación utilizando PCC. Aplicando (7), se sigue que, para el caso $j = 2$ tenemos que:

$$\begin{aligned} f_{2|1}(r_2|r_1) &= \frac{f_{1,2}(r_1, r_2)}{f_1(r_1)} \\ &= \frac{c_{1,2}(F_1(r_1), F_2(r_2)) \cdot f_1(r_1) \cdot f_2(r_2)}{f_1(r_1)} \quad (21) \\ &= c_{1,2}(F_1(r_1), F_2(r_2)) \cdot f_2(r_2), \end{aligned}$$

donde $c_{1,2}(\cdot, \cdot)$ es la densidad PCC apropiada para el par de variables transformadas $F_1(r_1), F_2(r_2)$.



Basados en el mismo principio obtenemos dos descomposiciones alternativas para el caso $j = 3$:

$$\begin{aligned} f_{3|1,2}(r_3|r_1, r_2) &= \frac{f_{1,2,3}(r_1, r_2, r_3)}{f_{1,2}(r_1, r_2)} \\ &= \frac{f_{2,3|1}(r_2, r_3|r_1)}{f_{2|1}(r_2|r_1)} \quad (22) \\ &= c_{23|1}(F_{2|1}(r_2|r_1), F_{3|1}(r_3|r_1)) \cdot f_{3|1}(r_3|r_1), \end{aligned}$$

donde $c_{23|1}$ es la densidad de la cópula para $f_{2,3|1}(r_2, r_3|r_1)$. Si desarrollamos (22) desarrollamos $f_{3|1}(r_3|r_1)$ como en (21) para obtener:

$$\begin{aligned} &f_{3|1,2}(r_3|r_1, r_2) \\ &= c_{23|1}(F_{2|1}(r_2|r_1), F_{3|1}(r_3|r_1)) \cdot \\ &c_{31}(F_3(r_3), F_1(r_1)) \cdot f_3(r_3). \end{aligned}$$

Observe que esta descomposición no es única, ya que pudimos haber expandido (22) a través de $f(r_2)$, para obtener:

$$\begin{aligned} &f_{3|1,2}(r_3|r_1, r_2) \\ &= c_{13|2}(F_{1|2}(r_1|r_2), F_{3|2}(r_3|r_2)) \cdot \\ &c_{32}(F_3(r_3), F_2(r_2)) \cdot f_2(r_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, notamos que hay diferentes descomposiciones para la misma factorización.

Generalizamos este método haciendo

$$f(r_i|\mathbf{v}) = c_{r_i, r_j|\mathbf{v}_{-j}}(F(r_i|\mathbf{v}_{-j}), F(r_j|\mathbf{v}_{-j})) \cdot f(r_i|\mathbf{v}_{-j}), \quad (23)$$

donde

- $i, j \in 1, \dots, d$,
- \mathbf{v} es un conjunto arbitrario de d -dimensiones compuesto por r_1, \dots, r_d tal que $r_j \in \mathbf{v}$ y $r_i \notin \mathbf{v}$, y
- \mathbf{v}_{-j} denota todo los elementos de \mathbf{v} , salvo r_j .

Aplicando (23) de forma iterativa, tendremos una factorización de $f(r_i|\mathbf{v})$ en cópulas bivariadas, y las densidades marginales; y junto con la factorización de $f(r_1, \dots, r_d)$ como (20), podremos expresar esta densidad a través de una combinación de las densidades marginales y las cópulas bivariadas. Note que si tenemos $f(r_i|\mathbf{v})$, con \mathbf{v} representando a más de $n > 1$ variables, necesitaremos n iteraciones, y por lo tanto n cópulas bivariadas en cada iteración. Si tenemos d variables, necesitamos $1 + 2 + \dots + (d-1) = \frac{d(d-1)}{2}$ cópulas.

Ejemplo 3.1 (Descomposición en cópulas par en caso tridimensional ($d = 3$)). Para una función de densidad tridimensional, tenemos:

$$\begin{aligned} f(r_1, r_2, r_3) &= f_1(r_1) \cdot f_{2|1}(r_2|r_1) \cdot f_{3|1,2}(r_3|r_1, r_2) \\ &= f_1(r_1) \cdot c_{1,2}(F_1(r_1), F_2(r_2)) \cdot f_2(r_2) \cdot f_{3|1,2}(r_3|r_1, r_2) \\ &= f_1(r_1) \cdot c_{1,2}(F_1(r_1), F_2(r_2)) \cdot f_2(r_2) \cdot \\ & c_{23|1}(F_{2|1}(r_2|r_1), F_{3|1}(r_3|r_1)) \cdot f_{3|1}(r_3|r_1) \\ &= f_1(r_1) \cdot c_{1,2}(F_1(r_1), F_2(r_2)) \cdot f_2(r_2) \cdot c_{2,3|1}(F_{2|1}(r_2|r_1) \\ & , F_{3|1}(r_3|r_1)) \cdot c_{3,1}(F_3(r_3), F_1(r_1)) \cdot f_3(r_3) \\ &= f_1(r_1) \cdot f_2(r_2) \cdot f_3(r_3) \cdot c_{1,2}(F_1(r_1), F_2(r_2)) \cdot \\ & c_{3,1}(F_3(r_3), F_1(r_1)) \cdot c_{2,3|1}(F_{2|1}(r_2|r_1), F_{3|1}(r_3|r_1)). \end{aligned}$$

La primera igualdad representa la factorización dada en (20); la segunda es el desarrollo en (21); la tercera es el desarrollo de (22); y la cuarta es el desarrollo de la ecuación (21), aplicado a $f_{3|1}(r_3|r_1)$.

Como hemos dicho ya, la descomposición de la tercera igualdad no es única, una representación alternativa que resulta del uso de (22) a través de $f(r_2)$ (es decir eligiendo a $\mathbf{v} = 2$ en lugar de $\mathbf{v} = 1$) es:

$$\begin{aligned} f(r_1, r_2, r_3) &= f_1(r_1) \cdot f_{2|1}(r_2|r_1) \cdot f_{3|1,2}(r_3|r_1, r_2) \\ &= f_1(r_1) \cdot c_{1,2}(F_1(r_1), F_2(r_2)) \cdot f_2(r_2) \cdot f_{3|1,2}(r_3|r_1, r_2) \\ &= f_1(r_1) \cdot c_{1,2}(F_1(r_1), F_2(r_2)) \cdot f_2(r_2) \cdot \\ & c_{1,3|2}(F_{1|2}(r_1|r_2), F_{3|2}(r_3|r_2)) \cdot f_{3|2}(r_3|r_2) \\ &= f_1(r_1) \cdot c_{1,2}(F_1(r_1), F_2(r_2)) \cdot f_2(r_2) \cdot c_{1,3|2} \\ & (F_{1|2}(r_1|r_2), F_{3|2}(r_3|r_2)) \cdot c_{3,2}(F_3(r_3), F_2(r_2)) \cdot f_2(r_2) \\ &= f_1(r_1) \cdot f_2(r_2) \cdot f_3(r_3) \cdot c_{1,2}(F_1(r_1), F_2(r_2)) \cdot \\ & c_{3,2}(F_3(r_3), F_2(r_2)) \cdot c_{1,3|2}(F_{1|2}(r_1|r_2), F_{3|2}(r_3|r_2)). \end{aligned}$$

A diferencia del caso anterior, la tercera igualdad se expandió condicionando a r_2 , y por lo tanto la cuarta igualdad mostramos el desarrollo de (21) a través de $f_{3|2}(r_3|r_2)$.

En ambos casos, obtenemos la descomposición de la función de densidad conjunta en las tres funciones marginales de densidad (y además tres cópulas-par) $f_1(r_1), f_2(r_2), f_3(r_3)$.

Para modelar cópulas viña, es importante suponer que las cópulas bivariadas $C(\theta_1, \theta_2)$ no dependen de las variables condicionales sino más que a través de su función de distribución (vea, por ejemplo (Haff and Segers 2015)).

Tomemos (22) como ejemplo. La densidad de la cópula condicional está dada por:

$$\begin{aligned} c_{23|1} \left[(F_{2|1}(r_2|r_1), F_{3|1}(r_3|r_1)); r_1 \right] &= \\ c_{23|1} \left[(F_{2|1}(r_2|r_1), F_{3|1}(r_3|r_1)) \right]. \end{aligned}$$

En decir, la cópula $c_{23|1}$ depende del valor condicionado, pero sólo consideraremos cópulas tales que su densidad

es independiente del valor condicional de la distribución. Sin embargo, los valores de la cópula aún dependen de la variable condicional (por ejemplo $F_{2|1}(r_2|r_1)$ depende de r_1).

En general, la densidad de la cópula condicional (23) se convierte en

$$\begin{aligned} c_{r_i, r_j | \mathbf{v}_{-j}} \left[F(r_i | \mathbf{v}_{-j}), F(r_j | \mathbf{v}_{-j}); \mathbf{v}_{-j} \right] \\ = c_{r_i, r_j | \mathbf{v}_{-j}} \left[F(r_i | \mathbf{v}_{-j}), F(r_j | \mathbf{v}_{-j}) \right]. \end{aligned}$$

Claramente, suponemos que las familias de cada cópula bivariada son constantes o independientes sobre los valores de sus correspondientes variables condicionales.

Como lo hemos notado ya, la formulación de una distribución multivariada utilizando descomposición en PCC implica diferentes funciones de distribución condicionales, por lo cual (Joe 1996) demostró la siguiente relación:

$$F(r_i | \mathbf{v}) = \frac{\partial C_{r_i, r_j | \mathbf{v}_{-j}}(F(r_i | \mathbf{v}_{-j}), F(r_j | \mathbf{v}_{-j}))}{\partial F(r_j | \mathbf{v}_{-j})}, \quad (24)$$

donde $C_{r_i, r_j | \mathbf{v}_{-j}}$ es la cópula bivariada que corresponde a $F_{r_i, r_j | \mathbf{v}_{-j}}$. Aplicar (24) de manera iterativa nos permite el poder escribir a todas las funciones de distribución condicionales como la anidación de todas las diferenciales parciales de cópulas y distribuciones marginales. Para el caso especial donde \mathbf{v} es univariado, y por simplificación consideraremos que $r_i = r_1$ y que $\mathbf{v} = r_j = r_2$, tenemos que:

$$F(r_1 | r_2) = \frac{\partial C_{r_1, r_2}(F(r_1), F(r_2))}{\partial F(r_2)}. \quad (25)$$

Para simplificar usaremos la función $h(r_i, \mathbf{v}, \Theta)$ introducida en (Aas et al. 2009) para representar la función de distribución condicional, donde el parámetro \mathbf{v} corresponde al vector condicional, y Θ denota el conjunto de parámetros de una función de distribución de una cópula de r_i y \mathbf{v} .

$$h(r_i, \mathbf{v}, \Theta) := F(r_i | \mathbf{v}) = \frac{\partial C_{r_i, \mathbf{v}}(r_i, \mathbf{v}, \Theta)}{\partial \mathbf{v}}.$$

Además, sea $h^{-1}(r_i, \mathbf{v}, \Theta)$ la inversa de la función h respecto a la primera variable r_i , o equivalentemente la inversa de la función de distribución condicional.

Por ejemplo en el caso univariado cuando r_i y $\mathbf{v} \sim U(0, 1)$, es decir $f(r_1) = f(r_2) = 1, F(r_1) = r_1$ y $F(r_2) = r_2$, tenemos que (25) se escribe como:

$$h(r_1, r_2) = \frac{\partial C_{r_1, r_2}(r_1, r_2)}{\partial r_2}.$$



Ejemplificamos lo anterior considerando la distribución multivariada con $d = 4$. En este caso $r_1, r_2, r_3, r_4 \sim U(0, 1)$, y usando (24), la h -función descrita en la ecuación anterior luce así:

$$\begin{aligned} F(r_1|r_2, r_3, r_4) &= \frac{\partial C_{r_1, r_2|r_3, r_4}(F(r_1|r_3, r_4), F(r_2|r_3, r_4))}{\partial F(r_2|r_3, r_4)} \\ &= h_{r_1, r_2|r_3, r_4}(F(r_1|r_3, r_4), F(r_2|r_3, r_4)). \end{aligned} \quad (26)$$

Note que, en total se pueden construir $\frac{d!}{2}$ casos de un vector aleatorio d -dimensional.

Basados en (26) para obtener $F(r_1|r_2, r_3, r_4)$, necesitamos evaluar la función de distribución condicional de $F(r_1|r_3, r_4)$ y $F(r_2|r_3, r_4)$. Estas son:

$$\begin{aligned} F(r_1|r_3, r_4) &= \frac{\partial C_{r_1|r_3, r_4}(F(r_1|r_3), F(r_1|r_4))}{\partial F(r_1|r_4)} \\ &= h_{r_1|r_3, r_4}(F(r_1|r_3), F(r_1|r_4)) \\ F(r_2|r_3, r_4) &= \frac{\partial C_{r_2|r_3, r_4}(F(r_2|r_3), F(r_2|r_4))}{\partial F(r_2|r_4)} \\ &= h_{r_2|r_3, r_4}(F(r_2|r_3), F(r_2|r_4)). \end{aligned}$$

Iteramos de nuevo y obtenemos

$$\begin{aligned} F(r_1|r_3) &= \frac{\partial C_{r_1, r_3}(F(r_1), F(r_3))}{\partial F(r_3)} \\ &= h_{r_1, r_3}(F(r_1), F(r_3)), \\ F(r_1|r_4) &= \frac{\partial C_{r_1, r_4}(F(r_1), F(r_4))}{\partial F(r_4)} \\ &= h_{r_1, r_4}(F(r_1), F(r_4)), \\ F(r_2|r_3) &= \frac{\partial C_{r_2, r_3}(F(r_2), F(r_3))}{\partial F(r_3)} \\ &= h_{r_2, r_3}(F(r_2), F(r_3)), \\ F(r_2|r_4) &= \frac{\partial C_{r_2, r_4}(F(r_2), F(r_4))}{\partial F(r_4)} \\ &= h_{r_2, r_4}(F(r_2), F(r_4)). \end{aligned}$$

Sustituir en (26) nos da:

$$\begin{aligned} F(r_1|r_2, r_3, r_4) &= \frac{\partial C_{r_1, r_2|r_3, r_4}(F(r_1|r_3, r_4), F(r_2|r_3, r_4))}{\partial F(r_2|r_3, r_4)} \\ &= h_{r_1, r_2|r_3, r_4}(F(r_1|r_3, r_4), F(r_2|r_3, r_4)) \\ &= h_{r_1, r_2|r_3, r_4}(h_{r_1|r_3, r_4}(F(r_1|r_3), F(r_1|r_4)), \\ &= h_{r_2|r_3, r_4}(F(r_2|r_3), F(r_2|r_4)) \\ &= h_{r_1, r_2|r_3, r_4}(h_{r_1|r_3, r_4}(h_{r_1, r_3}(F(r_1), F(r_3))), \\ &= h_{r_1, r_4}(F(r_1), F(r_4)) h_{r_2|r_3, r_4}(h_{r_2, r_3}(F(r_2), F(r_3))), \\ &= h_{r_2, r_4}(F(r_2), F(r_4)). \end{aligned}$$



Ahora presentaremos la h -función de las familias de cópulas más representativas en dimensión $d = 2$, que ya presentamos en la sección 2.

1. La cópula Clayton bivariada está dada por:

$$C_{1,2;\theta_{12}}(u_1, u_2; \theta_{12}) = \left(u_1^{-\theta_{12}} + u_2^{-\theta_{12}} - 1 \right)^{-\frac{1}{\theta_{12}}}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} h(u_1, u_2; \theta_{12}) &= \frac{\partial C_{1,2;\theta_{12}}(u_1, u_2; \theta_{12})}{\partial u_2} \\ &= \frac{\partial}{\partial u_2} \left(u_1^{-\theta_{12}} + u_2^{-\theta_{12}} - 1 \right)^{-\frac{1}{\theta_{12}}} \\ &= -\frac{1}{\theta_{12}} \left(u_1^{-\theta_{12}} + u_2^{-\theta_{12}} - 1 \right)^{-\frac{1}{\theta_{12}}-1} \left(-\theta_{12} u_2^{-\theta_{12}-1} \right) \\ &= u_2^{-\theta_{12}-1} \left(u_1^{-\theta_{12}} + u_2^{-\theta_{12}} - 1 \right)^{-\frac{1}{\theta_{12}}-1}. \end{aligned}$$

2. La cópula Gumbel bivariada está dada por:

$$\begin{aligned} C_{1,2,\theta_{12}}(u_1, u_2, \theta_{12}) &= \exp \left\{ - \left((-\ln(u_1))^{\theta_{12}} + (-\ln(u_2))^{\theta_{12}} \right)^{\frac{1}{\theta_{12}}} \right\} \end{aligned}$$

para $1 \leq \theta_{12} \leq \infty$. Entonces,

$$\begin{aligned} h(u_1, u_2; \theta_{12}) &= \frac{\partial C_{1,2,\theta_{12}}(u_1, u_2; \theta_{12})}{\partial u_2} \\ &= \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\exp \left\{ - \left((-\ln(u_1))^{\theta_{12}} + (-\ln(u_2))^{\theta_{12}} \right)^{\frac{1}{\theta_{12}}} \right\} \right) \\ &= C_{1,2,\theta_{12}}(u_1, u_2; \theta_{12}) \cdot \left(\frac{1}{u_2} (-\ln(u_2))^{\theta_{12}-1} \right) \\ &= \left((-\ln(u_1))^{\theta_{12}} + (-\ln(u_2))^{\theta_{12}} \right)^{\frac{1}{\theta_{12}}-1}. \end{aligned}$$

3. La cópula Frank bivariada es $C_{1,2;\theta_{12}}(u_1, u_2; \theta_{12}) = -\frac{1}{\theta_{12}} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta_{12}u_1}-1)(e^{-\theta_{12}u_2}-1)}{(e^{-\theta_{12}}-1)} \right)$. Entonces,

$$\begin{aligned} h(u_1, u_2; \theta_{12}) &= \frac{\partial C_{1,2;\theta_{12}}(u_1, u_2; \theta_{12})}{\partial u_2} \\ &= \frac{e^{-\theta_{12}u_1} e^{-\theta_{12}u_2}}{\left(e^{-\theta_{12}} - 1 \right) + \left(e^{-\theta_{12}u_1} - 1 \right) \left(e^{-\theta_{12}u_2} - 1 \right)}. \end{aligned}$$

4. La densidad de la cópula Gaussiana bivariada es

$$c(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}} \exp \left(-\frac{\rho_{12}^2(r_1^2 + r_2^2) - 2\rho_{12}r_1r_2}{2(1-\rho_{12}^2)} \right),$$

donde ρ_{12} es el parámetro de la cópula, $r_1 = \Phi^{-1}(u_1)$, $r_2 = \Phi^{-1}(u_2)$ y $\Phi^{-1}(\cdot)$ es la inversa de la función de distribución normal estándar. Para esta cópula la h -función es:

$$h(u_1, u_2, \rho_{12}) = \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(u_1) - \rho_{12}\Phi^{-1}(u_2)}{\sqrt{1 - \rho_{12}^2}} \right).$$

5. La densidad de la cópula t -Student bivariada es:

$$c(u_1, u_2) = \frac{\Gamma(\frac{v_{12}+2}{2})}{\Gamma(\frac{v_{12}}{2})} \frac{v_{12}\pi dt(r_1, v_{12})dt(r_2, v_{12})\sqrt{1-\rho_{12}^2}}{\left(1 + \frac{r_1^2 + r_2^2 - 2\rho_{12}r_1r_2}{v_{12}(1-\rho_{12}^2)}\right)^{-\frac{v_{12}+1}{2}}},$$

donde v_{12} y ρ_{12} son los parámetros de la cópula, $r_1 := t_{v_{12}}^{-1}(u_1)$, $r_2 := t_{v_{12}}^{-1}(u_2)$, y $t_{v_{12}}^{-1}(\cdot)$ es la función de distribución inversa asociada a la distribución t -Student univariada con v_{12} grados de libertad, esperanza 0, y varianza $\frac{v_{12}}{v_{12}-2}$. Para esta cópula, tenemos que

$$h(u_1, u_2, \rho_{12}, v_{12}) = t_{v_{12}+1} \left(\frac{t_{v_{12}}^{-1}(u_1) - \rho_{12}t_{v_{12}}^{-1}(u_2)}{\sqrt{\frac{(v_{12} + (t_{v_{12}}^{-1}(u_2))^2)(1-\rho_{12}^2)}{v_{12}+1}}} \right).$$

Las cópulas viña han sido muy útiles para contruir funciones de distribución multivariadas con $d \geq 3$. Para poder organizar los diferentes tipos de descomposición de PCC, (Bedford and Cooke 2002b) introdujo tres viñas diferentes, y su construcción en forma gráfica.

El primer tipo de viñas tiene un amplio rango de posibles descomposiciones de PCC, éstas se conocen como R -viñas (viñas regulares). Para simplificar el modelado utilizando cópulas viña, las R -viñas se pueden dividir en dos tipos más simples: C -viñas (viñas canónicas), y D -Viñas (viñas dibujables).

En esta sección presentaremos los modelos de R -viñas, C -Viñas y D -Viñas para así establecer una relación entre ellos y las funciones de densidad multivariadas.

R-viñas

La clase general de R -viñas se introdujo por (Bedford and Cooke 2002b) y (Bedford and Cooke 2002a) para ayudar a organizar las diferentes descomposiciones posibles de una función de densidad multivariada en un producto

de cópulas bivariadas. El modelo consiste en árboles diseñados secuencialmente, cuya estructura proporciona la información sobre las correspondientes densidades PCC que están involucradas en la descomposición de una cópula multivariada. Requeriremos $\binom{d}{2}$ parejas de cópulas para especificar una distribución de d variables.

Definición 3.2 (R -viña). *Vea (Cooke and Kurowicka 2006). Sean T_1 un árbol con d nodos, y conjunto de bordes denotado por E_1 es un árbol; y T_i un árbol con nodos $N_i = E_{i-1}$ y con bordes E_i para $i = 2, \dots, d-1$. Entonces $V = (T_1, \dots, T_{d-1})$ es una viña con d elementos. Asimismo, una viña V es una R -viña si se cumple la condición de proximidad de que, para $i = 2, \dots, d-1$ y $\{a, b\} \in E_i$, con $a = \{a_1, a_2\}$ y $b = \{b_1, b_2\}$ se tiene que $\#(a \cap b) = 1$.*

En otras palabras, una R -Viña es un conjunto de árboles anidados para los que se sostiene que los bordes de un árbol se convierten en nodos en el siguiente árbol. Además, con la condición de proximidad se asegura que si hay un borde E_i que conecta los nodos a y b , entonces a y b deben compartir un nodo común en T_{i-1} , ya que a y b son bordes en el árbol T_{i-1} .

Ejemplo 3.3. *Supongamos que tenemos una R -viña en cinco variables, es decir tenemos un conjunto árboles anidados como se muestra en la figura 14. Entonces tenemos una R -Viña definida por cuatro árboles ($V = (T_1, T_2, T_3, T_4)$), donde cada árbol T_i , $i = 1, 2, 3, 4$ tiene $6 - i$ nodos y $4 - i$ bordes.*

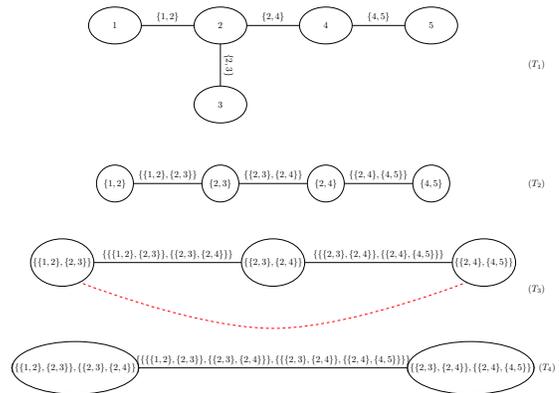


Figura 14 R -Viña en cinco variables.

La representación gráfica mostrada en 14 es equivalente a las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} N_1 &= E_0 = \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ N_2 &= E_1 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{4, 5\}\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
N_3 &= E_2 = \{\{\{1,2\}, \{2,3\}\}, \{\{2,3\}, \{2,4\}\}, \\
&\quad \{\{2,4\}, \{4,5\}\}\} \\
N_4 &= E_3 = \{\{\{\{1,2\}, \{2,3\}\}, \{\{2,3\}, \{2,4\}\}\}, \\
&\quad \{\{\{2,3\}, \{2,4\}\}, \{\{2,4\}, \{4,5\}\}\}\} \\
N_5 &= E_4 = \{\{\{\{\{1,2\}, \{2,3\}\}, \{\{2,3\}, \{2,4\}\}\}, \\
&\quad \{\{\{2,3\}, \{2,4\}\}, \{\{2,4\}, \{4,5\}\}\}\}\}.
\end{aligned}$$

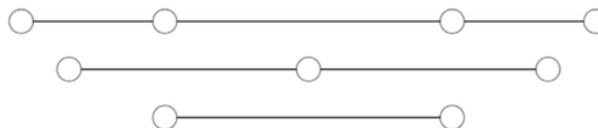


Figura 15 Estructura general de una D -viña.

Observación 3.4. En el ejemplo 3.3, tenemos que

- Los nombres de los bordes aparecen sobre los bordes en los árboles y los nombres de los nodos, en las elipses de los árboles en la figura 14. Como un borde es un conjunto de dos nodos, un borde a partir del tercer árbol se establece como un conjunto de un conjunto.
- La condición de proximidad se puede notar por ejemplo en el árbol T_2 , donde el primer borde conecta los nodos $\{1,2\}$ y $\{2,3\}$, estos dos bordes comparten el nodo 2 en el árbol T_1 .
- La condición de proximidad sería violada si en T_3 hubiera un borde $\{\{\{1,2\}, \{2,3\}\}, \{\{2,4\}, \{4,5\}\}\}$ (marcado con la línea roja punteada), ya que los nodos que corresponden a ese borde, no comparten un nodo en común en el árbol T_2 .

Para poder organizar las decomposiciones de PCC vistas arriba con una R -Viña, las d variables aleatorias diferentes están representadas por los nodos del primer árbol, mientras que las cópulas correspondientes están asociadas a los bordes. De esta manera, todos los pares no condicionales se especifican en el primer árbol, todos los pares condicionados en otra variable se representan en el segundo árbol, los pares condicionados en dos variables se representan en el tercer árbol, y así sucesivamente, hasta que el par condicionado en $d - 2$ permanezca para el último árbol.

A partir de ahora denotaremos $V = (T_1, \dots, T_{d-1})$ como una R -viña, además, para $i = 1, \dots, d - 1$, E_i y N_i serán los nodos y bordes correspondientes al árbol T_i . Por convención $E_0 = N_1$.

Tenemos dos casos especiales de R -viñas, a saber:

- D -viña: si cada nodo tiene un grado como máximo de dos. La figura 15 presenta la estructura general de una D -viña.



- C -viña: si cada árbol T_i para $i = 1, \dots, d - 1$ tiene un único nodo de grado $d - 1$. La figura 16 muestra la estructura general de una C -Viña.

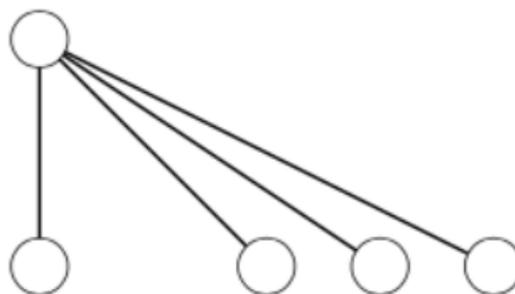


Figura 16 Estructura general de una C -Viña.

Cópulas basadas en R -viñas

Hasta este punto, hemos presentado el concepto de R -viñas, y por (Bedford and Cooke 2002a), es obvio que podemos usar una R -viña para especificar la estructura de una cópula multivariada a través de su descomposición en cópulas par, de manera formal demostraremos que una R -viña define una única cópula.

Definición 3.5 (Especificación de una cópula R -viña). (F, V, B) es una especificación de cópula R -viña si:

- $F = (F_1, \dots, F_d)$ es un vector de funciones de distribución continuas invertibles,
- V es una R -viña en d elementos,
- $B = \{C_e | i = 1, \dots, d - 1; e \in E_i\}$ donde C_e es una cópula bivariada y E_i es el conjunto de bordes del árbol T_i de la R -viña.

Debido a de Definición 3.5, hemos asignado una PCC a cada borde de los árboles.

Definición 3.6 (Dependencia de una R-viña). Sea (R_1, \dots, R_d) un vector aleatorio con función de distribución conjunta F . Se dice que F realiza una especificación de una cópula R-viña (\mathbf{F}, V, B) o que una R-viña exhibe dependencia si para cada $e \in E_i$, $e = \{a, b\}$, C_e es una cópula bivariada de $R_{C_{e,a}}$ y $R_{C_{e,b}}$ dado R_{D_e} . Adicionalmente, la distribución marginal de R_i es F_i para $i = 1, \dots, d$.

A partir de ahora, tenemos que $c_{C_{e,a}, C_{e,b} | D_e}$ será la densidad de la cópula de C_e del borde $e = \{a, b\}$. En general, la forma de la densidad conjunta de una cópula viña regular esta dada por el siguiente resultado:

Teorema 3.7. Dado la especificación (\mathbf{F}, V, B) de cópula R-viña en d elementos, existe una única distribución \mathbf{F} con marginales F_i y densidades f_i , para $i = 1, \dots, d$ que realiza esta especificación de cópula R-viña con densidad:

$$f_{1, \dots, d} = \prod_{i=1}^d f_i \prod_{i=1}^{d-1} \prod_{e \in E_i} c_{C_{e,a}, C_{e,b} | D_e}(F_{C_{e,a} | D_e}, F_{C_{e,b} | D_e}) \quad (27)$$

donde $e = \{a, b\}$.

La demostración se puede encontrar en (Bedford and Cooke 2002b) y en (Bedford and Cooke 2002a).

Como conclusión del Teorema 3.7, podemos ver que (27) nos muestra cómo las cópulas viña tienen densidades cerradas cuando F_1, \dots, F_d y las cópulas bivariadas B son diferenciables. También es importante notar que C_e es una cópula cópula marginal bivariada para los bordes en T_1 y C_e es cópula condicional bivariada para los bordes en T_2, \dots, T_{d-1} .

Ejemplo 3.8. La figuras 17-22 nos muestran un R-viña representada por los árboles $(T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$, y está basada en el vector aleatorio $(R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7)$.

Tenemos que, para el primer árbol, cada uno de los nodos es una variable aleatoria del vector $N_i = R_i$, para $i = 1, \dots, 7$. Entonces, para la estructura del primer árbol, obtenemos la siguiente descomposición en cópulas par:

$$T_1 = \underbrace{(R_1, R_2)}_{C_{1,2}} \underbrace{(R_2, R_5)}_{C_{2,5}} \underbrace{(R_2, R_3)}_{C_{2,3}} \underbrace{(R_3, R_4)}_{C_{3,4}}, \underbrace{(R_3, R_6)}_{C_{3,6}} \underbrace{(R_6, R_7)}_{C_{6,7}}.$$

Note que, en T_1 , toda C_e es una cópula marginal bivariada. Mire la figura 17.

Para el segundo árbol, las variables están condicionadas respecto al nodo que compartían en común.

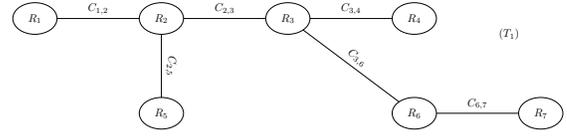


Figura 17 Primer árbol.

- Dada la variable condicional R_2 (nodo en común en T_1), la estructura de dependencia entre el par $((R_1, R_2), (R_2, R_3))$ está modelada por $C_{1,3|2}$. Es decir $C_e = 1, 3$ y $D_e = 2$.
- Dada la variable condicional R_2 (nodo en común en T_1), la estructura de dependencia entre el par $((R_2, R_3), (R_2, R_5))$ está modelada por $C_{3,5|2}$. Es decir $C_e = 3, 5$ y $D_e = 2$.
- Dada la variable condicional R_3 (nodo en común en T_1), la estructura de dependencia entre el par $((R_2, R_3), (R_3, R_4))$ está modelada por $C_{2,4|3}$. Es decir $C_e = 2, 4$ y $D_e = 3$.
- Dada la variable condicional R_3 (nodo en común en T_1), la estructura de dependencia entre el par $((R_2, R_3), (R_3, R_6))$ está modelada por $C_{2,6|3}$. Es decir $C_e = 2, 6$ y $D_e = 3$.
- Dada la variable condicional R_6 (nodo en común en T_1), la estructura de dependencia entre el par $((R_3, R_6), (R_6, R_7))$ está modelada por $C_{3,7|6}$. Es decir $C_e = 3, 7$ y $D_e = 6$.

Lo anterior significa que la estructura del segundo árbol esta dada por las cópulas condicionales

$$T_2 = \underbrace{(R_1, R_3 | R_2)}_{C_{1,3|2}}, \underbrace{(R_3, R_5 | R_2)}_{C_{3,5|2}}, \underbrace{(R_2, R_4 | R_3)}_{C_{2,4|3}}, \underbrace{(R_2, R_6 | R_3)}_{C_{2,6|3}}, \underbrace{(R_3, R_7 | R_6)}_{C_{3,7|6}}.$$

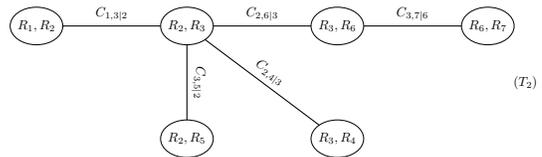


Figura 18 Segundo árbol.

Para el tercer árbol, tenemos:



- Dadas las variables condicionales R_2, R_3 (nodo en común en T_2), la estructura de dependencia entre el par $((R_1, R_3|R_2), (R_3, R_5|R_2))$ está modelada por $C_{1,5|2,3}$. Es decir $C_e = \{1, 5\}$ y $D_e = \{2, 3\}$.
- Dadas las variables condicionales R_2, R_3 (nodo en común en T_2), la estructura de dependencia entre el par $((R_1, R_3|R_2), (R_2, R_4|R_3))$ está modelada por $C_{1,4|2,3}$. Es decir $C_e = \{1, 4\}$ y $D_e = \{2, 3\}$.
- Dadas R_2, R_3 las variables condicionales (nodo en común en T_2), la estructura de dependencia entre el par $((R_1, R_3|R_2), (R_2, R_6|R_3))$ está modelada por $C_{1,6|2,3}$. Es decir $C_e = \{1, 6\}$ y $D_e = \{2, 3\}$.
- Dadas R_3, R_6 las variables condicionales (nodo en común en T_2), la estructura de dependencia entre el par $((R_2, R_6|R_3), (R_3, R_7|R_6))$ está modelada por $C_{2,7|3,6}$. Es decir $C_e = \{2, 7\}$ y $D_e = \{3, 6\}$.

La estructura del tercer árbol es:

$$T_3 = \underbrace{(R_1, R_5|R_2, R_3)}_{C_{1,5|2,3}}, \underbrace{(R_1, R_4|R_2, R_3)}_{C_{1,4|2,3}}, \underbrace{(R_1, R_6|R_2, R_3)}_{C_{1,6|2,3}}, \underbrace{(R_2, R_7|R_3, R_6)}_{C_{2,7|3,6}}.$$

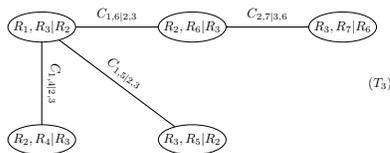


Figura 19 Tercer árbol.

Para el cuarto árbol tenemos que:

- Dada la variables condicional $R_1, R_3|R_2$ (nodo en común en T_3), la estructura de dependencia entre el par $((R_1, R_4|R_2, R_3), (R_1, R_5|R_2, R_3))$ está modelada por $C_{4,5|1,2,3}$. Es decir $C_e = \{4, 5\}$ y $D_e = \{1, 2, 3\}$.
- Dadas las variables condicionales $R_1, R_3|R_2$ (nodo en común en T_3), la estructura de dependencia entre el par $((R_1, R_5|R_2, R_3), (R_1, R_6|R_2, R_3))$ está modelada por $C_{5,6|1,2,3}$. Es decir $C_e = \{5, 6\}$ y $D_e = \{1, 2, 3\}$.
- Dadas $R_2, R_6|R_3$ las variables condicionales (nodo en común en T_3), la estructura de dependencia entre el par $((R_1, R_6|R_2, R_3), (R_2, R_7|R_2, R_3))$ está modelada por $C_{1,7|2,3,6}$. Es decir $C_e = \{1, 7\}$ y $D_e = \{2, 3, 6\}$.



La estructura del tercer árbol es:

$$T_4 = \underbrace{(R_4, R_5|R_1, R_2, R_3)}_{C_{4,5|1,2,3}}, \underbrace{(R_5, R_6|R_1, R_2, R_3)}_{C_{5,6|1,2,3}}, \underbrace{(R_1, R_7|R_2, R_3, R_6)}_{C_{1,7|2,3,6}}.$$

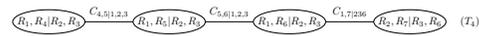


Figura 20 Cuarto árbol.

Para el quinto árbol, tenemos:

- Dadas las variables condicionales $R_1, R_5|R_2, R_3$ (nodo en común en T_4), la estructura de dependencia entre el par $((R_4, R_5|R_1, R_2, R_3), (R_5, R_6|R_1, R_2, R_3))$ está modelada por $C_{4,6|1,2,3,5}$. Es decir $C_e = \{4, 6\}$ y $D_e = \{1, 2, 3, 5\}$.
- Dadas las variables condicionales $R_1, R_6|R_2, R_3$ (nodo en común en T_4), la estructura de dependencia entre el par $((R_1, R_7|R_2, R_3, R_6), (R_5, R_6|R_1, R_2, R_3))$ está modelada por $C_{5,7|1,2,3,6}$. Es decir $C_e = \{5, 7\}$ y $D_e = \{1, 2, 3, 6\}$.

La estructura del quinto cuarto esta dada por:

$$T_5 = \underbrace{(R_4, R_6|R_1, R_2, R_3, R_5)}_{C_{4,6|1,2,3,5}}, \underbrace{(R_5, R_7|R_1, R_2, R_3, R_6)}_{C_{5,7|1,2,3,6}}.$$

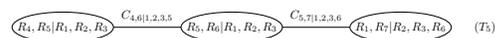


Figura 21 Quinto árbol.

Finalmente, para el sexto árbol tenemos:

- Dadas las variables condicionales $R_5, R_6|R_1, R_2, R_3$ (nodo en común en T_5), la estructura de dependencia entre el par $((R_4, R_6|R_1, R_2, R_3, R_5), (R_5, R_7|R_1, R_2, R_3, R_6))$ está modelada por $C_{4,7|1,2,3,5,6}$. Es decir $C_e = \{4, 7\}$ y $D_e = \{1, 2, 3, 5, 6\}$.

La estructura del sexto cuarto es:

$$T_6 = \underbrace{(R_4, R_7|R_1, R_2, R_3, R_5, R_6)}_{C_{4,7|1,2,3,5,6}}.$$



Figura 22 Sexto árbol.

Si suponemos que el vector $(R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7)$ tiene distribuciones F_i y densidades f_i , para todo $i \in \{1, \dots, 7\}$, entonces la función de densidad conjunta queda descrita por el teorema 3.7. En efecto, primero obtenemos el conjunto de cópulas bivariadas. Lo obtendremos primero por cada árbol, denotándolo como B_i para cada árbol T_i , $i = 1, \dots, 6$. Formalmente, tenemos $B = \bigcup_{i=1}^6 B_i$, donde

$$\begin{aligned} B_1 &= C_{1,2}, C_{2,3}, C_{2,5}, C_{3,4}, C_{3,6}, C_{6,7} && \text{para } T_1, \\ B_2 &= C_{1,3|2}, C_{2,6|3}, C_{3,7|6}, C_{3,5|2}, C_{2,4|3} && \text{para } T_2, \\ B_3 &= C_{1,4|2,3}, C_{1,5|2,3}, C_{1,6|2,3}, C_{2,7|3,6} && \text{para } T_3, \\ B_4 &= C_{4,5|1,2,3}, C_{5,6|1,2,3}, C_{1,7|2,3,6} && \text{para } T_4, \\ B_5 &= C_{4,6|1,2,3,5}, C_{5,7|1,2,3,6} && \text{para } T_5, \\ B_6 &= C_{4,7|1,2,3,5,6} && \text{para } T_6. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} B = \{ & C_{1,2}, C_{2,3}, C_{2,5}, C_{3,4}, C_{3,6}, C_{6,7}, C_{1,3|2}, C_{2,6|3}, \\ & C_{3,7|6}, C_{3,5|2}, C_{2,4|3}, C_{1,4|2,3}, C_{1,5|2,3}, C_{1,6|2,3}, \\ & C_{2,7|3,6}, C_{4,5|1,2,3}, C_{5,6|1,2,3}, C_{1,7|2,3,6}, \\ & C_{4,6|1,2,3,5}, C_{5,7|1,2,3,6}, C_{4,7|1,2,3,5,6} \}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} f(r_1, \dots, r_7) &= \prod_{i=1}^7 f_i(r_i) \cdot c_{1,2} \cdot c_{2,3} \cdot c_{2,5} \cdot c_{3,4} \cdot c_{3,6} \cdot \\ & c_{6,7} \cdot c_{1,3|2} \cdot c_{2,6|3} \cdot c_{3,7|6} \cdot c_{3,5|2} \cdot c_{2,4|3} \\ & \cdot c_{1,4|2,3} \cdot c_{1,5|2,3} \cdot c_{1,6|2,3} \cdot c_{2,7|3,6} \cdot c_{4,5|1,2,3} \cdot \\ & c_{5,6|1,2,3} \cdot c_{1,7|2,3,6} \cdot c_{4,6|1,2,3,5} \cdot \\ & c_{5,7|1,2,3,6} \cdot c_{4,7|1,2,3,5,6}. \end{aligned}$$

Cópulas basadas en C-viñas y D-viñas

La clase de las R-viñas, introducida en la sección anterior es todavía muy general y existe una gran cantidad posibles descomposiciones de R-viñas. De hecho, en (Morales Napoles et al. 2016) se demuestra que hay $\binom{d}{2} \cdot (d-2)! \cdot 2^{\binom{d-2}{2}}$ posibles R-viñas en d nodos. Sin embargo, existen dos subclases importantes para las cuales el número total de viñas es limitado debido a restricciones adicionales en la estructura de los árboles. Estas subclases especiales de R-viñas, que son las D-viñas y las C-viñas que (Aas et al. 2009) demostró que tienen $\frac{d!}{2}$ posibles descomposiciones.

1. Distribución D-viña. Esta clase de descomposición fue nombrada así en (Bedford and Cooke 2002b). Nos da una manera de escribir a la densidad $f(r_1, \dots, f(r_d))$. Usando (23) para la distribución condicional de (R_1, R_j) dado (R_2, \dots, R_{j-1}) , podemos escribir $f(r_j | r_1, \dots, r_{j-1}) = c_{1,j|2, \dots, j-1}(F(r_1 | r_2, \dots, r_{j-1}), F(r_j | r_2, \dots, r_{j-1})) \cdot f(r_j | r_2, \dots, r_{j-1})$. Esto es:

$$\prod_{i=1}^{j-2} c_{i,j|i+1, \dots, j-1} (F(r_i | r_{i+1}, \dots, r_{j-1}), F(r_j | r_{i+1}, \dots, r_{j-1})) \cdot c_{j-1,j}(F_{j-1}(r_{j-1}), F_j(r_j)) \cdot f_j(r_j). \quad (28)$$

Es decir brindamos una estructura al conjunto de cópulas bivariadas para obtener la densidad multivarada, y lo logramos haciendo $B = \{C_{i_1, i_2 | i_1+1, \dots, i_2-1} : 1 \leq i_1 < i_2 \leq d\} = \{C_{12}; \dots; C_{d-1,d}; C_{13|2}; \dots; C_{d-2,d | d-1}; \dots; C_{1,d | 2, \dots, d-1}\}$.

Ejemplo 3.9. Vea la figura 23. Por el Teorema 3.5, B es el conjunto de todas las cópulas bivariadas que se generan en cada uno de los bordes de todos los árboles que componen la R-viña. Concretamente,

$$B = \{C_{1,2}, C_{2,3}, C_{3,4}, C_{4,5}, C_{1,3|2}, C_{2,4|3}, C_{3,5|4}, C_{1,4|2,3}, C_{2,5|3,4}, C_{1,5|2,3,4}\}.$$

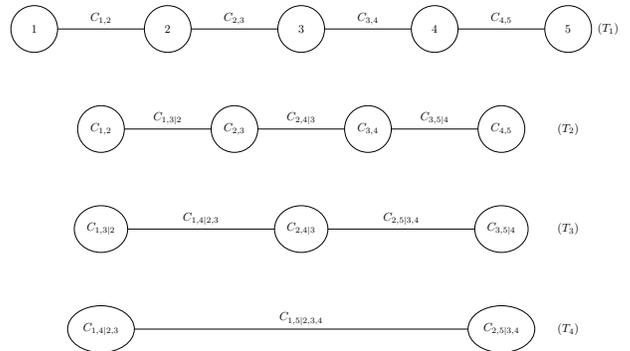


Figura 23 Ejemplo de una cópula D-viña en cinco variables

Además si suponemos que los supuestos del Teorema 3.7 se cumplen, entonces tenemos que la correspondiente den-



idad conjunta modelada esta dada por:

$$f(r_1, r_2, \dots, r_5) = \prod_{i=1}^5 f_i(r_i) \cdot c_{1,2} \cdot c_{2,3} \cdot c_{3,4} \cdot c_{4,5} \cdot c_{1,3|2} \cdot c_{2,4|3} \cdot c_{3,5|4} \cdot c_{1,4|2,3} \cdot c_{2,5|3,4} \cdot c_{1,5|2,3,4}$$

Si aplicamos (28), en (20), tendremos que:

$$\begin{aligned} f(r_1, \dots, r_d) &= \prod_{j=2}^d \prod_{i=1}^{j-2} c_{i,j|i+1, \dots, j-1} \\ &\quad (F(r_i|r_{i+1}, \dots, r_{j-1}), F(r_j|r_{s+1}, \dots, r_{j-1})) \\ &\quad \cdot \prod_{j=2}^d c_{j-1,j}(F_{j-1}(r_{j-1}), F_j(r_j)) \prod_{j=1}^d f_j(r_j) \\ &= \prod_{j=1}^d f_j(r_j) \cdot \prod_{j=2}^d \prod_{i=1}^{j-1} c_{i,j|i+1, \dots, j-1} \\ &\quad (F(r_i|r_{i+1}, \dots, r_{j-1}), F(r_j|r_{s+1}, \dots, r_{j-1})), \end{aligned}$$

donde el índice j identifica los árboles, mientras que i recorre los bordes de cada árbol.

Ejemplo 3.10 (*D-Viña en cuatro elementos elementales*). La distribución de cuatro variables proviene de la especificación $\{F_1, F_2, F_3, F_4, C_{1,2}, C_{2,3}, C_{3,4}, C_{1,3|2}, C_{2,4|1}, C_{1,4|2,3}\}$. Las marginales de $(i, i+1)$ son $F_{i,i+1} = C_{i,i+1}(F_i, F_{i+1})$, a partir de las cuales se puede obtener información de $F_{i,i+1}$, para poder expresar F_{123} y F_{234} de la forma:

$$\begin{aligned} &F_{123}(r_1, r_2, r_3) \\ &= \int_{-\infty}^{r_1} C_{23|1}(F_{21}(r_2|s), F_{31}(r_3|s)) dF_1(z). \end{aligned}$$

Entonces tenemos que $F_{1234}(r_1, r_2, r_3, r_4)$ puede escribirse como:

$$\int_{-\infty}^{r_2} \int_{-\infty}^{r_3} C_{14|23}(F_{1|23}(r_1|z_2, z_3), F_{4|23}(r_4|z_2, z_3)) dF_{23}(z_2, z_3).$$

Si, para $i = 1, 2, 3, 4$, F_i es diferenciable, y sus respectivas densidades son f_i ; y C_e tienen densidades c_e para cada borde e en la viña, entonces las derivadas parciales de cuarto orden son

$$\begin{aligned} &f_{1234}(r_1, r_2, r_3, r_4) \\ &= c_{14|23}(F_{1|23}(r_1|r_2, r_3), F_{4|23}(r_4|r_2, r_3)) \cdot \\ &\quad f_{1|23}(r_1|r_2, r_3) \cdot f_{4|23}(r_4|r_2, r_3) \cdot f_{23}(r_2, r_3) \\ &= c_{14|23}(F_{1|23}(r_1|r_2, r_3), F_{4|23}(r_4|r_2, r_3)) \cdot \\ &\quad c_{13|2}(F_{1|2}(r_1|r_2), F_{3|2}(r_3|r_2)). \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &c_{24|3}(F_{2|3}(r_2|r_3), F_{4|3}(r_4|r_3)) \cdot \\ &c_{12}(F_1(r_1), F_2(r_2)) \cdot c_{23}(F_2(r_2), F_3(r_3)) \cdot \\ &c_{34}(F_3(r_3), F_4(r_4)) \prod_{i=1}^4 f_i(r_i). \end{aligned}$$

2. Distribución C-viña. Usando (23) para la distribución condicional de (R_{j-1}, R_j) dado R_1, \dots, R_{j-2} , podemos hacer $f(r_j|r_1, \dots, r_{j-1}) = c_{j-1,j|1, \dots, j-2}(F(r_{j-1}|r_1, \dots, r_{j-2}), F(r_j|r_1, \dots, r_{j-2})) \cdot f(r_j|r_1, \dots, r_{j-2})$. O sea,

$$\begin{aligned} f(r_j|r_1, \dots, r_{j-1}) &= \prod_{k=1}^{j-1} c_{j-k,j|1, \dots, j-k-1} \\ &\quad (F(r_{j-k}|r_1, \dots, r_{j-k-1}), F(r_j|r_1, \dots, r_{j-k-1})) \cdot \\ &\quad f_j(r_j). \end{aligned} \quad (29)$$

Es decir, brindamos una estructura al conjunto de cópulas bivariadas para obtener la densidad multivariada. Esto es

$$\begin{aligned} B &= \{C_{i_1, i_2|1, \dots, i_1-1} : 1 \leq i_1 < i_2 \leq d\} \\ &= \{C_{1,2}; \dots; C_{1,d}; C_{2,3|1}; \dots; C_{2,d|1}; \dots; C_{d-1,d|1, \dots, d-2}\} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.11. Ahora proponemos una cópula C-viña en cinco variables. Mire la figura 24.

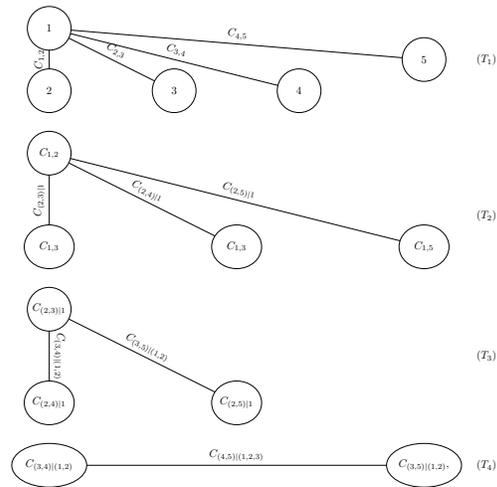


Figura 24 Ejemplo de una cópula C-viña en cinco variables.

Por el teorema 3.5, B es el conjunto de todas las cópulas bivariadas que se generan en cada uno de los bordes de

todos lo árboles que componen la R -viña. Esto es

$$B = \{C_{1,2}; C_{1,3}; C_{1,4}; C_{1,5}; C_{2,3|1}; \\ C_{2,4|1}; C_{2,5|1}; C_{3,4|1,2}; C_{3,5|1,2}; C_{4,5|1,2,3}\}$$

Si suponemos que cumplen los supuestos del Teorema 3.7, entonces tendremos que la correspondiente densidad conjunta es:

$$f(r_1, r_2, \dots, r_5) = \prod_{i=1}^5 f_i(r_i) \cdot c_{1,2} \cdot c_{1,3} \cdot c_{1,4} \cdot c_{1,5} \cdot \\ c_{2,3|1} \cdot c_{2,4|1} \cdot c_{2,5|1} \cdot c_{3,4|1,2} \cdot c_{3,5|1,2} \cdot c_{4,5|1,2,3}.$$

Si aplicamos (29) en (20), y usamos $t = j - k$ y $t + i = j$, tendremos que:

$$f(r_1, \dots, r_d) = f(r_1) \cdot \prod_{j=2}^d \prod_{k=1}^{j-1} c_{j-k,j|1, \dots, j-k-1} \\ (F(r_{j-k}|r_1, \dots, r_{j-k-1}), F(r_j|r_1, \dots, r_{j-k-1})) \cdot f(r_j) \\ = \prod_{j=1}^d f_j(r_j) \cdot \prod_{j=2}^d \prod_{k=1}^{j-1} c_{j-k,j|1, \dots, j-k-1} \\ (F(r_{j-k}|r_1, \dots, r_{j-k-1}), F(r_j|r_1, \dots, r_{j-k-1})) \\ = \prod_{j=1}^d f_j(r_j) \cdot \prod_{t=1}^{d-1} \prod_{i=1}^{d-t} c_{t,t+i|1, \dots, t-1} \\ (F(r_t|r_1, \dots, r_{t-1}), F(r_{t+i}|r_1, \dots, r_{t-1})).$$

Modelo de selección

Ajustaremos un modelo de cópulas viña a nuestros datos. Los pasos que deben realizarse se explican a detalle en esta sección.

La construcción de una cópula viña consiste en tres partes:

1. Selección de la estructura de la viña, es decir, cuál será la descomposición en cópula par que se utilizará.
2. Elección de una familia de cópulas-par para cada par seleccionado en el punto anterior.
3. Estimación de los parámetros correspondientes para cada cópula.

Para un pequeño número de variables, podría ser posible estimar los parámetros para todas las descomposiciones posibles y para todos los diferentes tipo de cópulas par, comparar los modelos resultantes y elegir el que mejor se ajuste a los datos. Sin embargo, en la práctica, esto no es factible para conjuntos de datos de dimensiones altas,

ya que como hemos visto anteriormente, el número de posibles descomposiciones aumenta rápidamente por el número de variables incluidas en el modelo.

El procedimiento presentado en esta sección esta basado en el trabajo de (Dissmann *et al.* 2012), el cual es un método secuencial, es decir, procede árbol por árbol, lo que significa que los pasos recién descritos son ejecutados para el árbol T_1 , luego para el árbol T_2 y así hasta llegar al árbol T_{d-1} . Sin embargo, este método no garantiza encontrar óptimo global, pero sí una aproximación razonable.

Además por (24), la construcción del árbol T_i se basa en las variables transformadas que se obtienen en el árbol T_{i-1} . Entonces se requiere un procedimiento secuencial. Como las cópulas especificadas en los primeros árboles de la viña tienen el mayor impacto en el ajuste del modelo, queremos capturar la mayor parte de la dependencia aquí. Para lograr esto, asignaremos ponderaciones a cada par de variables, y luego seleccionaremos los pares a modelar que maximizan la suma de las ponderaciones.

Como medida, usaremos a la τ de Kendall, referida por en (18) y (19) ya que esta se puede encontrar independientemente de las distribuciones asumidas, y es adecuada para combinar diferentes tipos de cópulas en nuestro modelo. Su único inconveniente es que no cuenta con asimetría en la cola.

Método secuencial basado en la τ de Kendall

El método para construir un modelo de cópula R -viña se basa en:

1. Calcular τ de Kendall empíricas para todos los posibles pares de variables.
2. Seleccionar el árbol con la maximiza la suma de los valores absolutos de las τ de Kendall.
3. Para todos cada par, seleccionar una cópula y ajustar el parámetro correspondiente.
4. Usar h -funciones para transformar las variables usando las cópulas y los parámetros del paso anterior, para obtener los valores transformados.
5. Utilizar estas observaciones transformadas para calcular τ de Kendall empíricas de todos los posibles pares.
6. Regresar al paso 2, hasta que se complete la descomposición.



A pesar de la apariencia no factible del método, se propusieron pruebas de bondad de ajuste que no sólo permiten seleccionar el tipo cópula apropiada, sino también le asignan un nivel de significancia a la selección. Sin embargo, si el valor p asociado es más pequeño que un nivel de significancia predefinido, no es posible seleccionar ninguna de las familias de la cópula. Como alternativa, se encuentra un enfoque basado en el criterio de información AIC según lo propuesto por (Joe 1997) para tener la mayor precisión. Nosotros utilizaremos el criterio de selección AIC para elegir los tipos de cópula bivariada en nuestras cópulas viña.

Una opción para simplificar la construcción del modelo es permitir la selección de la cópula de independencia en cada par de variables considerado ayuda a reducir el número de parámetros y facilita mucho la estimación y la simulación. La prueba se basa en una τ de Kendall empírica y fue propuesta en (Genest and Favre 2007), y sus hipótesis son:

$$H_0 : C = \Pi^2 \text{ vs. } H_1 : C \neq \Pi^2.$$

Se puede mostrar que $\tau(R_1, R_2) = 0$ para dos variables aleatorias independientes R_1 y R_2 .

Bajo H_0 , la distribución de $\hat{\tau}$ es asintóticamente normal con media 0 y varianza $\frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}$. Por lo tanto podemos rechazar H_0 con un nivel de significancia α si:

$$\sqrt{\frac{9n(n-1)}{2(2n+5)}} |\hat{\tau}_n(R_1, R_2)| > \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Esta prueba de hipótesis se tiene que realizar para cada par de variables en el paso 3. Entonces sabremos si podemos elegir la cópula de independencia para este par, ya que hay muy poca dependencia presente; o si se debe elegir cualquiera de los otros tipos de cópulas bivariadas para este par.

Modelos de comparación

Después de haber ajustado diferentes modelos de cópula viña en el mismo conjunto de datos, el siguiente paso es comparar estos modelos entre sí. En esta sección presentamos la teoría requerida para elegir el mejor modelo de entre una selección de ellos. Además los criterios de información comunes también inducen a una comparación directa de modelos.

Criterios de información de Akaike y Bayesiano. El criterio de información de Akaike (AIC), propuesto en (Akaike 1973), es una de los criterios más usados de selección



de modelos. Para observaciones $r_i, i = 1, \dots, n$, AIC está definido como

$$AIC = -2 \sum_{i=1}^n \ln(f(r_i|\hat{\theta})) + 2k,$$

donde $\hat{\theta}$ es el estimador por máxima verosimilitud de $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$, y k es el número de parámetros en el modelo.

Por lo tanto, para calcular AIC en el caso de R -viñas, C -viñas, o D -viñas en un modelo de d variables con observaciones $r_i = (r_{i1}, \dots, r_{id}), i = 1, \dots, n$ y $\hat{\theta}$ como el parámetro estimado de la cópula, usamos los correspondientes modelos de función de densidad, es decir, $f(r_{i1}, \dots, r_{id})$ en (27), (29), o (28) según corresponda.

Por lo tanto, además de comparar los modelos por medio de su log verosimilitud para medir su bondad de ajuste, el criterio AIC incluye el número de parámetros en el modelo como una penalización para evitar el sobreajuste. En consecuencia se prefiere el modelo con el valor AIC más bajo.

Un criterio similar, con un término de penalización más fuerte fue propuesto por (Schwarz 2008). Es el Criterio de información Bayesiano (BIC) y está definido como:

$$BIC = -2 \sum_{i=1}^n \ln(f(r_i|\hat{\theta})) + k \ln(n),$$

donde $\hat{\theta}$ es el estimador por máxima verosimilitud de $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ y k es el número de parámetros en el modelo.

A diferencia del criterio AIC, el criterio BIC incluye un término de penalización para la muestra de tamaño n . Se prefiere el modelo con el valor BIC más bajo.

4. APLICACIÓN DE CÓPULAS VIÑA

El objetivo de este trabajo es explorar la estructura de dependencia entre variables aleatorias de pérdida de distintos ramos de seguros utilizando cópulas. Usaremos las viñas introducidas en la sección 3. Ahora describimos y preparamos los datos que utilizaremos y finalmente ajustaremos diferentes modelos viña para modelar las dependencias en nuestro conjunto de datos.

Datos

Con base en lo requerido en el Reporte Regulatorio sobre Información Estadística (RR-8), las entidades aseguradoras reportan su información estadística de acuerdo con los tipos de ramos que operan, y sus movimientos durante un período de tiempo determinado. Existen dos tipos de reportes estadísticos. A saber,

1. Información estadística consolidada del sector asegurador. Es la información consolidada por operación, ramo o tipo de seguro a nivel mercado, correspondiente a las cifras reportadas en las Formas Estadísticas de Seguros (FES) y en relación a los riesgos asegurados y las reclamaciones, esta es presentada de forma trimestral.
2. Información estadística detallada del sector asegurador. Es la información precisa, corresponde a las cifras reportadas en cada uno de los Sistemas Estadísticos de Seguros, a nivel mercado, es presentada de forma anual.

Toda esta información es analizada y publicada por la CNSF en su portal para proporcionar información a los mercados de la situación financiera de las instituciones.

Para fines de este trabajo usaremos la información estadística detallada del Sistema Estadístico del Sector Asegurador (SESA). Utilizaremos la última información reportada que es la que corresponde al año 2017, y las siguientes bases:

- Vida Individual
- Vida Grupo
- Accidentes Personales Individual
- Accidentes Personales Grupo
- Gastos Médicos Individual
- Gastos Médicos Grupo
- Responsabilidad Civil
- Transporte de mercancías
- Diversos Misceláneos
- Diveros Técnicos Construcción y Montaje
- Automóviles de Póliza Individual
- Automóviles de Póliza Flotilla

Cada una de las bases contiene catálogos de variables y dos bases:

1. **Emisión:** Donde se reportan la suma de todos los movimientos (emisión, cancelación, reinstalación, etc.) que haya adectado la contabilidad durente el ejercicio de reporte.
2. **Siniestros:** Se refiere a las pólizas que hayan temido movimientos de siniestros durante el ejercicio de reporte.

Las variables consideradas se refieren a Prima y a Monto de siniestros. Entonces transformamos y agrupamos estas variables, para así obtener sólo dos variables por base:

- Prima total: En algunos casos, solo se tomó como la suma de las primas que pagaba cada beneficiario de una póliza y en otras como la Prima emitida.
- Monto total de siniestros: Tomamos el monto de siniestros neto, es decir decontamos los montos de deducible y coaseguro.

Consideramos los tres supuestos siguientes.

1. Debido a que nuestro objetivo es calcular parte del Requerimiento de Capital por Riesgos Técnicos y financieros de seguros (RC_{TyFS}). Usaremos la variable *índice de severidad*:

$$= \frac{\text{Índice de Severidad}}{\text{Monto Total de Siniestro Individual}} \cdot \text{Prima Promedio}$$

Debido a que estamos usando infromación de mercado, un supuesto que debemos considerar es que una sola distribución no ajustará de manera adecuada todos los datos, para ello en el anexo 6.3.2 de la Circular Única de Seguros y Fianzas, se sugiere utilizar un umbral, y a partir de este umbral, poder ajustar una distribución parámetrica a los resultados. Nosotros utilizamos un umbral al 95 %.

2. Análizamos con la prueba de Ljung-Box, si es que los datos son estacionarios o presentan dependencia serial, para ello tratamos a los datos como si fuesen una serie de tiempo. Realizamos la prueba sobre los datos originales y debido a que todos los ramos presentaron un p -value mayor a 0.05, rechazamos la hipótesis nula de estacionalidad o dependencia serial. Vea las Tablas 1 y 2.

Daños						
	Diversos_CM	Diversos_Mis	Trasporte_mer	Res_civil	Auto_flotilla	Auto_ind
p-value	0.669459	0.999301	0.2725808	0.7707075	0.1533977	0.7914724

■ **Tabla 1** p -values para todos los ramos de daños de la prueba Ljung-Box

Vida						
	Vida_ind	Vida_grupo	GM_coloc	GM_ind	AP_ind	AP_col
p-value	0.6216839	0.7704076	0.1485618	0.979388	0.7697272	0.2932997

■ **Tabla 2** p -values para todos los Ramos de Vida de la prueba Ljung-Box



3. Debido a que el método recursivo usado para calcular las cópulas viña depende del uso de la τ de Kendall, necesitamos que las bases tengan la misma cantidad de datos. Por ello se ajustó una distribución a cada uno de los datos, y con ello, se completó una muestra, que fijamos en 1000 datos por cada tipo de seguro.

Mostramos la selección de la distribución univariada para cada tipo de seguro en la tabla 3.

Tipo Seguro	Distribución	Parámetro 1	Parámetro 2	P-Value KS/AD
Accidentes personales Colectivo	Lognormal	2.4270	0.5587	0.7795423/0.7289347
Accidentes personales Individual	Lognormal	1.8855	1.1482	0.9784628/0.9946641
Gastos Médicos Colectivo	Gamma	2.2433	0.2619	0.71709097/0.699721628
Gastos Médicos Individual	Gamma	4.4896	0.5219	0.9440115/0.97512591
Vida Individual	Gamma	4.5655	0.4728	0.6602627/0.70060342
Vida Grupo	Gamma	0.7034	0.0186	0.9330601/0.9926395
Diversos Construcción y montaje	Weibull	0.3376	1.3073	0.4026772/0.7501961
Diversos Misceláneos	Weibull	0.8730	68.8820	0.7874/0.8043
Transporte Mercancías	Weibull	2.6105	0.5806	0.5829608/0.7787039
Responsabilidad Civil	Lognormal	4.0266	0.9933	0.4543/0.4345
Autos Flotilla	Lognormal	3.1755	0.7861	0.7795423/0.7289347
Autos Individual	Lognormal	3.1504	0.6529	0.56576/0.5467

■ **Tabla 3** Distribuciones ajustadas para todos los tipos de seguros seleccionados.

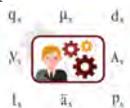
Preparación de los datos

Como vimos en la sección 2, las cópulas son funciones de distribución multivariadas con marginales uniformes que se utilizan para describir las dependencias entre varias variables aleatorias con observaciones independientes e idénticamente distribuidas en $[0, 1]$. Debido al análisis que acabamos de mostrar que nuestros datos no se distribuyen uniformemente, ni tienen observaciones entre $[0, 1]$. Por lo tanto, debemos preparar los datos para poder utilizarlos más tarde como entrada para nuestros modelos de cópula viña.

Debido a que necesitamos que nuestros datos se distribuyan uniformemente en $[0, 1]$, y gracias a que ajustamos una distribución continua a cada uno de los conjuntos de datos, vamos a transformar nuestros datos utilizando la transformación en probabilidad.

La transformación en probabilidad es usada para convertir observaciones de una variable aleatoria con función distribución continua específica en variables aleatorias que tienen distribución uniforme. De manera específica, dada una variable aleatoria R con función de distribución F_R , Entonces la variable aleatoria U se define como $U = F_R(R) \sim U(0, 1)$.

Esta relación se mantiene si la distribución utilizada es la verdadera distribución de la variable aleatoria. Si, por el contrario, la distribución se ha ajustado a los datos,



	AF	AF	CSA																	
Valor por variable	1.00	1.00	0.10	0.17	0.22	0.13	0.20	0.10	0.10	0.10	0.10	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

■ **Tabla 4** Valores empíricos de la τ de Kendall para cada uno de los tipos de seguro.

el resultado se mantiene aproximadamente en grandes muestras de datos. Además porque todas las funciones de distribución son de la forma $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, los datos se transforman automáticamente al intervalo unitario.

En nuestro caso, debido a que pudimos ajustar las distribuciones vistas en la tabla 3, podemos usar las funciones de distribución para aplicar la transformación en probabilidad, esto para cada uno de los doce tipos de seguro. Para $i = 1, 2, \dots, 12$ se tiene que, para $t = 1, 2, \dots, 1000$, $U_{i,t} = F(R_{i,t}) \rightarrow (U_{i,t})_{t=1, \dots, 1000} \sim U(0, 1)$. Por lo tanto, tenemos los datos para poder aplicar cópulas. Ya que $C(F_1(r_1), F_2(r_2)) = C(u_1, u_2)$, donde $u_1 := F_1(r_1)$ y $u_2 := F_2(r_2)$.

Estructura de la cópula Viña

El proceso de selección de modelo para un modelo de cópula viña se he discutido a detalle previamente. En cuanto a la aplicación, la teoría descrita se implementa en las funciones *RVineStructureSelect* del paquete *VineCopula* y *CDVineCopSelect* del paquete *CDVine*, ambas del programa estadístico R. Hay varias opciones incluídas en estas funciones y explicamos a continuación qué utilizaremos para ajustar nuestras viñas.

La primera opción que tenemos que decidir es qué tipo de viña se ajusta a nuestro modelo de datos. En segundo lugar, hay una gran variedad de familias de cópula implementadas en el paquete. De éstas, la función selecciona el tipo de cópula bivariada para modelar los diferentes pares de variables que se identifican en la descomposición de cópula-par. Como lo mencionamos anteriormente, la selección de la cópula bivariada que mejor ajusta los datos está basada en los criterios de información AIC y BIC. Para nuestros modelos, reducimos el número de posibles familias de cópula para elegir aquellas que se han introducido en la sección 2, como lo mencionamos ahí, estas cópulas son las más importantes y adecuadas para modelar diferentes tipos de dependencias.

Después de decidir por alguna de las opciones, el modelo se ajusta a los datos. Las funciones *RVineStructureSelect* y *CDVineCopSelect* devuelven la estructura de viña junto con los tipos de familias de cópulas que se han elegido para las diferentes cópulas-par. Además los valores estimados de los parámetros se dan para cada cópula. Vea la tabla 4.

	1.P. ind	1.P. ind	1.S3. ind	1.S3. ind	1.Vida. ind	1.Vida. grupo	1.Diversos. C3	1.Diversos. M3	1.Trasnporte. ind	1.Resp. ind	1.Autos. Flotilla	1.Autos. ind
Tau de Kendall	0.89	0.90	0.18	0.17	0.22	0.15	0.24	0.21	0.18	0.90	0.91	0.90

■ **Tabla 5** Suma de los valores empíricos de la tau de Kendall tomando un nodo raíz.

De manera particular obtenemos los totales por renglón, es decir si tomamos a cada uno de los tipos de seguros como nodo raíz cual, sería el que maximiza la estructura de dependencia. Esto nos será muy útil en el caso de la C-viña. Vea la tabla 5.

Debido a que nuestros datos consideran el índice de severidad por cada uno de los tipos de seguro, para esos seguros usaremos la siguiente notación:

- Accidentes Personales Colectivo R_1 ,
- Accidentes Personales Individual R_2 ,
- Gastos Médicos Colectivo R_3 ,
- Gastos Médicos Individual R_4 ,
- Vida Individual R_5 ,
- Vida Grupo R_6 ,
- Diversos Técnicos Construcción y Montaje R_7 ,
- Diversos Misceláneos R_8 ,
- Transporte de mercancías R_9 ,
- Responsabilidad Civil R_{10} ,
- Automoviles de Póliza Flotilla R_{11} ,
- Automoviles de Póliza Individual R_{12} .

R-viña

La primera viña que vamos a ajustar a nuestros datos será una R-viña. El resultado que el programa devuelve después de ajustar la R-viña es una matriz y presentaremos el árbol estimado en cada paso, y los parámetros de las cópulas estimadas, y también daremos la τ de Kendall empírica. Nuestros árboles se muestra en las figuras 25-35, y el detalle de los análisis de las cópulas correspondientes aparece en las tablas 6-16.

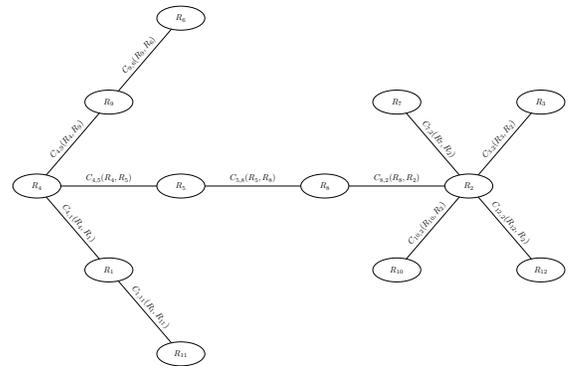


Figura 25 Primer árbol en la R-viña.

Cópula Par	Cópula Seleccionada	Parámetro 1	Parámetro 2	τ
$C_{2,12}$	Gumbel	100		0.91
$C_{2,10}$	Gumbel	100		0.93
$C_{2,7}$	t	-0.05	12.58	-0.3
$C_{2,3}$	Supervivenica Clayton	0.06		-0.3
$C_{1,11}$	t	1	2	0.9
$C_{4,1}$	Independencia			
$C_{2,8}$	Gumbel Rotada 90	-1.04		-0.3
$C_{5,8}$	Supervivenica Clayton	0		0
$C_{4,5}$	t	0.6	7.36	0.41
$C_{4,9}$	Supervivenica Clayton	0		0
$C_{6,9}$	Gumbel	1.04		0.04

■ **Tabla 6** Parámetros de las cópulas elegidas para el primer árbol.

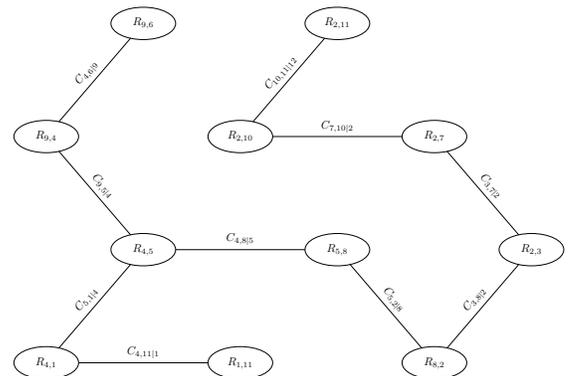


Figura 26 Segundo árbol en la R-viña.



Cópula Par	Cópula Seleccionada	Parámetro	τ
$C_{10,12 2}$	Gumbel	100	0.91
$C_{7,10 2}$	Gaussian	0.1	0.07
$C_{3,7 2}$	Frank	0.17	0.02
$C_{8,3 2}$	Gumbel Rotada 90	-1.03	-0.03
$C_{4,11 1}$	Rotated Calyton 270	-0.44	-0.18
$C_{5,1 4}$	Rotated Calyton 90	-0.01	0
$C_{5,2 8}$	Supervivenica Clayton	-1.04	-0.3
$C_{4,8 5}$	Gaussian	-0.03	-0.02
$C_{9,5 4}$	Rotated Calyton 90	-0.04	-0.02
$C_{6,4 9}$	Frank	0.04	0

■ **Tabla 7** Parámetros de las cópulas elegidas para el segundo árbol.

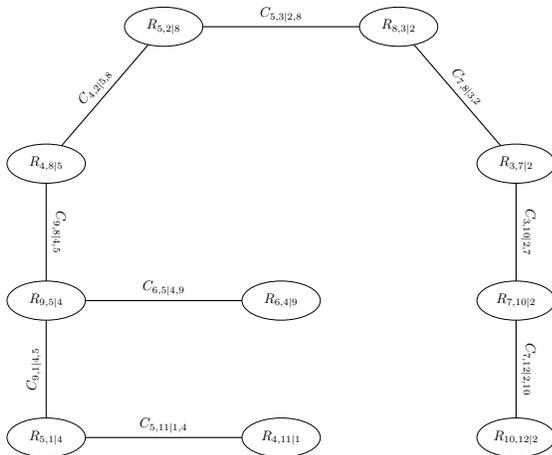


Figura 27 Tercer árbol en la R-viña.



Cópula Par	Cópula Seleccionada	Parámetro	τ
$C_{7,12 10,2}$	Gaussian	0.02	0.01
$C_{3,10 7,2}$	Gaussian	0.08	0.05
$C_{8,7 3,2}$	Clayton	0.01	0
$C_{5,3 8,2}$	Independencia		
$C_{5,11 4,1}$	Clayton	0.63	0.24
$C_{9,1 5,4}$	Frank	-0.12	-0.01
$C_{4,2 5,8}$	Rotated Calyton 270	-0.01	-0.01
$C_{9,8 4,5}$	Rotated Calyton 270	-0.03	-0.01
$C_{6,5 9,4}$	Rotated Calyton 90	-0.04	-0.02

■ **Tabla 8** Parámetros de las cópulas elegidas para el tercer árbol.

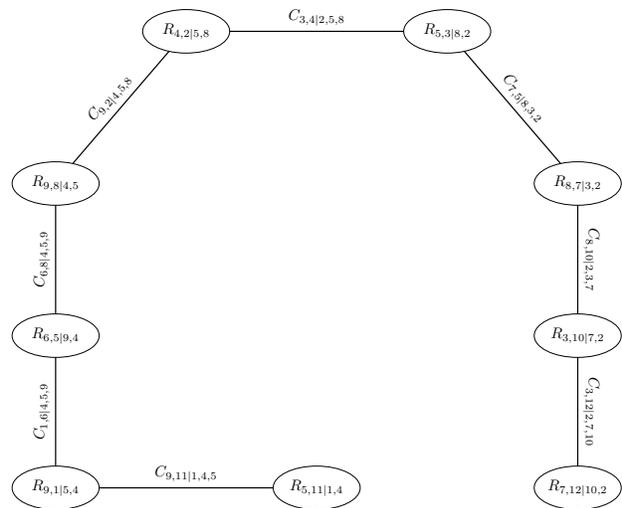


Figura 28 Cuarto árbol en la R-viña.

Cópula Par	Cópula Seleccionada	Parámetro1	Parámetro2	τ
$C_{3,12 12,10,2}$	Frank	-0.01		0
$C_{8,10 3,7,2}$	Gaussian	0.09		0.06
$C_{5,7 8,3,2}$	Independencia			
$C_{4,3 5,8,2}$	Gaussian	0.02		0.01
$C_{9,11 5,4,1}$	Supervivenica Gumbel	1.01		0.01
$C_{6,1 9,5,4}$	t	0.05	17.11	0.03
$C_{9,2 4,5,8}$	Rotated Calyton 270	-0.04		-0.02
$C_{6,8 9,4,5}$	Gumbel	1.02		0.02

■ **Tabla 9** Parámetros de las cópulas elegidas para el cuarto árbol.

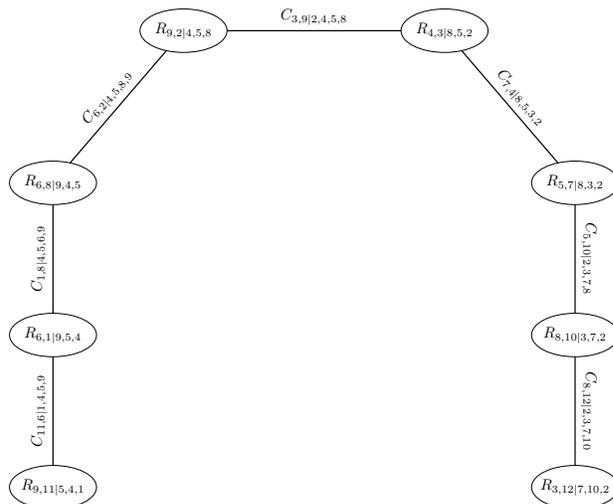


Figura 29 Quinto árbol en la R-viña.

Cópula Par	Cópula Seleccionada	Parámetro1	Parámetro2	τ
$C_{8,12 3,7,10,2}$	Gaussian	0.03		0.02
$C_{5,10 8,3,7,2}$	Clayton	0.43		0.18
$C_{4,7 5,8,3,2}$	Frank	0.06		0.01
$C_{9,3 4,5,8,2}$	Frank	-0.17		0.02
$C_{6,11 9,5,4,1}$	Frank	0.22		0.02
$C_{8,1 6,9,5,4}$	Independencia			
$C_{6,2 9,4,5,8}$	Gumbel Rotada 270	-1.02		-0.02

■ **Tabla 10** Parámetros de las cópulas elegidas para el quinto árbol.

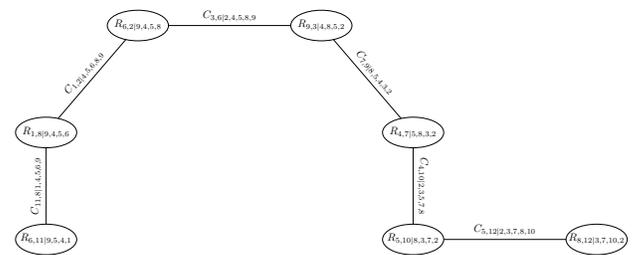


Figura 30 Sexto árbol en la R-viña.

Cópula Par	Cópula Seleccionada	Parámetro1	τ
$C_{5,12 8,3,7,10,2}$	Rotated Calyton 270	-0.35	-0.15
$C_{4,10 5,8,3,7,2}$	Frank	-1.27	-0.14
$C_{9,7 4,5,8,3,2}$	Gumbel	1.01	0.01
$C_{6,3 9,4,5,8,2}$	Gaussian	-0.02	-0.01
$C_{8,11 6,9,5,4,1}$	Clayton	0.03	0.02
$C_{2,1 8,6,9,5,4}$	Supervivenica Clayton	0.03	0.02

■ **Tabla 11** Parámetros de las cópulas elegidas para el sexto árbol.

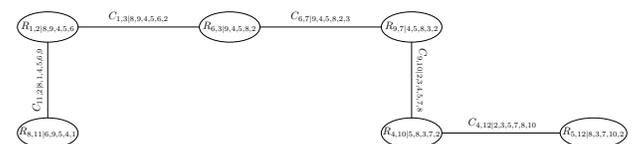


Figura 31 Séptimo árbol en la R-viña.

Cópula Par	Cópula Seleccionada	Parámetro	τ
$C_{4,12 5,8,3,7,10,2}$	Clayton	0.33	0.14
$C_{9,10 4,5,8,3,7,2}$	Gaussian	0.07	0.05
$C_{6,7 9,4,5,8,3,2}$	Frank	-0.11	0.01
$C_{1,3 6,9,4,5,8,2}$	Gaussian	-0.01	-0.01
$C_{2,11 8,6,9,5,4,1}$	Frank	-0.18	0.02

■ **Tabla 12** Parámetros de las cópulas elegidas para el séptimo árbol.



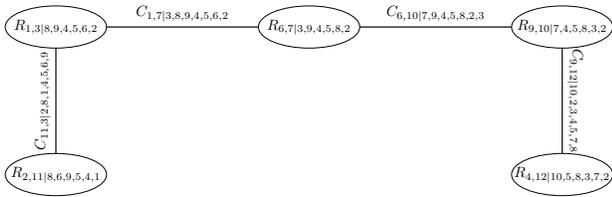


Figura 32 Octavo árbol en la R-viña.

Cópula Par	Cópula Seleccionada	Parámetro	τ
$C_{9,12 4,5,8,3,7,10,2}$	Gaussian	0.03	0.02
$C_{6,10 9,4,5,8,3,7,2}$	Frank	0.13	0.01
$C_{1,7 6,9,4,5,8,3,2}$	Frank	0.16	0.02
$C_{11,3 1,6,9,4,5,8,2}$	Gumbel Rotada 90	-1.01	-0.01

■ Tabla 13 Parámetros de las cópulas elegidas para el octavo árbol.



Figura 33 Noveno árbol en la R-viña.

Cópula Par	Cópula Seleccionada	Parámetro	τ
$C_{6,12 9,4,5,8,3,7,10,2}$	Frank	0.14	0.02
$C_{1,10 6,9,4,5,8,3,7,2}$	Supervivenica Gumbel	1.05	0.04
$C_{11,7 1,6,9,4,5,8,3,2}$	Rotated Calyton 270	-0.08	-0.04

■ Tabla 14 Parámetros de las cópulas elegidas para el noveno árbol.



Figura 34 Décimo árbol en la R-viña.

Cópula Par	Cópula Seleccionada	Parámetro	τ
$C_{1,12 6,9,4,5,8,3,7,10,2}$	Gaussian	0.03	0.02
$C_{11,10 1,6,9,4,5,8,3,7,2}$	Supervivenica Gumbel	2.9	0.65

■ Tabla 15 Parámetros de las cópulas elegidas para el décimo árbol.

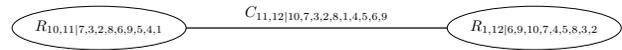


Figura 35 Undécimo árbol en la R-viña.

Cópula Par	Cópula Seleccionada	Parámetro1	Parámetro 2	τ
$C_{11,12 1,6,9,4,5,8,3,7,10,2}$	t	0.65	6.94	0.45

■ Tabla 16 Parámetros de las cópulas elegidas para el undécimo árbol.

C-Viña

Ahora ajustaremos una C-Viña. Debido a los resultados que obtuvimos en la tabla 5, nos percatamos de que hay dos árboles que maximizan los valores de la suma de τ de Kendall. Como no hay una diferencia entre estos, decidimos tomar a R_2 como nodo raíz de nuestro primer árbol. Los árboles se muestran en las figuras 36-46; y los parámetros, en las tablas 17-27.

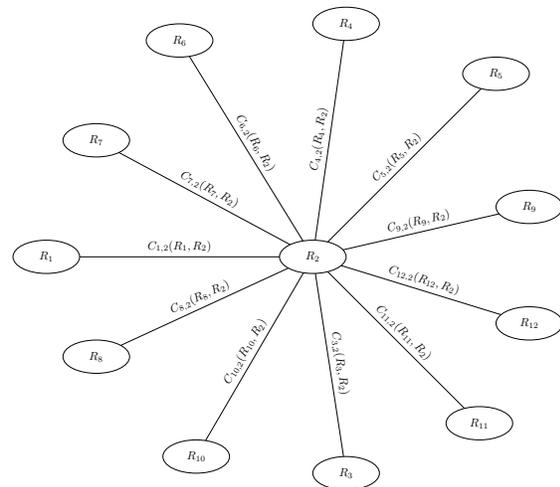


Figura 36 Primer árbol en la C-viña.

Cópula Par	Cópula Seleccionada	Parámetro 1	Parámetro 2	τ
$C_{2,7}$	t	-0.05	12.58	-0.03
$C_{2,8}$	Gumbel Rotada 270	-1.04		-0.03
$C_{2,3}$	Supervivenca Clayton	0.06		0.03
$C_{2,6}$	Gumbel Rotada 270	-1.02		-0.02
$C_{2,9}$	Rotated Calyton 90	-0.04		-0.02
$C_{2,4}$	Independencia			
$C_{2,5}$	Frank	-0.01		0.02
$C_{2,11}$	Supervivenca Clayton	0.03		0.02
$C_{2,1}$	Supervivenca Clayton	0.03		0.02
$C_{2,10}$	Gumbel	100		0.93
$C_{2,12}$	Gumbel	100		0.91

■ **Tabla 17** Parámetros de las cópulas elegidas para el primer árbol.

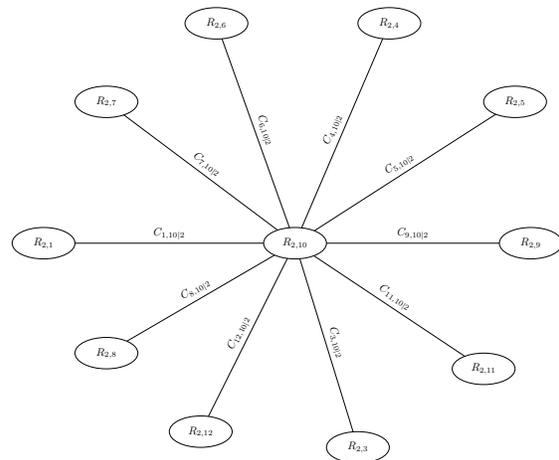


Figura 37 Segundo árbol en la C-viña.

Cópula Par	Cópula Seleccionada	Parámetro 1	Parámetro 2	τ
$C_{7,10 2}$	Gaussian	0.1		0.07
$C_{8,10 2}$	Gaussian	0.1		0.07
$C_{3,10 2}$	Gaussian	0.08		0.05
$C_{6,10 2}$	Gaussian	0.02		0.01
$C_{9,10 2}$	Gaussian	0.1		0.07
$C_{4,10 2}$	Clayton	0.45		0.18
$C_{5,10 2}$	Clayton	0.45		0.18
$C_{11,10 2}$	Gaussian	0.05		0.03
$C_{1,10 2}$	Gaussian	0.05		0.03
$C_{12,10 2}$	Gumbel	100		0.93

■ **Tabla 18** Parámetros de las cópulas elegidas para el segundo árbol.

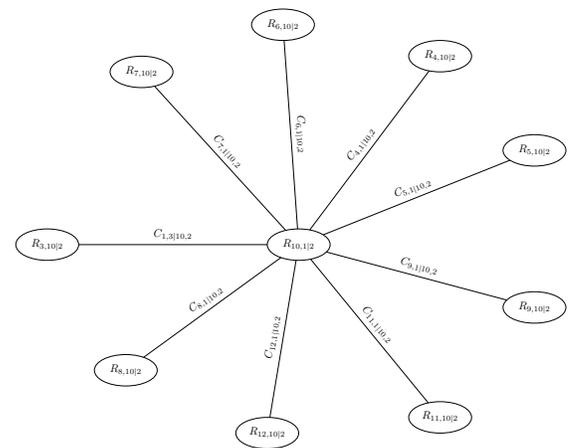


Figura 38 Tercer árbol en la C-viña.

Cópula Par	Cópula Seleccionada	Parámetro 1	Parámetro 2	τ
$C_{7,1 10,2}$	Frank	0.16		0.02
$C_{8,1 10,2}$	Frank	0.02		0
$C_{3,1 10,2}$	Gaussian	-0.01		-0.01
$C_{6,1 10,2}$	t	0.04	20.29	0.03
$C_{9,1 10,2}$	Frank	-0.11		-0.01
$C_{4,1 10,2}$	Independencia			
$C_{5,1 10,2}$	Independencia			
$C_{11,1 10,2}$	Supervivenca Clayton	63.4		0.97
$C_{12,1 10,2}$	Independencia			

■ **Tabla 19** Parámetros de las cópulas elegidas para el tercer árbol.



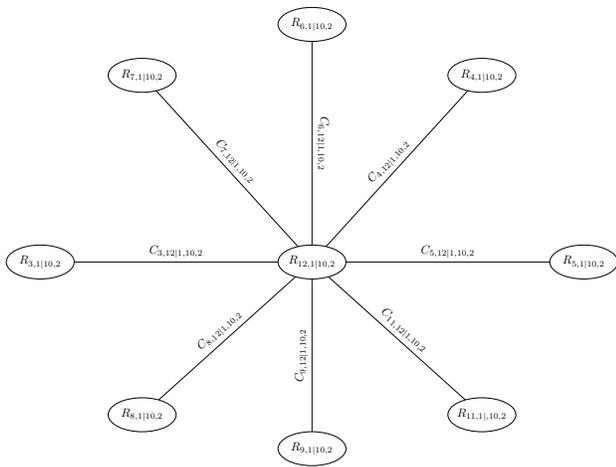


Figura 39 Cuarto árbol en la C-viña.

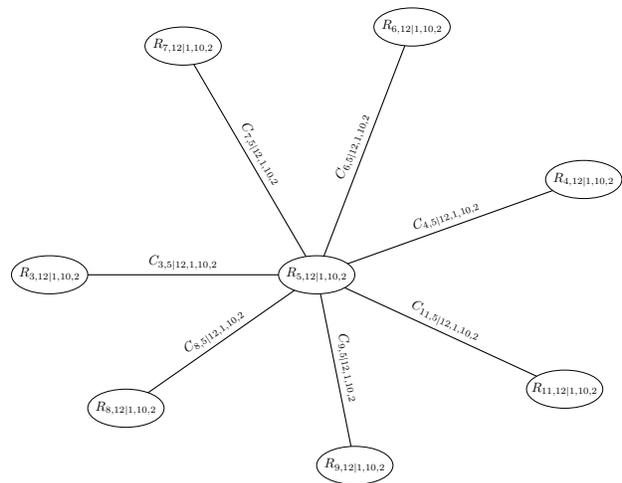


Figura 40 Quinto árbol en la C-viña.

Cópula Par	Cópula Seleccionada	Parámetro 1	Parámetro 2	τ
$C_{7,5 12,1,10,2}$	Independencia			
$C_{8,5 12,1,10,2}$	Independencia			
$C_{3,5 12,1,10,2}$	Independencia			
$C_{6,5 12,1,10,2}$	Frank	0.02		0
$C_{9,5 12,1,10,2}$	Independencia			
$C_{4,5 12,1,10,2}$	t	0.6	7.34	0.41
$C_{11,5 12,1,10,2}$	Frank	3.2		0.32

■ Tabla 21 Parámetros de las cópulas elegidas para el quinto árbol.

Cópula Par	Cópula Seleccionada	Parámetro 1	Parámetro 2	τ
$C_{7,12 1,10,2}$	Gaussian	0.02		0.01
$C_{8,12 1,10,2}$	Gaussian	0.02		0.01
$C_{3,12 1,10,2}$	Independencia			
$C_{6,12 1,10,2}$	Gumbel Rotada 90	-1.01		-0.01
$C_{9,12 1,10,2}$	Gaussian	0.01		0.01
$C_{4,12 1,10,2}$	Rotated Calyton 90	-0.35		-0.15
$C_{5,12 1,10,2}$	Clayton	0.45		0.18
$C_{11,12 1,10,2}$	t	1	2	0.99

■ Tabla 20 Parámetros de las cópulas elegidas para el cuarto árbol.

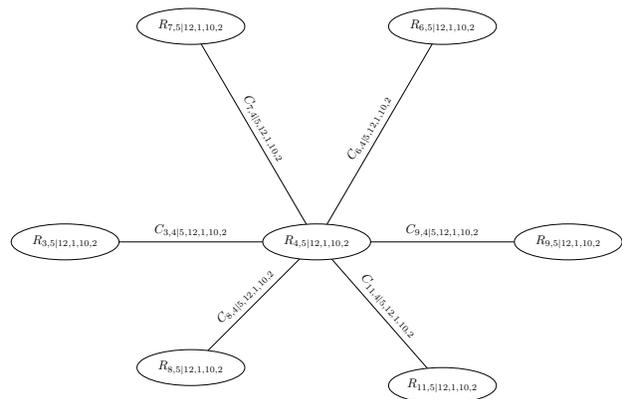


Figura 41 Sexto árbol en la C-viña.

Cópula Par	Cópula Seleccionada	Parámetro 1	τ
$C_{5,12 8,3,7,10,2}$	Rotated Calyton 270	-0.35	-0.15
$C_{4,10 5,8,3,7,2}$	Frank	-1.27	-0.14
$C_{9,7 4,5,8,3,2}$	Gumbel	1.01	0.01
$C_{6,3 9,4,5,8,2}$	Gaussian	-0.02	-0.01
$C_{8,11 6,9,5,4,1}$	Clayton	0.03	0.02
$C_{2,1 8,6,9,5,4}$	Supervivenica Clayton	0.03	0.02

■ **Tabla 22** Parámetros de las cópulas elegidas para el sexto árbol.

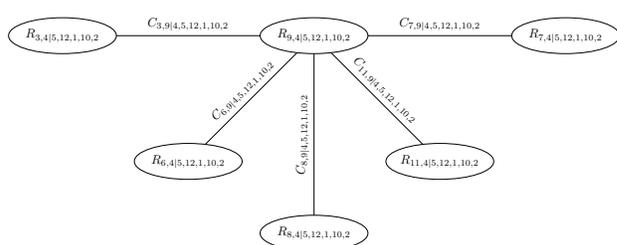


Figura 42 Séptimo árbol en la C-viña.

Cópula Par	Cópula Seleccionada	Parámetro 1	τ
$C_{7,9 4,5,12,1,10,2}$	Gumbel	1.01	0.01
$C_{8,9 4,5,12,1,10,2}$	Independencia		
$C_{3,9 4,5,12,1,10,2}$	Frank	-0.17	0.02
$C_{6,9 4,5,12,1,10,2}$	Gumbel	1.04	0.04
$C_{11,9 4,5,12,1,10,2}$	Frank	0.57	0.06

■ **Tabla 23** Parámetros de las cópulas elegidas para el séptimo árbol.

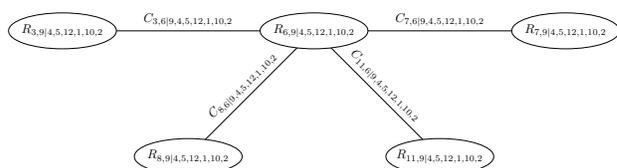


Figura 43 Octavo árbol en la C-viña.

| Hernández Jardón

Cópula Par	Cópula Seleccionada	Parámetro 1	τ
$C_{7,6 9,4,5,12,1,10,2}$	Frank	-0.11	-0.01
$C_{8,6 9,4,5,12,1,10,2}$	Gumbel	1.02	0.02
$C_{3,6 9,4,5,12,1,10,2}$	Gaussian	-0.02	-0.01
$C_{11,6 9,4,5,12,1,10,2}$	Gumbel	1.03	0.03

■ **Tabla 24** Parámetros de las cópulas elegidas para el octavo árbol.

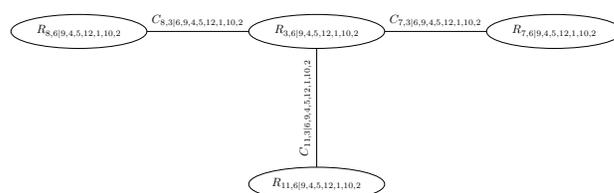


Figura 44 Noveno árbol en la C-viña.

Cópula Par	Cópula Seleccionada	Parámetro 1	τ
$C_{7,3 6,9,4,5,12,1,10,2}$	Frank	0.17	0.02
$C_{8,3 6,9,4,5,12,1,10,2}$	Gumbel Rotada 270	-1.03	-0.03
$C_{11,3 6,9,4,5,12,1,10,2}$	Frank	0.09	0.01

■ **Tabla 25** Parámetros de las cópulas elegidas para el noveno árbol.

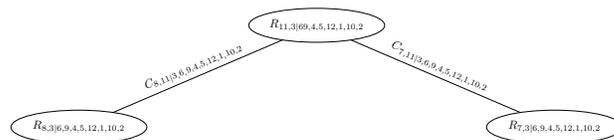


Figura 45 Décimo árbol en la C-viña.

Cópula Par	Cópula Seleccionada	Parámetro	τ
$C_{7,11 3,6,9,4,5,12,1,10,2}$	Frank	-0.18	-0.02
$C_{8,11 3,6,9,4,5,12,1,10,2}$	Clayton Rotada 90	-0.04	-0.02

■ **Tabla 26** Parámetros de las cópulas elegidas para el décimo árbol.





Figura 46 Undécimo árbol en la C-viña.

Cópula Par	Cópula Seleccionada
$C_{8,7 11,3,6,9,4,5,12,1,10,2}$	Independencia

■ **Tabla 27** Parámetros de las cópulas elegidas para el undécimo árbol.

D-viña

Como nuestros datos no siguen un orden cronológico, el caso de las *D*-viñas no es de nuestro interés. Sin embargo presentaremos una modelación para el caso de los seguros que tienen que ver con vida. Es decir:

- Accidentes Personales Colectivo R_1 ,
- Accidentes Personales Individual R_2 ,
- Gastos Médicos Colectivo R_3 ,
- Gastos Médicos Individual R_4 ,
- Vida Individual R_5 ,
- Vida Grupo R_6 .

La estructura general de la *D*-viña se ve en la figura 47; y los parámetros, en la tabla 28.

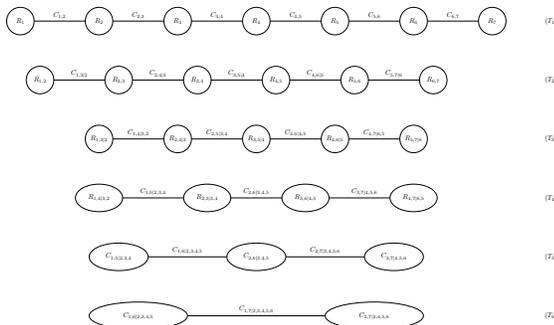


Figura 47 Estructura de la *D*-viña.



Cópula Par	Cópula Seleccionada	Parámetro 1	Parámetro 2
$C_{1,2}$	Gumbel	1.01229606	
$C_{2,3}$	Gumbel	1.02806808	
$C_{3,4}$	Gaussian	0.00081597	
$C_{1,5}$	t	0.60166579	7.3601
$C_{5,6}$	Frank	0.01766389	
$C_{6,7}$	Gaussian	-0.01096932	
$C_{1,3 2}$	Gaussian	-0.00124039	
$C_{2,4 3}$	Gaussian	-0.01206238	
$C_{3,5 4}$	Frank	0.13392984	
$C_{4,6 5}$	Gaussian	0.00094477	
$C_{5,7 6}$	Frank	0.08353422	
$C_{1,4 2,3}$	Gaussian	-0.02478358	
$C_{2,5 3,4}$	Gaussian	-0.01409626	
$C_{3,6 4,5}$	Gaussian	-0.02215443	
$C_{4,7 5,6}$	t	0.04237011	20.3976
$C_{1,5 2,3,4}$	independencia		
$C_{2,6 3,4,5}$	independencia		
$C_{3,7 4,5,6}$	independencia		
$C_{1,6 2,3,4,5}$	independencia		
$C_{2,7 3,4,5,6}$	independencia		
$C_{1,7 2,3,4,5,6}$	independencia		

■ **Tabla 28** Cópulas y sus parámetros ajustados a la *D*-viña

Comparación de modelos

Ahora comparamos los modelos ajustados a nuestros datos. La tabla 29 compara los criterios de información AIC y BIC para la *C*-viña y la *R*-viña.

	AIC	BIC
<i>R</i> -viña	-76,078.70	-75,730.25
<i>C</i> -viña	-83,901.87	-83,558.32

■ **Tabla 29** Comparación de la *R*-viña y *C*-Viña

Como podemos notar, tanto el criterio AIC como el criterio BIC, nos muestran que la *C*-Viña ajusta mejor a nuestros datos.

Estimación de Riesgos

Ahora simularemos nuevas observaciones aleatorias de los índices de severidad utilizando la estructura proporcionada por los modelos *C*-viña y *R*-viña. Las simulaciones están basadas en (Aas *et al.* 2009), y con ayuda de

la función *RVineSim* del paquete *VineCopula*. Con estos índices agregados, estimamos el VaR al 95 %, 99 %, 99.5 % y 99.9 %. Los resultados pueden verse en la tabla 30.

VaR	R-viña	C-Viña
95 %	0.9531	0.9526
99 %	0.9909	0.9900
99.50 %	0.9948	0.9952
99.90 %	0.9988	0.9982

■ **Tabla 30** Estimación del VaR con un nivel de confianza de 95 %, 99 %, 99.5 % y 99.9 %

A pesar de que este resultado comprende cómo fue la captura de la estructura de dependencia de la variable L , se vio sesgado para el cálculo del Requerimiento de Capital por Riesgos Financieros y de Seguros RC_{TyFS} . La razón es que usamos datos de mercado y fue necesario fijar un umbral. Es decir, trabajamos con los índices de severidad más grandes del mercado. A pesar de esto, gracias a la captura de dependencia entre los diversos ramos, pudimos ver que el $VaR_{99.5}$ obtenido nos dice que la máxima pérdida que no excederá 0.9948. O sea que tendremos pérdidas casi equivalentes a la prima promedio. De aquí se sigue que podemos inferir no tendremos una sobreestimación sobre lo que se puede perder.

5. CONCLUSIONES Y POSIBLES EXTENSIONES

En este trabajo, hemos podido demostrar que la modelación de una distribución multivariada de alta dimensión se puede realizar utilizando cópulas, gracias a la versatilidad que nos dan modelos como las viñas. En particular, utilizamos esto para modelar los riesgos de los distintos tipos de seguros para así estimar la exposición total al riesgo. En este contexto, los riesgos de los distintos tipos seguros están determinados por los reclamos por unidad de prima promedio pagada por los asegurados y representados por los índices de severidad. Lo que es más importante, la cópula se puede utilizar para agregar diferentes pérdidas marginales de las líneas de negocios de seguros con cualquier estructura de dependencia posible.

Desde la perspectiva del esquema regulatorio de Solvencia II, es importante estimar las pérdidas del negocio

de seguros, para así realizar una correcta estimación del Requerimiento de Capital de Solvencia. En particular, a través de una medida de riesgo, por ello desde el punto de vista matemático, vimos este requerimiento de capital como una medida de riesgo, exploramos las propiedades de una medida de riesgo coherente que es un elemento importante para obtener una buena estimación del riesgo de seguro.

En este trabajo, pudimos realizar el modelo de estructura de dependencia para las doce líneas de negocio que componían nuestros datos. Por otro lado, debido a la atemporalidad de nuestros datos, nos percatamos que no era ideal ajustar un D -viña. Por ello, ajustamos solamente una R -viña y una C -viña. En particular, nos percatamos que los riesgos del negocio de seguros representados por los índices de severidad son adecuados para modelar mediante la mezcla de cópulas de las familias de cópulas arquímedicas. Esto incluye la cópula de Clayton, Gumbel y Frank y sus distintas formas, es decir cópulas rotadas y de supervivencia.

Nuestro objetivo específico fue presentar una nueva metodología para el cálculo del Requerimiento de Capital por Riesgos Técnicos y financieros. Basamos la metodología en la agregación de la variable de pérdida L , y fue una modelación de la estructura de dependencia de los riesgos agregados. Debido al alcance de este trabajo, limitamos nuestra modelación a doce tipos de seguros y obtuvimos los datos de mercado. Sin embargo en el caso de que el análisis se aplique a una compañía de seguros en particular, deberíamos considerar las siguientes casos.

1. Considerar una cálculo de índice de severidad como:

$$\text{Índice de Severidad}_i = \frac{\text{Monto de Sinistros}_i}{\text{Primas}_i}$$

2. Un análisis de series de tiempo, sobre los datos. La justificación es que los seguros tienden a tener temporadas en la que las reclamaciones son mayores. Esto hace que los datos no sean independientes e idénticamente distribuidos, es decir el análisis de la estructura de dependencia se pueda sesgar debido a la autocorrelación que puedan tener los datos. Para ello se debería trabajar con los residuales de las series de tiempo. En particular recomendamos los modelos ARMA y GARCH.
3. En lugar de usar τ de Kendall como la medida en nuestro método secuencial, se recomendarían medidas de dependencia en colas (o también conocidas como medidas de dependencia extrema).



REFERENCIAS

- Aas, K., C. Czado, A. Frigessi, and H. Bakken, 2009 Pair-copula constructions of multiple dependence. *Insurance: Mathematics and Economics* **44**: 182–198.
- Akaike, H., 1973 Information theory and an extension of the maximum likelihood principle.
- Basle Committee, 1982 *Management of Banks: International Lending*. Publications, B.C.
- Bedford, T. and R. M. Cooke, 2002a *Vines - a new graphical model for dependent random variables*. *Annals of Statistics*.
- Bedford, T. J. and R. M. Cooke, 2002b Vines—a new graphical model for dependent random variables. *Annals of Statistics* **30**: 1031–1068.
- Cooke, R. and D. Kurowicka, 2006 *Uncertainty Analysis With High Dimensional Dependence Modelling*.
- Dissmann, J., E. Christian Brechmann, C. Czado, and D. Kurowicka, 2012 Selecting and estimating regular vine copulae and application to financial returns. *Computational Statistics & Data Analysis* **59**.
- Durante, F., 2010 *Copula Theory and Its Applications*.
- Embrechts, P. and A. Mcneil, 2002 *Correlation and dependence in risk management: Properties and pitfalls*. Cambridge University Press.
- Genest, C. and A.-C. Favre, 2007 Everything you always wanted to know about copula modeling but were afraid to ask. *Journal of Hydrologic Engineering - J HYDROL ENG* **12**.
- Haff, I. H. and J. Segers, 2015 Nonparametric estimation of pair-copula constructions with the empirical pair-copula. *Computational Statistics & Data Analysis* **84**: 1–13.
- Joe, H., 1996 Families of m -variate distributions with given margins and $m(m - 1)/2$ bivariate dependence parameters. In *Distributions with fixed marginals and related topics*, edited by L. Rüschendorf, B. Schweizer, and M. D. Taylor, volume 28 of *Lecture Notes–Monograph Series*, pp. 120–141, Institute of Mathematical Statistics.
- Joe, H., 1997 *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman and Hall, London, UK.
- Kastelijn, W., 1986 *Solvency, Surveys of Actuarial Studies 3*. Nationale-Nederlanden N.V., Rotterdam, Netherlands.
- Klugman, S. A., H. H. Panjer, and G. E. Willmot, 2019 *Loss Models: From Data to Decisions*. Society of Actuaries.
- Morales Napoles, O., R. Cooke, and D. Kurowicka, 2016 About the number of vines and regular vines on n nodes. Working paper pp. 1–18.
- Müller, H., 1997 *Report: Solvency of Insurance undertakings: conference of Insurance Supervisory Authorities of the member states of the European Union*. European Economic

- Community.
- Nelsen, R. B., 2006 *An Introduction to Copulas*. Springer, Nueva York.
- Paul Embrechts, D. S., Er Mcneil, 1999 Correlation: Pitfalls and alternatives. Discussion paper .
- Schwarz, S. L., 2008 Systemic risk. *Duke Law School Legal Studies* **97**.
- Sklar, A., 1959 Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris* **8**: 229–231.



Eric Daniel Hernández Jardón es actuario con especialidad en estadística aplicada por la UNAM, labora en el sector asegurador creando estudios Actuariales especializados, como tablas de mortalidad bajo un enfoque bayesiano, estudios de experiencia (cancelación y suspensión de pago), modelos de Machine Learning utilizando diversas herramientas como Python y R, y apoyando en el desarrollo de tarificación de diversos productos: Autos, Gastos Médicos, etc. También es profesor adjunto en la Facultad de Ciencias, UNAM, impartiendo materias relacionadas con seguros, e impartido cursos especializados de seguros avalados por CONAC: PSD con R, Cópulas con R, etc.

Machine Learning utilizando diversas herramientas como Python y R, y apoyando en el desarrollo de tarificación de diversos productos: Autos, Gastos Médicos, etc. También es profesor adjunto en la Facultad de Ciencias, UNAM, impartiendo materias relacionadas con seguros, e impartido cursos especializados de seguros avalados por CONAC: PSD con R, Cópulas con R, etc.



La Facultad de Ciencias Actuariales de la Universidad Anáhuac México te invita a participar como ponente en sus sesiones mensuales de:

VISIÓN ACTUARIAL SOBRE LA INNOVACIÓN, LA INVESTIGACIÓN Y EL DESARROLLO



Todos los viernes de cada mes

Vale por horas de Educación Continua del CONAC

**Facultad de
Ciencias Actuariales**

Informes:
Dr. Daniel López Barrientos
daniel.lopez@anahuac.mx
anahuac.mx/mexico

VAIID
VISIÓN ACTUARIAL SOBRE LA
INNOVACIÓN, LA INVESTIGACIÓN Y
EL DESARROLLO

- **Afores - INFONAVIT - IMSS**
- **Seguros**
- **Pensiones**
- **Certificación en Estándares de Competencia Laboral CONOCER**
- **Aula Virtual - Capacitación**

 55 8055 4463

www.actuariayfinanzas.net

Contacto:
webmaster@actuariayfinanzas.net



Silver
Business
Partner



Estudia la Maestría en Riesgo o la Maestría en Estadística con beca

Inicia: enero 2023



CONACYT
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología



El CONACYT apoya a sus becarios con **4.5 UMA mensuales** por hasta 24 meses. (\$13,162.90 en pesos de 2022)

La convocatoria abre en febrero 2023

EDITOR EN JEFE

José Daniel López Barrientos

CONSEJO EDITORIAL

Alejandro Turner Hurtado

Elsa Lorena González Franyutti

Francisco Javier de la Peña Olea

Mauricio Gabriel Arredondo Fernández Cano

Martha Guadalupe Pichardo Rojas

EDITORES ASOCIADOS

Lourdes Díez-Gutiérrez Igartua

Rodica Simón Sauri

Gonzalo González Rojas

Aldo Martínez Arias

Dafne Mendoza Ramos

José Manuel Mendoza Madrid

Ingrid Montserrat Bárcenas Hernández

CORRECCIÓN DE ESTILO

Ana Pamela Flores Herrera

DISEÑO GRÁFICO

Priscilla Camargo Bacha

Prof. Miguel Serrano 21 PH.
Col. Del Valle Centro, 03100. CDMX
info@conacmexico.org.mx.

ISSN / DOI EN TRÁMITE
ENERO 2023 - NÚMERO 13



COLEGIO
NACIONAL
DE ACTUARIOS

MÉXICO