



COLEGIO  
NACIONAL  
DE ACTUARIOS

# ACTUARIOS TRABAJANDO

REVISTA MEXICANA DE INVESTIGACIÓN ACTUARIAL APLICADA

$q_x$

$\mu_x$

$d_x$

${}_tV_x$



$A_x$

$l_x$

$\ddot{a}_x$

$p_x$

# Tabla de Contenidos

<b>Carta editorial del presidente</b>	<b>4</b>
---------------------------------------	----------

## ANUNCIOS A LA MEMBRESÍA

<b>Modelando el futuro</b>	<b>9</b>
----------------------------	----------

Andrea Guerrero Domínguez y Regina Montero López

<b>50 años de Actuaría en Acatlán</b>	<b>14</b>
---------------------------------------	-----------

Luz María Lavín Alanís y Liliana Sandoval Luna

## ACTUARIOS TRABAJANDO

<b>Modelación empírica de la mortalidad en México mediante el método de suavizamiento polinómico por nodos</b>	<b>19</b>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------

Erick Morales Bonilla y Denise Gómez Hernández

<b>Diseño de un seguro de gastos médicos para los beneficiarios de la Cruz Roja</b>	<b>37</b>
-------------------------------------------------------------------------------------	-----------

Mariel Pérez Villagrán y Diego Oliver Azuela

<b>Análisis del Supuesto de Rotación</b>	<b>51</b>
------------------------------------------	-----------

Ana Ma. del Pilar Montes Sánchez, César Adrián Hernández Viveros, Carmen Licona

Barajas, José Miguel Hernández Martínez y Roberto Ángel Rocha López

## ESTUDIANTES TRABAJANDO

**Gestión de riesgo de tasa en una reserva de mercado de seguros dotales puros vía swaps bajo procesos de Liu** 75

David Sánchez Herrera

## PROFESORES TRABAJANDO

**Guía del tatuador para usar símbolos matemáticos** 106

Mario A. García Meza

**The day when risk theory prevented a *Civil War*** 116

José Daniel López Barrientos

**POSGRADOS, CURSOS Y TALLERES** 134





**EDITOR EN JEFE**

José Daniel López Barrientos

**CONSEJO EDITORIAL**

Mauricio Gabriel Arredondo Fernández Cano

Francisco Javier Ruíz de la Peña Olea

Anayelli Montagner Miranda

Daniel Alexis Cárdenas Hernández

Martha Guadalupe Pichardo Rojas

**EDITORES ASOCIADOS**

Elsa Lorena González Franyutti

María de Lourdes Díez Gutiérrez Igartúa

Claudia Feria Cuevas

Carmen Fernández Robles

Verónica González Vázquez

Robert Hernández Martínez

James Edward Marin Noriega

**CORRECCIÓN DE ESTILO**

Ana Pamela Flores Herrera

**DISEÑO GRÁFICO**

Priscilla Camargo Bacha

ACTUARIOS TRABAJANDO, volumen 18, julio-diciembre 2025, es una publicación semestral editada por el **Colegio Nacional de Actuarios A.C.** Calle Prof. Miguel Serrano 21 int. PH1 (planta 9). Col. Del Valle. CP03100. Tel. (55) 5559 2903. <https://conacmexico.org.mx/>.

Editor responsable: Dr. José Daniel López Barrientos. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo no. 04-2024-052914242500-102. ISSN: 3061-7146. Ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este número: Colegio Nacional de Actuarios, Dr. José Daniel López Barrientos. Calle Prof. Miguel Serrano 21 int. PH1 (planta 9). Col. Del Valle. CP03100. Fecha de última modificación: junio de 2025.

# Comparte tu experiencia en Actuarios Trabajando



---

**Actuarios Trabajando** es una revista hecha por actuarios, con actuarios y para actuarios, y está abierta a recibir tus aportaciones profesionales con tu sello personal.

Queremos conocer tus ideas, tus investigaciones y tus experiencias. Esta es tu oportunidad de que tu voz profesional sea escuchada y tus trabajos sean compartidos con colegas del gremio.

Además, si eres actuario certificado, podrás obtener horas de educación continua por cada contribución aceptada.

---

**¡Participa y haz que tu conocimiento impulse a la comunidad actuarial!**



Envía tus contribuciones a alguno de los miembros del Consejo Editorial, o escribe por correo-e a: [info@conacmexico.org.mx](mailto:info@conacmexico.org.mx)



# SEMINARIO RETIRO Y SALUD 2025

"Construyendo Bienestar  
para la Vejez"



Asociación Mexicana de  
Actuarios Consultores, A.C.

## 2 SEP 2025

9:00 a 14:00 hrs

Evento Virtual por Zoom

**\$600.00** + IVA  
Público General

**\$250.00** + IVA  
Estudiantes

**\$500.00** + IVA  
AMAC / CONAC / AMA



**Registro:**

[informes@amac.mx](mailto:informes@amac.mx)



[www.seminarioretiroysalud.mx](http://www.seminarioretiroysalud.mx)

Evento patrocinado por:



**5HEC\***

\*El registro de las horas de Educación Continua para el CONAC las pagará el interesado

# ANUNCIOS A LA MEMBRESÍA

## Modelando el futuro

Andrea Guerrero Domínguez y Regina Montero López



## Modelando el futuro

Andrea Guerrero Domínguez<sup>\*,1</sup> y Regina Montero López<sup>\*</sup>

\*Universidad Anáhuac México

**RESUMEN** “Para que la próxima vez que alguien nos pregunte que si actuamos, le digamos que sí, y que lo hacemos muy bien. ¡Porque somos nosotros quienes estamos modelando el futuro!” — Emanuell Pérez, Presidente de la Sociedad de Alumnos de Actuaría, 2025.

### Palabras clave

Eventos académicos

El pasado 13 de febrero del presente año, se celebró el día del actuario con un congreso interuniversitario organizado por alumnos y para alumnos en la Universidad Anáhuac Sur. Desde el inicio de nuestra gestión como sociedad de alumnos, Emmanuell Pérez nos propuso un reto: organizar uno de los eventos más grandes de Actuaría, un Congreso Actuarial (vea la figura 1). Lo que comenzó como una idea discutida en reuniones se convirtió en una realidad gracias a la pasión y el compromiso de los 30 miembros activos de la sociedad, así como al apoyo de los alumnos de nuestra Universidad. El verdadero desafío fue convocar y reunir a estudiantes de algunas de las principales universidades de nuestro país, como lo son la Universidad Anáhuac México, La Universidad Iberoamericana, el Instituto Tecnológico Autónomo de México, la Universidad del Verbo

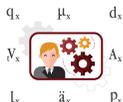
Encarnado, la Universidad La Salle, El Centro Universitario Marista, la Universidad Nacional Autónoma de México, la Universidad Autónoma de Yucatán, la Universidad del Fútbol y Ciencias del Deporte. Asimismo, logramos la participación de la Confederación de Asociaciones de Agentes Aduanales de la República Mexicana y de los miembros de los capítulos universitarios de la Confederación Patronal de la República Mexicana.

El objetivo del evento fue brindar a los estudiantes un espacio de aprendizaje y conexión profesional, dividiendo el congreso en los dos grandes temas del campo actuarial: seguros y finanzas. Contamos con la presencia de ponentes excepcionales que marcaron la diferencia en esta primera edición y, además, tuvimos el honor de recibir a destacados actuarios reconocidos por diversas instituciones como la Asociación Mexicana de Actuarios, el Colegio Nacional de Actuarios y Actuarios por México, quienes asistieron como invitados especiales. Agradecemos especialmente la presencia y el apoyo de la Dra. Lourdes Diez Gutiérrez y de la Mtra. María del Carmen Marce, Directora y Coordinadora Académica de la Facultad de Ciencias Actariales, respectivamente.

Derechos reservados © 2025 por el Colegio Nacional de Actuarios  
Última actualización del manuscrito: 23 de mayo de 2025

La visión y comentarios contenidos en este documento corresponden exclusivamente a su autor y, por tanto, son ajenos a cualquier entidad pública o privada, incluyendo aquella para la que actualmente colabora. El CONAC no recomienda ni respalda el uso de la información proporcionada en este estudio. El CONAC no ofrece ninguna garantía, expresa o implícita, ni representación de ningún tipo y no asume ninguna responsabilidad en relación con el uso o mal uso de este trabajo.

<sup>1</sup> Correo electrónico: [andrea.guerrero04@anahuac.mx](mailto:andrea.guerrero04@anahuac.mx)





**Figura 1** Emanuell Pérez en la inauguración del evento.

Cada una de las conferencias fue clave para el desarrollo de los más de 250 universitarios presentes. Iniciamos con el Mtro. Francisco Martínez, director de Inversiones en Afore Coppel, quien realizó un análisis sobre el Sistema de Ahorro para el Retiro (vea la figura 2).



**Figura 2** El Mtro. Francisco Martínez, director de Inversiones en Afore Coppel.

Luego, el Mtro. Óscar Garza (Director Ejecutivo de Journey Sports) destacó el impacto de la InsurTech en la digitalización y optimización del sector asegurador. Vea la figura 3.

Para finalizar con estos temas, tuvimos la presencia de Omar López (fundador y Director Ejecutivo de Clup), quien compartió su visión sobre la transformación del sector asegurador mediante inteligencia artificial, *blockchain* y cómputo cuántico. Vea la figura 4.

Por su parte, Tania Rodríguez y Jessica Aguilar (administradoras principales de pequeñas y medianas empresas en BBVA) presentaron los avances en digitalización y financiamiento de este sector clave para la economía mexicana, además de dar primicias de nuevos productos. Vea la figura 5.

Asimismo, Vinicio Álvarez (*Head of Debt Capital Markets* en Scotiabank) ofreció un panorama sobre el mercado de



**Figura 3** El Mtro. Óscar Garza, Director Ejecutivo de Journey Sports.



**Figura 4** El Act. Omar López, fundador y Director Ejecutivo de Clup.



**Figura 5** Tania Rodríguez y Jessica Aguilar, administradoras principales de pequeñas y medianas empresas en BBVA.

deuda en México, resaltando las principales tendencias en financiamiento y la creciente adopción de criterios ambiental, social y de buen gobernanza. Vea la figura 6.

Finalmente, Salvador Nieto, director y *portfolio manager*





**Figura 6** Vinicio Álvarez, *Head of Debt Capital Markets* en Scotiabank.

en BlackRock, así como profesor de nuestra Facultad, cerró el evento con una ponencia en la que comparó los momentos de la vida con los de una distribución de probabilidad. Vea la figura 7.



**Figura 7** Salvador Nieto, director y portfolio manager en BlackRock.

Este congreso llegó a su fin, pero nos dejó un sentimiento de satisfacción y orgullo. Saber que ya hay quienes han levantado la mano para ser la siguiente sede confirma que este es apenas el inicio de una tradición que trascenderá en el tiempo y el gremio. Esperemos con ansia la siguiente edición de “Modelando el Futuro” de la mano de la Universidad Marista, a quienes les queda mucho trabajo por hacer y retos que cumplir, pero de algo estoy segura: como actuarios, sabrán detectar riesgos, manejar la incertidumbre y sobre todo, modelar el futuro.



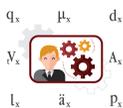
**Andrea Guerrero Domínguez** es estudiante de sexto semestre de la Licenciatura en Actuaría en la Universidad Anáhuac México. Actualmente se desempeña como Coordinadora General de la Sociedad de Alumnos de Actuaría en el campus Sur de la Anáhuac México, labor por la cual ha sido nominada a la distinción de Mejor Coordinación por parte de Relaciones Estudiantiles. Como parte de su formación integral, está por graduarse del programa de liderazgo Genera, obteniendo dos diplomas:

uno en Liderazgo Empresarial y otro en Tecnología en los Negocios. Cuenta con un diplomado en Liderazgo y Gestión de Equipos, el cual ha fortalecido sus habilidades para la dirección y coordinación efectiva de proyectos y equipos de trabajo. Andrea también destaca en el ámbito deportivo como atleta de alto rendimiento, representando a la Universidad Anáhuac México en competencias de nivel nacional. Anteriormente formó parte del equipo representativo del Instituto Politécnico Nacional, lo que le brindó la oportunidad de integrarse a la preselección nacional en su disciplina. Comprometida con el entorno social y ambiental, colabora los fines de semana y durante el verano en actividades de reforestación y en la organización de visitas guiadas para niños y adultos, con el objetivo de fomentar la conciencia sobre el cuidado del medio ambiente.



**Regina Montero López** es una joven universitaria apasionada por la comunicación y el poder que tienen las palabras e imágenes para transformar realidades. Estudia la carrera de Comunicación en la Universidad Anáhuac, donde ha desarrollado proyectos que combinan el análisis social, la creatividad y una profunda sensibilidad humana. Regina se distingue por su compromiso con las causas que le importan —como la educación, la fe, la empatía y la justicia— y por su capacidad para conectar con los demás desde la ver-

dad y el corazón. Con un interés especial por la fotografía, la creatividad se, la narrativa visual y la expresión espiritual, ha participado en iniciativas que van desde la creación de contenido para pastoral universitaria hasta el análisis crítico de fenómenos mediáticos contemporáneos. Su meta es clara: comunicar con propósito, con fe y con sentido.





# ANUNCIOS A LA MEMBRESÍA

## 50 años de Actuaría en Acatlán

Luz María Lavín Alanís y Liliana Sandoval Luna

DOI:



COLEGIO  
NACIONAL  
DE ACTUARIOS

## 50 años de Actuaría en Acatlán

Luz María Lavín Alanís\* y Liliana Sandoval Luna\*

\*Universidad Nacional Autónoma de México

**RESUMEN** Este documento conmemora los 50 años de la licenciatura en Actuaría en la Facultad de Estudios Superiores (FES) Acatlán, destacando su evolución, impacto académico y profesional, y su compromiso con la formación de actuarios altamente capacitados. La carrera inició en 1974 con 54 alumnos y ha crecido de manera significativa hasta alcanzar una matrícula actual de 1,441 estudiantes. Durante este tiempo, se han formado 51 generaciones, con casi 4,000 egresados y más de 2,600 actuarios titulados, lo que representa cerca del 25% de los profesionistas en esta área en México.

La licenciatura ha atravesado cuatro planes de estudio, adaptándose continuamente a los estándares internacionales, como los establecidos por la Asociación Actuarial Internacional. Se imparte con el respaldo de una planta docente de 94 profesores, muchos de ellos egresados de la misma carrera. Además, cuenta con la acreditación de los Comités Interinstitucionales para la Evaluación de la Educación Superior (CIEES), garantizando su calidad educativa.

Más allá del rigor académico en matemáticas, estadística, probabilidad y cálculo actuarial, la carrera ha fomentado valores como la solidaridad, el compañerismo y la ética profesional. Su ubicación dentro de una institución multidisciplinaria como la UNAM ha permitido una formación integral, socialmente comprometida y accesible.

### Palabras clave

Numeralia Acatleca, perfil profesional, validación de estudios profesionales.



Derechos reservados © 2025 por el Colegio Nacional de Actuarios

Última actualización del manuscrito: 1 de julio de 2025

Artículo formateado por Diego Bezai Nava Ramos, y comunicado por José Daniel López Barrientos. La visión y comentarios contenidos en este documento corresponden exclusivamente a su autor y, por tanto, son ajenos a cualquier entidad pública o privada, incluyendo aquella para la que actualmente colabora. El CONAC no recomienda ni respalda el uso de la información proporcionada en este estudio. El CONAC no ofrece ninguna garantía, expresa o implícita, ni representación de ningún tipo y no asume ninguna responsabilidad en relación con el uso o mal uso de este trabajo.

## 1. INTRODUCCIÓN

La licenciatura de Actuaría inició sus actividades académicas en 1974, en la naciente Escuela Nacional de Estudios Profesionales Acatlán, con 54 alumnos, siendo su Director el licenciado Raúl Béjar Navarro y el Rector de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) el Doctor Guillermo Soberón Acevedo. Se enfrentaban retos muy complejos y la evaluación y cuantificación de los riesgos que se presentaban era fundamental, por lo que la formación de especialistas en esta área de conocimiento era indispensable.

Gracias a su formación en cálculo actuarial, probabilidad, estadística, finanzas y seguros, el actuario desarrollaba las competencias necesarias para diseñar estrategias que ofrecieran protección ante este tipo de contingencias y minimizaran sus efectos. Cuando actuaría comenzó en la FES Acatlán, la carrera se impartía únicamente en dos instituciones educativas: La Facultad de Ciencias de la UNAM y la Universidad Anáhuac.



## 2. Y A LO LARGO DE 50 AÑOS...

- 51 generaciones
- 9,748 alumnos han ingresado
- 3,928 alumnos han egresado
- 2,646 se han titulado, lo que representa cerca del 25 % de actuarios titulados en México.

- Cuatro planes de estudio se han implementado en la licenciatura, iniciando con el que se impartía en la Facultad de Ciencias de la UNAM, encontrándose en proceso de aprobación un nuevo plan de estudios, cumpliendo con los lineamientos del Syllabus vigente de la Asociación Actuarial Internacional y que permita desarrollar sus actividades en el ejercicio profesional y de investigación a los futuros egresados, manteniendo el prestigio y la calidad académica que han caracterizado a los actuarios de Acatlán.



La licenciatura cuenta con el reconocimiento oficial de los CIEES, lo que avala su calidad académica. Desde la graduación de su primera generación, el programa ha experimentado un notable crecimiento del 500 %, reflejo del interés y la confianza que ha generado entre los estudiantes. Su cuerpo docente está conformado por 94 profesores con una sólida preparación académica y profesional, muchos de los cuales son egresados de la misma carrera, lo que fortalece el sentido de identidad y compromiso con la formación de nuevas generaciones.

En las aulas de esta licenciatura, los estudiantes no sólo se forman en disciplinas como matemáticas, probabilidad, estadística y cálculo actuarial, sino que también desarrollan valores fundamentales como la amistad y el compañerismo. Aunque se trata de una carrera exigente y de alta competencia, el ambiente se caracteriza por el respaldo mutuo y la solidaridad entre compañeros. Además, al formar parte de la FES Acatlán, los alumnos tienen la posibilidad de estudiar en un entorno multidisciplinario. Esto enriquece su formación al permitirles abordar los temas desde diversas perspectivas y con un enfoque integral.

Las autoridades de esta Facultad han reafirmado su compromiso con la formación de actuarios altamente capacitados dentro de una institución pública de excelencia. En la UNAM —el proyecto educativo más sólido y trascendental del país—



se promueve una preparación integral, con sólidos principios éticos y una clara responsabilidad social. En este contexto, resulta fundamental continuar consolidando y fortaleciendo la licenciatura en Actuaría en la FES Acatlán, como un referente en la formación de profesionales comprometidos con los retos actuales y futuros de la sociedad.

### 3. CINCUENTA AÑOS FORMANDO ACTUARIOS CON COMPROMISO Y EXCELENCIA

A lo largo de cinco décadas, la licenciatura en Actuaría en la Facultad de Estudios Superiores Acatlán ha enfrentado el desafío constante de consolidarse como un programa académico de excelencia. Este compromiso nos impulsa a seguir fortaleciendo la carrera y, al mismo tiempo, a contribuir activamente al desarrollo del gremio actuarial mediante la formación de capital humano altamente calificado.

Nuestro profundo reconocimiento es para el cuerpo docente, cuya labor va más allá de la transmisión del conocimiento: son mentores que comparten experiencias significativas que enriquecen la formación profesional y personal de cada estudiante. Su dedicación representa uno de los pilares más sólidos de nuestra comunidad académica.

Agradecemos a los equipos académico-administrativos que, con su entrega y profesionalismo, han sido pieza clave en la consolidación del programa. Gracias a su trabajo, se ha fortalecido la vinculación con el sector productivo, generando oportunidades laborales para nuestros egresados y ampliando el impacto de nuestra carrera en el ámbito profesional.

Hoy más que nunca, reafirmamos nuestro compromiso de seguir impulsando el crecimiento de esta licenciatura, de nuestra Facultad y de nuestra Universidad. Porque ser parte de esta comunidad es motivo de orgullo: ¡somos UNAM, somos Acatlán, y somos Actuaría!



**Luz María Lavín Alanís** es actuaría egresada de la FES Acatlán de la UNAM. Cuenta con estudios de posgrado en la misma institución, donde obtuvo el grado de Maestra en Ingeniería con especialización en Planeación, por la Facultad de Ingeniería. Con una trayectoria docente de más de cuatro décadas, se desempeña como Profesora Titular .<sup>A</sup> de

tiempo completo en la FES Acatlán, impartiendo asignaturas en las áreas de Probabilidad, Estadística, Seminarios de Investigación y Titulación, en las licenciaturas en Actuaría y Matemáticas Aplicadas y Computación. Es autora del libro Probabilidad: Curso Introductorio, y coautora de varias obras de la UNAM Digital. En el ámbito profesional, ha ocupado



diversos cargos de alta responsabilidad. Fue Coordinadora de Área en la Gerencia de Desarrollo Regional de Petróleos Mexicanos, Jefa de Oficina y ayudante técnico en la Gerencia de Control Presupuestal del Banco Nacional de Crédito Rural, donde participó en la implementación de modelos financieros; y técnica actuarial en el Departamento Actuarial del Instituto Mexicano del Seguro Social, contribuyendo a las valuaciones actuariales de reservas y pasivos contingentes. Además, fue Directora General de Distribuciones de la Frontera, liderando funciones de planeación, administración y análisis de mercado. En la FES Acatlán ha desempeñado funciones de liderazgo académico como Coordinadora de las licenciaturas en Actuaría y Matemáticas Aplicadas y Computación. Actualmente, ocupa el cargo de Jefa de la División de Matemáticas e Ingeniería, donde continúa impulsando la excelencia académica y la formación integral de las nuevas generaciones.



**Lilita Sandoval Luna** es una profesional comprometida con la formación integral de nuevas generaciones de actuarios, así como con la innovación en la enseñanza de las ciencias actuariales. Es actuaría egresada de la FES Acatlán de la UNAM, donde obtuvo su título con mención honorífica. Cuenta con estudios de Maestría en Administración y está certificada en Liderazgo Efectivo para Proyectos de Alto Impacto. Actualmente se desempeña como Coordinadora de la licenciatura en Actuaría en la FES Acatlán, UNAM, función desde la cual impulsa la excelencia académica y fortalece la vinculación con el sector profesional. A lo largo de su trayectoria, ha combinado una sólida experiencia en el ámbito actuarial con una destacada labor académica. En el sector asegurador, ha ocupado puestos estratégicos en empresas como Seguros Monterrey Aetna y Grupo Nacional Provincial, participando en el diseño de productos, análisis de rentabilidad y la formulación de estrategias técnicas y comerciales. En 2007, fue reconocida con el segundo lugar a nivel nacional en el XIV Premio de Investigación sobre Seguros y Fianzas, otorgado por la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas, distinción que refleja la calidad y profundidad de su trabajo en el área. Desde 2003, ha impartido cátedra en la FES Acatlán, promoviendo la investigación aplicada y el desarrollo de competencias profesionales en el campo actuarial. Asimismo, forma parte del cuerpo docente de la Universidad Anáhuac México. Su enfoque pedagógico se distingue por la incorporación de tecnologías educativas y metodologías activas de aprendizaje, con énfasis en el pensamiento crítico, la resolución de problemas y la aplicación práctica del conocimiento en contextos financieros, aseguradores y matemáticos.

Actualmente se desempeña como Coordinadora de la licenciatura en Actuaría en la FES Acatlán, UNAM, función desde la cual impulsa la excelencia académica y fortalece la vinculación con el sector profesional. A lo largo de su trayectoria, ha combinado una sólida experiencia en el ámbito actuarial con una destacada labor académica. En el sector asegurador, ha ocupado puestos estratégicos en empresas como Seguros Monterrey Aetna y Grupo Nacional Provincial, participando en el diseño de productos, análisis de rentabilidad y la formulación de estrategias técnicas y comerciales. En 2007, fue reconocida con el segundo lugar a nivel nacional en el XIV Premio de Investigación sobre Seguros y Fianzas, otorgado por la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas, distinción que refleja la calidad y profundidad de su trabajo en el área. Desde 2003, ha impartido cátedra en la FES Acatlán, promoviendo la investigación aplicada y el desarrollo de competencias profesionales en el campo actuarial. Asimismo, forma parte del cuerpo docente de la Universidad Anáhuac México. Su enfoque pedagógico se distingue por la incorporación de tecnologías educativas y metodologías activas de aprendizaje, con énfasis en el pensamiento crítico, la resolución de problemas y la aplicación práctica del conocimiento en contextos financieros, aseguradores y matemáticos.



# ACTUARIOS TRABAJANDO

## **Modelación empírica de la mortalidad en México mediante el método de suavizamiento polinómico por nodos**

Erick Morales Bonilla y Denise Gómez Hernández

DOI:



COLEGIO  
NACIONAL  
DE ACTUARIOS

# Modelación empírica de la mortalidad en México mediante el método de suavizamiento polinómico por nodos

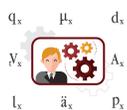
Erick Morales Bonilla\* y Denise Gómez Hernández\*,<sup>1</sup>

\*Universidad Autónoma de Querétaro

**RESUMEN** Este estudio presenta una estimación empírica de la mortalidad en México mediante el uso del método de suavizamiento polinómico por nodos, aplicado a registros de defunciones de 2012 a 2021. A través de una depuración de más de 7.5 millones de datos del INEGI, se construyeron tablas de vida diferenciadas por sexo, utilizando modelos de suavizamiento para estimar funciones de supervivencia y fuerza de mortalidad con mayor precisión que los modelos tradicionales. Los resultados muestran diferencias significativas respecto a las tablas oficiales EMSSAH-09 y EMSSAM-09 utilizadas por la Comisión Nacional de Seguros y Fianzas, detectadas mediante la prueba Kolmogorov-Smirnov. La investigación sugiere que estas tablas podrían subestimar la mortalidad actual. Además, se destaca la flexibilidad del modelo propuesto, la ventaja del procesamiento computacional moderno y su potencial para aplicarse a subgrupos específicos de población. No obstante, se reconoce como limitación la selección arbitraria del periodo de análisis y la posibilidad de incorporar otras metodologías o niveles de desagregación. Finalmente, el estudio aporta una herramienta metodológica accesible para generar estimaciones demográficas más precisas, promoviendo así la mejora continua de la práctica actuarial en México.

## Palabras clave

Tablas de vida, Suavizamiento por splines, Modelación empírica, Seguridad social.



Derechos reservados © 2025 por el Colegio Nacional de Actuarios  
Última actualización del manuscrito: 4 de junio de 2025

Artículo formateado por Kristian Frich Villaseñor, y comunicado por José Daniel López Barrientos. La visión y comentarios contenidos en este documento corresponden exclusivamente a su autor y, por tanto, son ajenos a cualquier entidad pública o privada, incluyendo aquella para la que actualmente colabora. El CONAC no recomienda ni respalda el uso de la información proporcionada en este estudio. El CONAC no ofrece ninguna garantía, expresa o implícita, ni representación de ningún tipo y no asume ninguna responsabilidad en relación con el uso o mal uso de este trabajo.

## 1. INTRODUCCIÓN

El comportamiento de la mortalidad es un factor socioeconómico clave que permea en prácticamente todos los sectores de una población. De este comportamiento se derivan las probabilidades de muerte que, a su vez, fungen como la piedra angular para los cálculos actuariales. Uno de los primeros intentos por modelar las probabilidades de fallecimiento fueron las tablas de mortalidad. De acuerdo a [Forfar \(2004\)](#), algunos ejemplos de las leyes más utilizadas son las de De Moivre, Gompertz y Makeham. Sin embargo, según [Booth y Tickle \(2008\)](#), aunque estas propuestas se acercan más a un rigor matemático de forma simple, aún contienen cierto grado de subjetividad. Por esta razón, a medida que la teoría estadística continuó desarrollándose, se comenzaron a proponer modelos estocásticos modernos que pudieran explicar la relación entre las defunciones y otras variables demográficas de una manera más sustentada en la observación de las poblaciones.

En sus inicios, la construcción de una tabla de mortalidad era realizada mediante censos y encuestas dirigidas a un grupo específico de la población, con el propósito de registrar las defunciones del grupo. Sin embargo, dada la complejidad de los movimientos demográficos y la impracticabilidad de actualizar constantemente las tablas en uso, se comenzaron a buscar alternativas de construcción para las tablas. La Comisión Nacional de Seguros y Fianzas (CNSF), organismo responsable de aprobar y supervisar los seguros de pensiones en México, ha comenzado a incorporar modelos logísticos en la estimación y desarrollo de tablas de mortalidad para el sector asegurador [Ramírez et al. \(2000\)](#). En el documento “Comparativo de Metodologías para el cálculo de Tablas de Mortalidad de Pensiones”, la [Comisión Nacional de Seguros y Fianzas \(2022\)](#) también comparte otros procedimientos recomendados para pronosticar el comportamiento de la mortalidad, como el modelo de Lee-Carter, o un enfoque de series temporales mediante modelos autorregresivos.

Desde la instauración de la profesión actuarial, se han desarrollado incontables productos y mecanismos de transferencia de riesgo con el propósito de aminorar las repercusiones económicas que los individuos enfrentan debido a la incertidumbre de la mortalidad. Estas contramedidas operan en diversas dimensiones, abarcando desde lo microeconómico, mediante seguros de vida, por ejemplo, hasta lo macroeconómico, interviniendo en la seguridad social mediante los sistemas de pensiones. Por otro lado, este riesgo tiene una importancia igual o mayor para la entidad financiera que decide absorberlo, pues ésta debe cerciorarse de tener las facultades apropiadas de cumplir con las responsabilidades adquiridas, así como de contar con las técnicas actuariales adecuadas para tarificar, generar reservas,

e incluso reasegurarse; de ser necesario. Para [Contreras y Márquez \(2018\)](#), la relevancia de este punto se puede ver reflejada en la reciente implementación del proyecto Solvencia II, una iniciativa para revisar y modernizar la regulación de los sistemas financieros aseguradores a nivel internacional.

Es así que, la estabilidad financiera global depende en gran medida del correcto funcionamiento de este contexto, y uno de sus pilares fundamentales es precisamente el entendimiento y uso preciso del comportamiento de la mortalidad. A medida que se desarrollan las bases matemáticas que dan lugar a la ciencia actuarial, las metodologías utilizadas para estimar la mortalidad también han cambiado y evolucionado a lo largo del tiempo. Razón por la cual, es importante estimular y contribuir a este avance, explorando las posibles alternativas que existan para refinar estos procedimientos de estimación. En tanto que se incorporen técnicas de estimación más precisas, la capacidad de los actuarios para brindar seguridad a los asegurados y a las aseguradoras también aumentará significativamente.

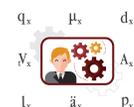
En otras palabras, el uso de los modelos actuales implica, de manera implícita, la aceptación del riesgo de no capturar completamente el verdadero comportamiento de las variables en estudio. No obstante, gracias a los avances en la capacidad de procesamiento de las máquinas modernas, muchos de los cálculos necesarios para las estimaciones ahora pueden completarse en cuestión de segundos, lo que hace que el sacrificio previo resulte obsoleto.

Es por todo lo expuesto anteriormente, que el objetivo de este trabajo es estimar las probabilidades de muerte sobre la población de México mediante un modelo de suavizamiento polinómico por nodos (*Smoothing Splines*) que pueda ser contrastado con los métodos actuales de forma numérica. (Vea el trabajo de [Rice y Rosenblatt \(1983\)](#).)

## 2. ANTECEDENTES

### 2.1. Modelos de Suavizamiento

De acuerdo a [James et al. \(2013\)](#), los modelos de suavizamiento surgen como respuesta al deseo de modelar de manera precisa el comportamiento de una variable en estudio, logrando una imitación adecuada de sus patrones mientras se eliminan las perturbaciones que podrían considerarse como ruido. A pesar de que los análisis de regresión eran el enfoque preferido para establecer relaciones funcionales entre variables, se aspiraba a que el enfoque de suavizamiento incorporara una aproximación más flexible, dando lugar a metodologías innovadoras. No obstante, como se verá a continuación, se descubre que existe una relación estrecha entre los modelos de regresión lineal y el planteamiento de suavizamiento, siendo este último, un caso particular del primero.



<sup>1</sup>Correo electrónico: [denise.gomez@uaq.edu.mx](mailto:denise.gomez@uaq.edu.mx)

El análisis de regresión es una herramienta estadística que permite estudiar la relación entre dos o más variables, y así, poder inferir resultados. Según [Stanton \(2001\)](#), se suele atribuir el desarrollo de esta rama de la estadística a Karl Pearson, sin embargo, el concepto de regresión fue ideado originalmente por Francis Galton. De acuerdo a [Estepa et al. \(2012\)](#), a pesar de no utilizar los conocimientos estadísticos del momento, desarrollados por otros académicos como Gauss y Laplace, Galton introduce el concepto de correlación para auxiliarse en el estudio de la genética hereditaria, utilizando métodos estadísticos sencillos y empíricos.

En el estudio de [Stanton \(2001\)](#) se detalla cómo, a causa de la carencia de rigor matemático en el trabajo de Galton, Karl Pearson respaldó y formalizó sus ideas, ayudándose a su vez de otros académicos como Auguste Bravais, Adrien-Marie Legendre, entre otros, para desarrollar los aspectos algebraicos del análisis de regresión. Finalmente, Pearson publica su primer texto sobre el tema, titulado *Mathematical contributions to the theory of evolution*.

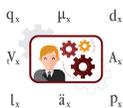
Es así como Isaac Jacob Schönberg propone la metodología de Suavizamiento por *splines* (vea la obra de [Rice y Rosenblatt \(1983\)](#)), la cual consiste en encontrar una relación funcional entre una variable objetivo  $Y$  y una variable predictora  $X$  que asemeje adecuadamente el comportamiento de la variable objetivo. Es decir, se desea una función cualquiera  $g(x)$  que logre un error cuadrático  $\sum_i (y_i - g(x_i))^2$  mínimo.

No obstante, sin imponer restricciones adicionales a  $g(x)$ , se puede proponer una función que imite en cada punto las observaciones  $y_i$ , minimizando el error cuadrático medio, pero ocasionando un sobre ajuste. Así, según [James et al. \(2013\)](#), la manera de considerar también la variabilidad de  $g(x)$  es mediante un componente extra,  $\lambda \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g''(t)^2 dt$ , el cual penaliza y regula la flexibilidad de la función  $g(x)$  encontrada. A medida que se incrementa el valor de  $\lambda$ , mayor es la penalización que se le da a cada ajuste dependiendo de qué tan “suave” es, vea (1).

$$\min \left\{ \sum_i (y_i - g(x_i))^2 + \lambda \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g''(t)^2 dt \right\}. \quad (1)$$

Así, con el espacio de funciones doblemente diferenciables, se está buscando aquella que logre obtener el mejor equilibrio entre imitar la variable  $Y$  y exhibir un comportamiento de baja variabilidad. A este modelo se le bautiza como Suavizamiento por Splines, al descubrir que la función  $g(x)$  que minimiza el cálculo es precisamente un *Spline Natural Cúbico* (de tercer orden) con  $n$  nodos, donde  $n$  denota el número de observaciones en la variable  $X$  (vea el trabajo de [Pollock \(1999\)](#)).

Como especifica [Varol et al. \(2020\)](#), un *Spline Natural Cúbico* es el resultado de una Regresión Polinómica por Partes



modificada. Es decir, si se desea ajustar un polinomio de tercer grado, a cada segmento de la variable  $X$ , dividida en  $k + 1$  intervalos (o equivalentemente,  $k$  nodos ubicados en  $\xi_i$ , para  $i = 1, \dots, k$ ). Entonces se deberán de considerar  $k + 1$  diferentes polinomios, cada uno con cuatro coeficientes de regresión, para un total  $4(k + 1)$  coeficientes de regresión en el modelo. Esta estructura de modelo recibe el nombre de “Regresión Polinómica por Partes” y su forma se puede ver en (2).

Aunque el modelo (2) goza de una gran flexibilidad, la curva ajustada resultante suele ser discontinua en los nodos, ocasionando un sobreajuste en el modelo. Para alcanzar un balance entre estos dos escenarios se añaden restricciones que garanticen una curva “suave”. Un “Spline de Regresión Polinómico” de tercer orden con  $k$  nodos, es una regresión polinómica por partes en donde la curva, y sus primeras dos derivadas son continuas en todos los nodos (vea el trabajo de [Neter y Wasserman \(1997\)](#)). Esta última condición no solo garantiza una curva “suave”, sino que también disminuye la cantidad de parámetros por estimar a  $k + 3$ . Aunque es posible generalizar el orden del polinomio que se ajusta en cada sección, [James et al. \(2013\)](#) comenta que se acostumbra a utilizar uno de tercer grado, y en su lugar aumentar o disminuir la cantidad de nodos utilizados para partir la variable  $X$ , variando así la flexibilidad del ajuste.

Finalmente, se obtiene un “Spline Natural Cúbico” al modificar los extremos del ajuste de un Spline de Regresión Polinómico; en el cual, en lugar de utilizar un polinomio en el primer y último segmento de  $X$ , se ajusta una línea. De acuerdo con [James et al. \(2013\)](#), este cambio permite corregir la divergencia que exhiben las funciones polinomiales en sus extremos.

La manera de obtener los valores para los coeficientes de regresión es completamente análoga al planteamiento de Regresión Lineal Múltiple, pues se ajusta una relación lineal en los extremos de  $X$  y en las secciones restantes, se ajusta una relación polinomial de la forma expuesta en (3), la cual se puede reescribir mediante las llamadas “funciones base” (citadas por [Neter y Wasserman \(1997\)](#)) que permiten modelar relaciones no lineales entre  $X$  y  $Y$ , compare con (4). La expresión (4), a su vez, se puede reescribir como (5) con la igualdad  $X_j = b_j(X) = X^j$ .

La expresión (5) corresponde a la estructura clásica de un modelo de Regresión Lineal Múltiple. [Neter y Wasserman \(1997\)](#) comentan las condiciones siguientes sobre esta ecuación:

- La variable  $\varepsilon$  es aleatoria, tal que

$$E(\varepsilon) = 0 \text{ y } \text{Var}(\varepsilon) = \sigma^2$$

es desconocida.

$$Y = \begin{cases} \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \varepsilon, & x < \xi_1, \\ (\beta_0 + \beta_4) + (\beta_1 + \beta_5)x + (\beta_2 + \beta_6)x^2 + (\beta_3 + \beta_7)x^3 + \varepsilon, & \xi_1 \leq x < \xi_2, \\ \vdots \\ (\beta_0 + \beta_{4k}) + (\beta_1 + \beta_{4k+1})x + \cdots + (\beta_3 + \beta_{4k+3})x^3 + \varepsilon, & \xi_k \leq x, \end{cases} \quad (2)$$

- Las variables  $X_p$  no son variables aleatorias.
- Cada observación de  $\varepsilon$  es independiente entre sí, o bien,

$$\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \text{ para toda } i \neq j.$$

- El conjunto de variables predictoras  $X_{i,1}, \dots, X_{i,p}$  son linealmente independientes.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \cdots + \beta_p X_i^p + \varepsilon_i, \quad (3)$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 b_1(X_i) + \cdots + \beta_p b_p(X_i) + \varepsilon_i, \quad (4)$$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_p X_p + \varepsilon. \quad (5)$$

Estos supuestos permiten obtener el valor esperado de la variable objetivo, mostrado en (6).

$$\mathbb{E}(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 X_{i,1} + \cdots + \beta_p X_{i,p}. \quad (6)$$

La estimación  $\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1 + \cdots + \hat{\beta}_p X_p$  busca encontrar aquellos valores de  $\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_p$  que minimicen la variación entre la estimación propuesta y el valor real de cada observación en la variable respuesta. Este objetivo es equivalente a plantear la expresión (7):

$$\min_{\beta_0, \dots, \beta_p} \left\{ \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 \right\}, \quad (7)$$

con  $\sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i,1} - \cdots - \beta_p x_{i,p})^2$ . Dada la creciente complejidad de notación, seguimos a [Sengupta \(2001\)](#) y utilizamos notación matricial para desarrollar los resultados del modelo. Si se tienen  $m$  observaciones, a cada  $Y_i$  con  $i = 1, \dots, m$  se le puede asociar el resultado de una multiplicación de matrices, que puede

$$\text{de reescribirse como } Y = X\beta + \varepsilon, \text{ donde } Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_m \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & X_{1,1} & X_{1,2} & \cdots & X_{1,p} \\ 1 & X_{2,1} & X_{2,2} & \cdots & X_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{m,1} & X_{m,2} & \cdots & X_{m,p} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{pmatrix}. \text{ Así, siguiendo a } \text{Sengupta (2001)}, \text{ sabemos que}$$

los valores de la matriz de estimadores de los coeficientes de regresión, definida en (8), alcanzan un mínimo cuando se obtienen de (9).

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_p \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y, \quad (9)$$

donde  $X^T$  denota la matriz transpuesta de  $X$ , y  $(X^T X)^{-1}$  es la matriz inversa de  $X^T X$ . Note que esta expresión permite reescribir la matriz de estimaciones como en (10), donde se suele referir a  $H = X(X^T X)^{-1} X^T$  como la matriz de proyección.

$$\hat{Y} = X\hat{\beta} = X(X^T X)^{-1} X^T Y = HY. \quad (10)$$

Este proceso de minimización se repite para obtener los diferentes coeficientes estimados en cada intervalo de  $X$ . En el caso de un Spline Natural Cúbico, se debe de resolver este problema de minimización sujeto a las condiciones de continuidad sobre las primeras dos derivadas en cada nodo.

Por otra parte, una de las maneras en las que se puede encontrar el mejor valor para el parámetro de suavizamiento  $\lambda$  en (1), es mediante una metodología de selección de modelo



llamada *Leave One Out Cross Validation* (LOOCV), citado por [James et al. \(2013\)](#), que consiste en construir el modelo excluyendo un par de observaciones  $(x_i, y_i)$ , y después utilizar estos valores excluidos para obtener el error cuadrático medio del modelo  $ECM_i = (y_i - g_i(x_i))^2$  repitiendo este proceso para cada par de observaciones disponibles.

El error cuadrático medio total resultante de esta metodología será el promedio de todos los errores cuadráticos medios individuales, cuyo cálculo se expone a continuación.

$$ECM_{LOOCV} = \frac{1}{n} \sum_i ECM_i. \quad (11)$$

Sin embargo, [James et al. \(2013\)](#) demuestran que en el caso de la Regresión Lineal Múltiple se puede obtener este valor por medio de los valores de la traza de la matriz de proyección  $H$ ,  $h_i$ , como se ve aquí:

$$ECM_{LOOCV} = \frac{1}{n} \sum_i \left( \frac{y_i - \hat{y}_i}{1 - h_i} \right)^2. \quad (12)$$

[James et al. \(2013\)](#) proponen una malla de valores para  $\lambda$ , donde el valor elegido será aquel que alcance el menor  $ECM_{LOOCV}$  de entre todos los demás propuestos.

## 2.2. Investigaciones Relacionadas

Los estándares de la práctica actuarial en México para aquellas metodologías relacionadas con cualquier producto de vida y no vida se encuentran plasmados en la Circular Única de Seguros y Fianzas, que a su vez es emitida por la CNSF. En ella se pueden encontrar lineamientos para el cálculo y valuación de productos de vida relacionados con la mortalidad, destacando en diversos artículos el uso de la Experiencia Demográfica de Mortalidad para Activos “EMSSA-09” (vea el trabajo de la [Comisión Nacional de Seguros y Fianzas \(2023\)](#)); una serie de tablas de vida anexadas segmentadas por género, capacidad y situación laboral, entre otros.

A pesar de incorporar metodologías para la proyección de tasas de mortalidad en años futuros (basándose en aquellas del 2009), no se mencionan los procedimientos de estimación para las tasas base expuestas a lo largo del anexo. El artículo titulado “Comparativo de Metodologías para el cálculo de Tablas de Mortalidad de Pensiones”, liberado por la [Comisión Nacional de Seguros y Fianzas \(2022\)](#) menciona que el modelo utilizado por la CNSF en publicaciones anteriores para estimar la mortalidad mexicana es el de Análisis Bayesiano de Modelos de Regresión Logística. Según redacta el artículo, el fin último del modelo de regresión es obtener una estimación para las tasas de mortalidad  $q_x$ . Los datos utilizados para el modelo provienen de la experiencia en defunciones del registro de pólizas de la



CNSF, aunque no se hace mención específica del producto o programa al cuál están suscritos dichos individuos. Así, en este modelo, para cada edad  $x = 0, 1, \dots, 110$  se definen tres variables, que están relacionadas entre sí mediante la expresión

$$E_x = P_{x+1} + d_x, \quad (13)$$

donde  $P_{x+1}$  representa el número de pólizas o de expuestos a edad  $x + 1$  al final del año,  $d_x$  es el número de muertes de edad  $x$  observadas durante el año, y  $E_x$  es el número de personas expuestos en edad  $x$  al principio del año. La ecuación (13) permite calcular, desde un punto de vista frecuentista, la tasa bruta de mortalidad observada, de la forma expuesta en  $q_x = \frac{d_x}{E_x}$ .

La relación no lineal que se observa entre la edad  $x$  y la tasa bruta de mortalidad calculada  $q_x$  sustenta el uso de un modelo de regresión para explicar el comportamiento entre ambas variables. Dado que los valores de  $q_x$  se encuentran entre 0 y 1, es necesario utilizar el enfoque de un modelo de Regresión Logística, que pertenece al planteamiento de Regresión Lineal Generalizada. Además, siguiendo a [Ramírez et al. \(2000\)](#), se hace uso de la función de enlace logit, que describe la relación entre las variables  $q_x$  y  $Y_i$ :

$$Y_i = \ln \left( \frac{\hat{q}_x}{1 - \hat{q}_x} \right) = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \quad (14)$$

Un modelo alternativo que proponen [Ramírez et al. \(2000\)](#) es el de Lee-Carter, el cual se describe como una combinación de un modelo extrapolativo y series de tiempo, lo cual se logra mediante un ajuste que se muestra a continuación.

$$q_{x,t} = \exp(a_x + \beta_x \cdot k_t + \varepsilon_{x,t}). \quad (15)$$

En la ecuación (15),  $t$  denota el tiempo y  $x_t$  la diferencia de cada cohorte generacional [Ramírez et al. \(2000\)](#). Es así como se obtiene:

- $\alpha_x$  es un parámetro independiente del tiempo, e indica aquellos comportamientos que permanecen constantes en la mortalidad.
- $\beta_x$  regula el peso que recibe el cambio de la tendencia de mortalidad a lo largo del tiempo  $k_t$ .
- $k_t$  es el parámetro que expresa las desviaciones en el comportamiento de la mortalidad en el tiempo para cada edad específica.

El trabajo de [Ramírez et al. \(2000\)](#) menciona que es posible encontrar una solución al planteamiento usando descomposición en valores singulares, siempre y cuando se impongan además las restricciones  $\sum \beta_x = 1$  y  $\sum k_t = 0$ . Por otro lado, al ser  $k_t$

dependiente sólo del tiempo, se suele analizar mediante modelos de series temporales, específicamente, modelos Autorregresivos Integrados de Medias Móviles, los cuales permiten estudiar tendencias no estacionarias en el tiempo.

Pese a no ser una metodología mencionada en las regulaciones de la CNSF, también existen investigaciones enfocadas en las aplicaciones de los *Splines* sobre la estimación de la mortalidad. Por ejemplo, se puede consultar una estimación sobre la fuerza de mortalidad de la población de Mongolia, mediante ajustes de *Splines* en el trabajo de [Oirov et al. \(2021\)](#). Este procedimiento de *Splines* no es el mismo que el de un modelo de suavizamiento, pues la cantidad de nodos, su ubicación, y los coeficientes de regresión son obtenidos mediante máxima verosimilitud. Se denota al vector que contiene los  $k$  nodos como  $c = (c_1, c_2, \dots, c_k)$  y de manera similar, al vector de coeficientes de regresión como  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{k+n})$  donde  $n$  expresa el orden del *Spline*. De esta manera, cada *Spline* se puede definir como una función de estos dos vectores con  $g(x, \theta, c)$ .

Como la fuerza de mortalidad  $\mu(x)$  debe satisfacer que  $\mu(x) \geq 0$ , para todo valor de  $x$ , [Oirov et al. \(2021\)](#) utilizan el logaritmo natural de esta función con  $\ln(\mu(x))$ , cuya imagen corresponde a todos los valores reales. Finalmente, el planteamiento del modelo se muestra en (16), donde se iguala la fuerza de mortalidad al *Spline* obtenido por máxima verosimilitud.

$$\ln(\mu(x)) = g(x, \theta, c), \quad (16)$$

o lo que es equivalente a  $\mu(x) = \exp(g(x, \theta, c))$  para resolver la ecuación (16). A diferencia del *Spline* obtenido de minimizar (11), [Oirov et al. \(2021\)](#) utilizan una prueba  $\chi^2$  de bondad de ajuste modificada para obtener la forma del *Spline* ajustado. Es posible relacionar  $\mu(x)$  con la función  $F_X(x) = \Pr(X \leq x)$  para todo  $x \geq 0$ , mediante la expresión  $F_X(x) = 1 - \exp[-\int_0^x \mu(t) dt]$  [Bowers et al. \(1986\)](#), de manera que  $F_X(x)$  denota a la función de distribución obtenida de calcular  $\mu(x) = \exp(g(x, \theta, c))$ . La hipótesis nula de la prueba de bondad de ajuste se convierte en la igualdad (17).

$$H_0 : F_X(x) = F_X(x, \theta), \quad (17)$$

donde  $F_X(x)$  es la función de distribución verdadera de la vida denotada como  $X$  usada por [Oirov et al. \(2021\)](#). Los valores asignados a los vectores  $\theta$  y  $c$  serán aquellos que maximicen la probabilidad de aceptar  $H_0$ .

Para comparar los valores estimados de  $\mu(x)$ , se utiliza la función de distribución empírica  $\hat{F}_X(x)$ , definida en

$$\hat{F}_X(x) = \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_x}{N}, \quad x = 1, 2, \dots, 100, \quad (18)$$

donde  $n_x$  se define como el número de muertes ocurridas entre las edades  $[x-1, x]$  para  $x = 1, 2, \dots, 100$ , y  $N = \sum n_x$ .

Esta función empírica después se utiliza para obtener otra estimación para la fuerza de mortalidad de la forma dada a continuación.

$$\hat{\mu}(x) = \frac{\hat{F}_X(x) - \hat{F}_X(x-1)}{1 - \hat{F}_X(x)}, \quad x = 1, 2, \dots, 100. \quad (19)$$

La expresión (19) nos da una estimación para la fuerza de mortalidad para un individuo de edad  $x$ .

### 3. MÉTODOS Y TÉCNICAS

Para lograr el objetivo de este trabajo, que es estimar las probabilidades de muerte sobre la población de México mediante un modelo de suavizamiento polinómico por nodos, se definen a continuación las técnicas y métodos cuantitativos que se basan principalmente en la definición de las variables objeto de estudio, el universo y la muestra estadística. Posteriormente, se presentan los resultados en la sección 4, derivados de la aplicación de estas técnicas y métodos.

#### 3.1. Definición de variables

Para determinar la probabilidad de muerte de la población en México y de acuerdo a la revisión de la literatura de este trabajo, se definen como variables independientes y dependientes las que se describen a continuación.

**Variables Independientes:** año de registro de muerte,  $r$ ; sexo de nacimiento,  $z$  puede ser “masculino” o “femenino”.

**Variable Dependiente:** número de sobrevivientes a edad discreta,  $k$ , con defunción registrada el año  $r$  y sexo  $z$ ; representada por  $L(k)_{r,z}$ .

**Covariables:**

- $n_{r,z}$ : Número de registros disponibles que pertenecen a la cohorte de defunciones registradas para el año  $r$  y sexo  $z$ .
- $X_{i,r,z}$ : Edad de muerte para el individuo  $i$ , con año registrado  $r$  y sexo  $z$ .
- $(x)$ : Edad del individuo.
- $\hat{l}(x)_{r,z}$ : Función suavizada del número de sobrevivientes a edad  $(x)$  para el año registrado  $r$  y sexo  $z$ , y que representa el suavizamiento de la función  $L(k)_{r,z}$  para la edad  $(x)$  mediante *Splines*.
- $D(k)_{r,z}$ : Cuento de los individuos que fallecen con edad alcanzada  $k$ , donde  $k = 1, \dots, \max_i(X_{i,r,z})$ .
- $\hat{s}(x)_{r,z}$ : Función estimada de supervivencia a edad  $(x)$ , para el año registrado  $r$  y sexo  $z$ , a través de  $\hat{l}(x)_{r,z}$ .
- $\hat{\mu}(x)_{r,z}$ : Fuerza de mortalidad a edad  $(x)$ , para el año registrado  $r$  y sexo  $z$ , estimada a través de  $\hat{s}(x)_{r,z}$ .

Para el cálculo de las variables  $L(k)_{r,z}$  y  $D(k)_{r,z}$  se definieron las fórmulas (20) y (21), de acuerdo con la [Comisión Nacional](#)



de Seguros y Fianzas (2022).

$$L(0)_{r,z} = n_{r,z} \quad (20)$$

$$D(k)_{r,z} = \sum_{i=1}^{n_{r,z}} \mathbb{1}(k \leq X_{i,r,z} < k+1). \quad (21)$$

Se estableció además que

$$L(0)_{r,z} = L(k-1)_{r,z} - D(k-1)_{r,z},$$

lo que permitió obtener de forma iterativa a  $L(k)_{r,z}$ . Para garantizar que se cumplieran las propiedades de una función de supervivencia, se optó por suavizar la función  $L(k)_{r,z}$  mediante un *Spline* natural cúbico, obteniendo así la función continua  $\hat{l}(x)_{r,z}$  con la expresión siguiente

$$\hat{l}(x)_{r,z} := \min_g \left\{ \sum_{k=1}^{\max(X_{i,r,z})} (L(k)_{r,z} - g(k)_{r,z})^2 + \lambda \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g''(t)_{r,z}^2 dt \right\}. \quad (22)$$

La función de supervivencia se estima con la expresión (23), de acuerdo con Bowers *et al.* (1986).

$$\hat{s}(x)_{r,z} = \frac{\hat{l}(x)_{r,z}}{\hat{l}(0)_{r,z}}. \quad (23)$$

Así, al ser  $\hat{l}$  una función doblemente diferenciable; y  $\hat{l}(0)_{r,z}$ , una constante respecto a la edad ( $x$ ), se puede expresar la derivada de (23) como se muestra a continuación.

$$\frac{d}{dx} \hat{s}(x)_{r,z} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\hat{l}(x)_{r,z}}{\hat{l}(0)_{r,z}} \right). \quad (24)$$

Finalmente, (23) y (24) ofrecen una expresión equivalente para la fuerza de mortalidad estimada en términos de la función suavizada  $\hat{l}(x)_{r,z}$ , mostrada a continuación.

$$\hat{\mu}(x)_{r,z} = -\frac{\hat{s}'(x)_{r,z}}{\hat{s}(x)_{r,z}} = -\frac{\frac{d}{dx} \hat{l}(x)_{r,z}}{\hat{l}(x)_{r,z}}.$$

### 3.2. Definición del universo

Este estudio se basa en datos históricos de la población general de México, restringiendo el análisis a individuos cuyo fallecimiento fue registrado en el periodo comprendido entre 2012 y 2021. En búsqueda de obtener un comportamiento generalizado a nivel nacional y mantener la posibilidad de comparación con referencias existentes, se admitieron registros provenientes de las 32 entidades federativas de México.



Asimismo, no se discriminó la muestra por ninguna causa de defunción ni por características sociales específicas. Como se expuso anteriormente, las probabilidades de muerte utilizadas en la matemática actuarial incorporan una amplia gama de factores sociodemográficos característicos de la población en su conjunto y no están limitadas a causas particulares de defunción.

### 3.3. Tamaño y tipo de la muestra

La base de datos estuvo compuesta por un total de 7,583,482 registros de defunción en el periodo mencionado. Las selecciones de los registros son independientes entre sí y representativas de la población, sin embargo, se realizaron esfuerzos para mejorar la integridad de los datos mediante la eliminación de registros corruptos o incompletos. Los datos obtenidos de censos suelen incorporar errores de captura debido a factores como la imprecisión humana o canales de comunicación ineficientes para obtener estos datos. Para garantizar la calidad y confiabilidad de la información, se realizó un proceso de depuración de datos para identificar y eliminar los registros que presentaban algún tipo de problema en la captura, reduciendo así el tamaño final de la muestra a 6,865,137 registros.

## 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### 4.1. Características de la muestra

La muestra presentó una composición de 2,998,574 individuos con sexo de nacimiento femenino, y 3,866,563 individuos con sexo de nacimiento masculino, como se puede ver en la figura 1. Dado que la muestra fue discriminada en dos subgrupos principales según el sexo, se presentarán las características de cada subgrupo por separado.

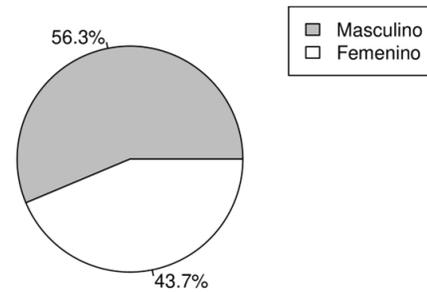
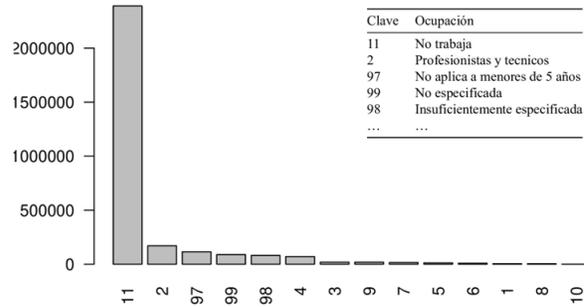


Figura 1 Composición de la muestra. Elaboración propia.

En el segmento de la muestra correspondiente al género femenino, se observó que la composición del comportamiento

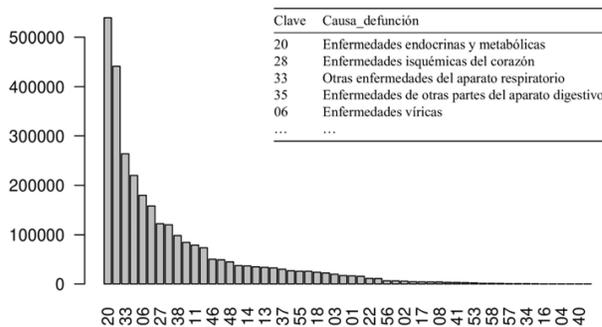
laboral estuvo mayormente conformada por mujeres sin ocupación laboral, seguido de aquellas con perfiles profesionales y técnicos, y finalmente, se encontraron individuos cuya ocupación no fue especificada. Esto está representado en la figura 2.

**Figura 2** Distribución de ocupación laboral, género femenino. Elaboración propia.



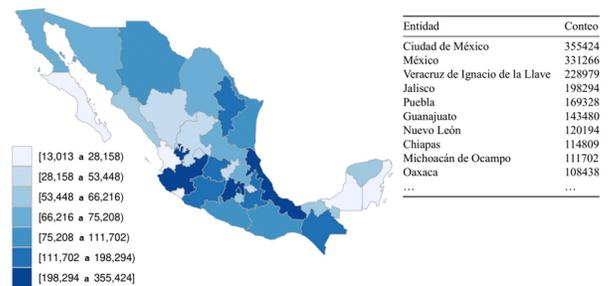
Respecto a la causa de fallecimiento para el género femenino, se identificaron como principales razones las enfermedades endocrinas y metabólicas, seguidas de las enfermedades isquémicas del corazón y las enfermedades del aparato respiratorio. La jerarquía completa de estas causas puede visualizarse en el histograma presentado en la figura 3.

**Figura 3** Distribución de causas de fallecimiento, género femenino. Elaboración propia.



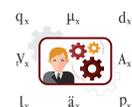
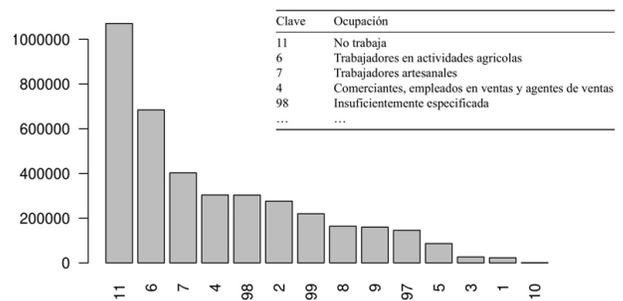
Finalmente, la mayoría de los fallecimientos registrados en el sexo femenino tuvieron lugar en la Ciudad de México, el Estado de México, Veracruz y Jalisco. Esta dinámica demográfica se representa visualmente en la figura 4.

**Figura 4** Entidad de ocurrencia, género femenino. Elaboración propia.

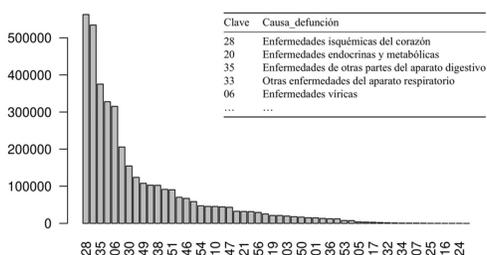


En relación con el subgrupo de individuos de sexo de nacimiento masculino, se observaron características similares al subgrupo femenino. Predominantemente, se encontraron individuos sin ocupación laboral, seguidos de trabajadores agrícolas y artesanales. Asimismo, las principales causas de muerte registradas fueron las enfermedades isquémicas del corazón, situando en este caso a las enfermedades endocrinas y metabólicas como la segunda causa más común, seguido de enfermedades del aparato digestivo (excluyendo enfermedades infecciosas intestinales). Similar al subgrupo anterior, la mayoría de los fallecimientos del sexo masculino fueron registrados en el Estado de México, la Ciudad de México, Veracruz y Jalisco. Las visualizaciones detalladas de esta información se presentan en las figuras 5, 6 y 7 respectivamente.

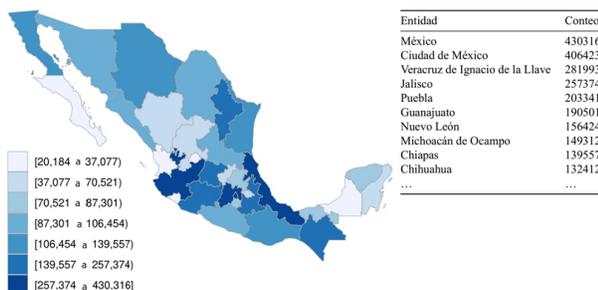
**Figura 5** Distribución de ocupación laboral, género masculino. Elaboración propia.



**Figura 6** Distribución de causas de fallecimiento, género masculino. Elaboración propia.



**Figura 7** Entidad de ocurrencia, género masculino. Elaboración propia.



#### 4.2. Cálculo de variables

Los datos se procesaron a través del lenguaje de programación R, dada su eficiencia para manejar amplias bases de información y su compatibilidad con el tratamiento estadístico. El objetivo principal de este estudio consistió en transformar los registros de defunción en una tabla de vida para cada año de fallecimiento registrado disponible. Además, se segmentaron las tablas por género del individuo, lo que dio como resultado un total de 20 tablas distintas.

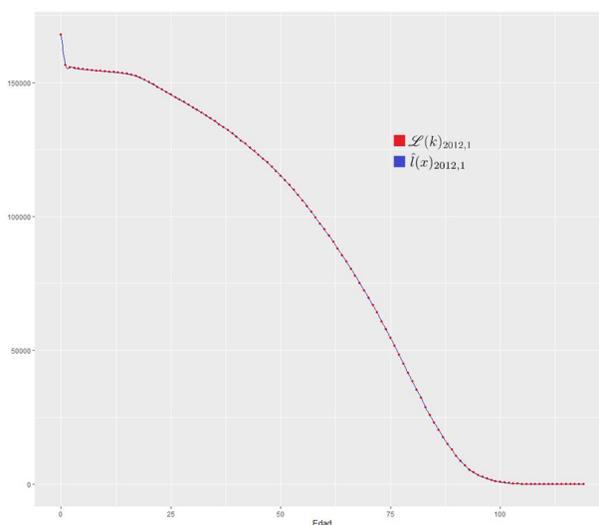
De acuerdo a la definición previa de las variables, se obtiene entonces que el año de registro toma los valores  $r = 2012, 2013, \dots, 2021$ . Además, el sexo de nacimiento se define con los valores  $z = 1, 2$  (donde 1 representa el sexo masculino y 2 el femenino). A continuación, se llevó a cabo un proceso de filtración y limpieza de datos con el propósito de enfocar el procedimiento exclusivamente en las variables esenciales necesarias para la creación de la tabla. Durante este proceso, se eliminaron los registros que carecían de información suficiente y se aplicó el formato necesario para la formación final de la base de datos.



La tabla resultante contenía un total de 167,948 registros después de haber sido sometida al proceso de limpieza y selección mencionados previamente. Estos registros formaron la base que se utilizó para construir la tabla de vida correspondiente al año 2012 para el género masculino.

Los resultados para el cálculo de la variable  $\hat{l}(x)_{r,z}$ , y que en específico en este trabajo se obtiene la función continua  $\hat{l}(x)_{2021,1}$  al solucionar la expresión (22), se muestran en la figura 8.

**Figura 8** Función  $\hat{l}(x)_{2021,1}$  suavizada por Splines con el método natural cúbico. Elaboración propia.



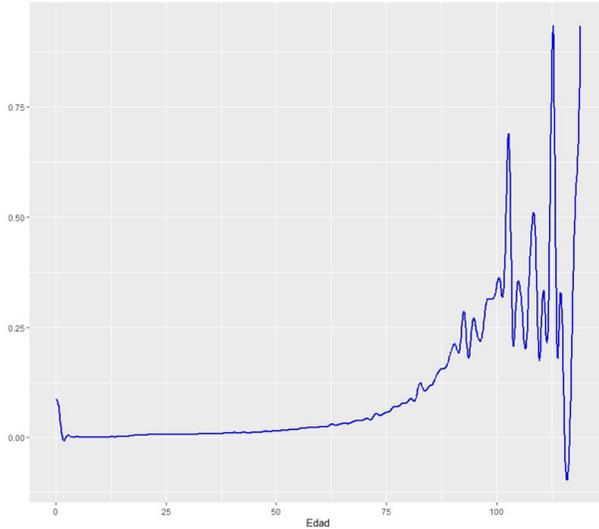
Entre los valores de la función  $\hat{l}(x)_{2021,1}$ , se encuentra el valor calculado para  $\lambda$ , obtenido mediante la metodología LOOCV expuesta en las ecuaciones (11)-(12), el cual resultó igual a  $\lambda_{LOOCV} = 1.87365 \times 10^{-16}$ , lo que equivale a la expresión siguiente.

$$\frac{1}{n} \sum_i (y_i - \hat{l}(x)_{2012,1,\lambda_{LOOCV}})^2 \leq \frac{1}{n} \sum_i (y_i - \hat{l}(x)_{2012,1,\lambda_j})^2,$$

para toda  $\lambda_j \neq \lambda_{LOOCV}$ . Por otro lado, se muestra la función  $\hat{\mu}(x)_{2021,1}$ , obtenida mediante splines por suavizamiento en la figura 9, cuyo procedimiento es completamente análogo para todos los años de registro disponibles y es posible de generalizar, ciclar y almacenar.

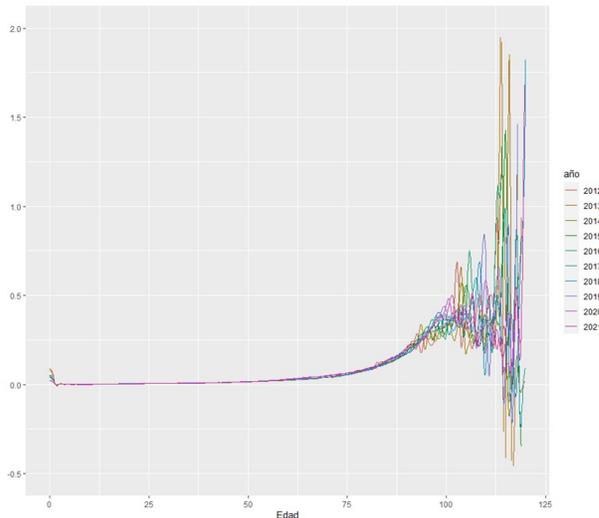
Al calcular y obtener las funciones de fuerza de mortalidad estimada para cada año de registro, se hizo evidente la presencia

**Figura 9** Fuerza de mortalidad estimada 2012, género masculino. Elaboración propia.



de una considerable variabilidad entre las estimaciones. Estas diferencias se representan gráficamente en la figura 10.

**Figura 10** Funciones de fuerza de mortalidad estimadas, género masculino. Elaboración propia.



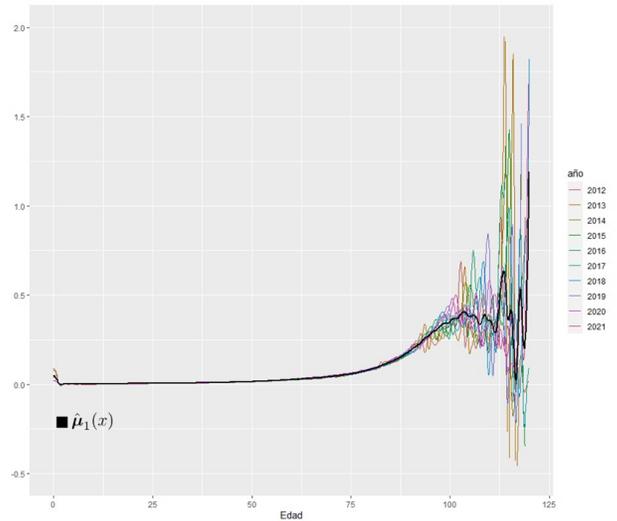
Con el fin de disminuir esta variabilidad y de incorporar

los comportamientos identificados para cada año de manera simultánea, se realizó un suavizamiento final sobre todas las funciones de fuerza de mortalidad estimada, cuyo planteamiento se expone en la ecuación siguiente.

$$\hat{\mu}_z(x) := \min_g \left\{ \sum_{r=2012}^{2021} \sum_i (\hat{l}(i)_{r,z} - g_z(i))^2 + \lambda \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g_z''(x)^2 dx \right\}.$$

El procesamiento de la información permite obtener la función  $\hat{\mu}_z(x)$ , que representa la fuerza de mortalidad estimada para el sexo masculino. Esta función logró incorporar los comportamientos observados en todos los años analizados, además de presentar una baja variabilidad, lo cual se visualiza en la figura 11. A partir de esta función es posible extraer y calcular todas las variables necesarias para construir una tabla de vida que englobe el comportamiento de mortalidad encontrado.

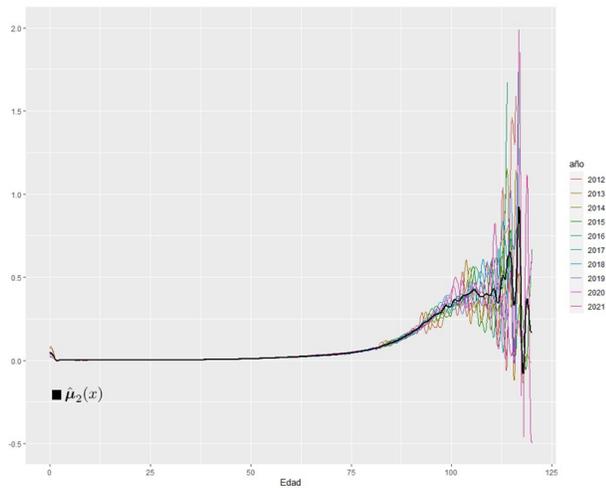
**Figura 11** Función final de fuerza de mortalidad estimada, género masculino. Elaboración propia.



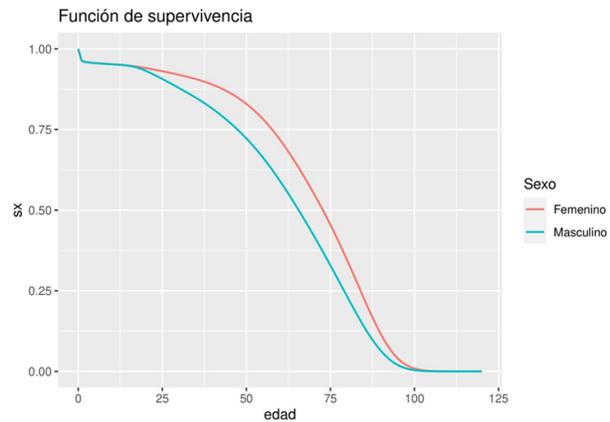
Construir la función final de fuerza de mortalidad estimada para el sexo femenino  $\hat{\mu}_z(x)$ , involucró un proceso semejante, sustituyendo el valor de la variable  $z = 2$  en la programación previamente mencionada. En la figura 12 se presentan los resultados de las estimaciones de la fuerza de mortalidad para cada año, así como la estimación final correspondiente para los individuos con género de nacimiento femenino.



**Figura 12** Función final de fuerza de mortalidad estimada, género femenino. Elaboración propia.



**Figura 13** Función de supervivencia obtenida por sexos. Elaboración propia.



### 4.3. Cálculo de tabla de mortalidad

Obtenidas las funciones de fuerza de mortalidad,  $\mu_z$  para el sexo masculino y  $\mu_z$  para el femenino, fue posible derivar todas las funciones asociadas al uso de probabilidades de muerte como se muestra a continuación:

$$\exp\left(-\int_0^n \mu(x) dx\right) = \frac{s(n)}{s(0)} = \frac{s(n)}{1} = s(n),$$

para  $n > 0$ . Aunque es posible derivar una expresión exacta para la integral  $\int_0^n \mu(x) dx$ , esto requeriría integrar todos los nodos que integran la función suavizada, lo cual resulta impreciso. En su lugar, la integral se puede aproximar mediante un método numérico. Ambas funciones se pueden ver en la figura 13.

De forma intrínseca se incorporan la totalidad de los datos disponibles en los registros, al obtener  $\hat{s}(x)$  a partir de  $\mu(x)$ . Por último, al definir  $l_0 = 100,000$  se logró construir las tablas de mortalidad mostradas en la tablas 1-3.

### 4.4. Comparación empírica con otras tablas de mortalidad

Para examinar y comparar los patrones de mortalidad presentados en la tabla de vida previamente obtenida, así como los reflejados en las tasas de mortalidad de los beneficiarios de la seguridad social mexicana según EMSSAH-09 y EMSSAM-09, fue suficiente analizar una de las funciones relacionadas con las probabilidades de muerte. Si se determinan que existen diferencias en una función específica, estas divergencias también se

manifestarán en todas las demás funciones, ya que todas están estrechamente relacionadas. Para realizar esta comparación se decidió utilizar la función de supervivencia para la comparación, pues al ser el complemento de una función de distribución probabilística, se pudo evaluar si existía una diferencia entre ambas muestras mediante una prueba de bondad de ajuste.

Pese a que no se contaba con la expresión exacta de la función de supervivencia utilizada por la CNSF, fue posible derivar los valores discretos de la función evaluada en cada edad, a través de los valores de  $q_x$  indicados en las tablas EMSSAH-09 y EMSSAM-09. Para lograr esto, primero seguimos a [Bowers et al. \(1986\)](#) y obtuvimos la expresiones siguientes:

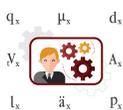
$$q_x = 1 - p_x = 1 - \frac{s(x+1)}{s(x)}$$

$$s(x+1) = (1 - q_x) \cdot s(x).$$

Los resultados se encuentran en la tablas 4-6.

La figura 14 muestra la divergencia entre las estimaciones de las tablas EMSSAH-09 y EMSSAM-09, y las tablas 4-6. La diferencia es evidente.

No obstante, se decidió emplear la prueba de bondad de ajuste Kolmogorov-Smirnov, en la cual se contrasta la hipótesis nula de que una muestra aleatoria dada sigue alguna distribución de probabilidad teórica propuesta. Es decir, si denotamos por  $F_{X,CNSF}$  a la función de distribución exhibida por las tablas de vida EMSSAH-09 y EMSSAM-09 para  $z = 1, 2$  respectivamente, y  $X_{z,t}$  como la variable aleatoria que representa la edad de muerte de un individuo registrado en las estadísticas de defunciones generales del INEGI, entonces la hipótesis nula



■ **Tabla 1** Tabla de vida construida por sexos para las edades de 0 a 51 años. Elaboración propia.

Edad	lx_masculino	qx_masculino	lx_femenino	qx_femenino
0	100,000.00	0.0369221	100,000.00	0.0365917
1	96,307.79	0.0041892	96,340.83	0.0037477
2	95,904.34	0.0011124	95,979.77	0.0016054
3	95,797.66	0.0013370	95,825.68	0.0012818
4	95,669.58	0.0008940	95,702.86	0.0009646
5	95,584.05	0.0008195	95,610.55	0.0008345
6	95,505.72	0.0007434	95,530.76	0.0007294
7	95,434.73	0.0007058	95,461.08	0.0007303
8	95,367.36	0.0006871	95,391.37	0.0006623
9	95,301.84	0.0006973	95,328.19	0.0007109
10	95,235.38	0.0007393	95,260.42	0.0007269
11	95,164.98	0.0007743	95,191.17	0.0007350
12	95,091.29	0.0009015	95,121.21	0.0008834
13	95,005.56	0.0010481	95,037.18	0.0009832
14	94,905.98	0.0014205	94,943.74	0.0011023
15	94,771.17	0.0018854	94,839.08	0.0013679
16	94,592.49	0.0025115	94,709.34	0.0015422
17	94,354.93	0.0032742	94,563.28	0.0016632
18	94,045.99	0.0039775	94,406.01	0.0017779
19	93,671.93	0.0045653	94,238.17	0.0018719
20	93,244.29	0.0050643	94,061.77	0.0019842
21	92,772.07	0.0053656	93,875.13	0.0020246
22	92,274.28	0.0056489	93,685.07	0.0020752
23	91,753.03	0.0058099	93,490.65	0.0021532
24	91,219.96	0.0059359	93,289.35	0.0022460
25	90,678.48	0.0060943	93,079.82	0.0023201
26	90,125.86	0.0061528	92,863.87	0.0023430
27	89,571.34	0.0063921	92,646.29	0.0025013
28	88,998.79	0.0064473	92,414.55	0.0024539
29	88,424.99	0.0065476	92,187.77	0.0025692
30	87,846.02	0.0066609	91,950.93	0.0026446
31	87,260.88	0.0067352	91,707.75	0.0026972
32	86,673.17	0.0070018	91,460.40	0.0028768
33	86,066.30	0.0071114	91,197.29	0.0030503
34	85,454.25	0.0072646	90,919.11	0.0031161
35	84,833.45	0.0076423	90,635.80	0.0033605
36	84,185.13	0.0079028	90,331.22	0.0036439
37	83,519.83	0.0082713	90,002.06	0.0038359
38	82,829.01	0.0085611	89,656.83	0.0041865
39	82,119.90	0.0090544	89,281.48	0.0044889
40	81,376.36	0.0094831	88,880.70	0.0047577
41	80,604.66	0.0098241	88,457.83	0.0051768
42	79,812.78	0.0104818	87,999.90	0.0055620
43	78,976.21	0.0107961	87,510.44	0.0059660
44	78,123.57	0.0114153	86,988.35	0.0065190
45	77,231.77	0.0120134	86,421.28	0.0069738
46	76,303.95	0.0126178	85,818.59	0.0075300
47	75,341.16	0.0132653	85,172.38	0.0082634
48	74,341.74	0.0139652	84,468.56	0.0088682
49	73,303.54	0.0145694	83,719.48	0.0094174
50	72,235.55	0.0153249	82,931.05	0.0100656
51	71,128.55	0.0161575	82,096.30	0.0109119

supone que la distribución empírica de  $X_{z,t} \sim F_{X,CNSF}$ . Esto es equivalente a plantear las hipótesis expuestas en (25).

$$H_0 : X_{z,t} = F_{X,CNSF} \text{ vs. } H_1 : X_{z,t} \neq F_{X,CNSF}. \quad (25)$$

■ **Tabla 2** Tabla de vida construida por sexos para las edades de 52 a 86 años. Elaboración propia.

Edad	lx_masculino	qx_masculino	lx_femenino	qx_femenino
52	69,979.29	0.0171651	81,200.48	0.0116797
53	68,778.09	0.0181549	80,252.08	0.0126291
54	67,529.42	0.0191893	79,238.57	0.0136426
55	66,233.58	0.0204448	78,157.55	0.0145905
56	64,879.45	0.0215715	77,017.20	0.0155112
57	63,479.90	0.0227467	75,822.57	0.0166609
58	62,035.94	0.0239268	74,559.30	0.0179429
59	60,551.62	0.0250289	73,221.49	0.0190115
60	59,036.07	0.0264452	71,829.44	0.0201270
61	57,474.85	0.0275716	70,383.73	0.0212363
62	55,890.18	0.0292141	68,889.04	0.0225864
63	54,257.40	0.0302514	67,333.09	0.0238802
64	52,616.04	0.0320283	65,725.16	0.0251233
65	50,930.84	0.0332071	64,073.93	0.0263373
66	49,239.57	0.0350492	62,386.40	0.0276423
67	47,513.76	0.0366005	60,661.89	0.0288565
68	45,774.73	0.0390402	58,911.40	0.0307837
69	43,987.68	0.0411069	57,097.89	0.0319295
70	42,179.48	0.0433218	55,274.78	0.0340647
71	40,352.19	0.0453834	53,391.86	0.0357733
72	38,520.87	0.0487046	51,481.86	0.0384665
73	36,644.73	0.0517126	49,501.53	0.0407687
74	34,749.73	0.0546877	47,483.42	0.0430342
75	32,849.35	0.0582211	45,440.01	0.0463478
76	30,936.82	0.0625121	43,333.97	0.0497419
77	29,002.90	0.0675412	41,178.45	0.0535261
78	27,044.01	0.0723180	38,974.33	0.0582527
79	25,088.24	0.0771699	36,703.97	0.0622437
80	23,152.18	0.0832827	34,419.38	0.0683659
81	21,224.00	0.0890135	32,066.27	0.0726628
82	19,334.78	0.0981228	29,736.24	0.0814168
83	17,437.60	0.1055157	27,315.21	0.0896849
84	15,597.66	0.1140285	24,865.45	0.0963752
85	13,819.08	0.1220585	22,469.04	0.1037292
86	12,132.34	0.1310469	20,138.34	0.1127017

Se calculó la distribución empírica de  $X_z$  mediante el método de la transformada inversa [Bertrand et al. \(2009\)](#). En este enfoque, se utiliza una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo  $(0, 1)$  para simular valores aleatorios equiprobables entre 0 y 1. Estos valores se introducen posteriormente en alguna función de distribución inversa, en este caso  $F_z^{-1}(x)$ , para obtener realizaciones aleatorias de  $X_z$ . Esto es:

$$X_{z,i} = F_z^{-1}(U_i), \text{ para } i = 1, \dots, n. \quad (26)$$

El tamaño de la muestra aleatoria  $n_z$  dependerá de la cantidad de valores extraídos de los valores aleatorios con distribución uniforme  $U_i$ . Es importante enfatizar que, mientras  $F_{X,CNSF}(x)$  representa la distribución teórica de la variable aleatoria  $X_z$  obtenida mediante suavizado por splines,  $\hat{F}_{X_z}(x)$  corresponde a la distribución empírica de  $X_z$ . Esta última se calcula a partir del muestreo aleatorio descrito en (26) y (19). Esto es:

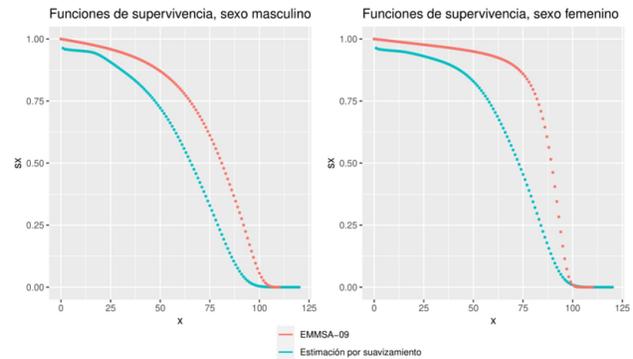
$$D := \max_x |F_{X,CNSF}(x) - \hat{F}_{X_z}(x)| \quad (27)$$



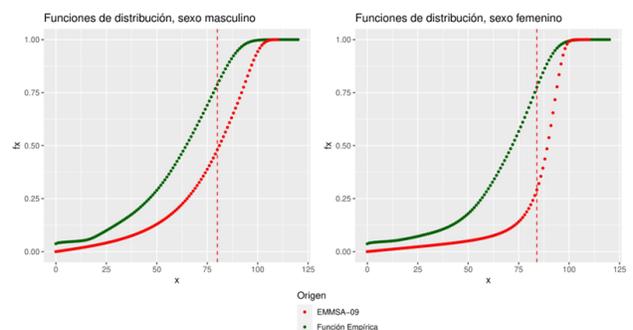
■ **Tabla 3** Tabla de vida construida por sexos para las edades de 77 a 120 años. Elaboración propia.

Edad	lx_masculino	qx_masculino	lx_femenino	qx_femenino
87	10,542.44	0.1410209	17,868.72	0.1243636
88	9,055.73	0.1530408	15,646.50	0.1355771
89	7,669.84	0.1653049	13,525.19	0.1476404
90	6,401.98	0.1802720	11,528.33	0.1601642
91	5,247.88	0.1922704	9,681.90	0.1712760
92	4,238.87	0.2068379	8,023.62	0.1916315
93	3,362.11	0.2249165	6,486.04	0.2047162
94	2,605.92	0.2368292	5,158.25	0.2182004
95	1,988.76	0.2517885	4,032.71	0.2338731
96	1,488.01	0.2627052	3,089.57	0.2436604
97	1,097.10	0.2771772	2,336.77	0.2557088
98	793.01	0.2874340	1,739.23	0.2772323
99	565.07	0.2904527	1,257.06	0.2760963
100	400.95	0.3048427	909.99	0.2997517
101	278.72	0.3076645	637.22	0.3013631
102	192.97	0.3197835	445.19	0.3147910
103	131.26	0.3326217	305.05	0.3249809
104	87.60	0.3213328	205.91	0.3317357
105	59.45	0.3181446	137.60	0.3433943
106	40.54	0.3135346	90.35	0.3315319
107	27.83	0.2898633	60.40	0.3181683
108	19.76	0.3155009	41.18	0.3271224
109	13.53	0.3043105	27.71	0.3254155
110	9.41	0.2885405	18.69	0.3427086
111	6.70	0.2616140	12.29	0.3041001
112	4.94	0.3727273	8.55	0.3752962
113	3.10	0.4579323	5.34	0.4108194
114	1.68	0.3420489	3.15	0.4664055
115	1.11	0.3144588	1.68	0.3234208
116	0.76	0.0910488	1.14	0.5050578
117	0.69	0.3387663	0.56	0.1757120
118	0.46	0.2499203	0.46	0.2108398
119	0.34	0.0369221	0.37	0.0365917
120	0.18	0.0369221	0.29	0.0365917

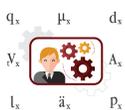
**Figura 14** Comparativa de funciones de supervivencia. Elaboración propia.



**Figura 15** Contraste de las funciones de distribución empírica y teórica de la prueba. Elaboración propia.



Según Rohatgi y Saleh (2015), el estadístico de prueba expresado por (27) mide la discrepancia máxima observada entre las dos distribuciones, y para un nivel de significancia  $\alpha$  de la prueba del 99 %, se rechaza la hipótesis nula si se cumple la condición  $D > D_{0.01} = 0.0163$ . La visualización de la prueba se presenta en la figura 15. El valor calculado del estadístico fue de  $D = 0.3706448$  para el subgrupo masculino y de  $D = 0.48562075$  para el subgrupo femenino. En ambos casos, se rechaza la hipótesis nula aún con un nivel de significancia del 99 %. Por lo tanto, se concluye que las estimaciones resultantes de un suavizamiento sobre las probabilidades de muerte de la población de México provienen de un comportamiento diferente respecto a las estimaciones exhibidas en las tasas de mortalidad de activos para la seguridad social mexicana EMSSAH-09 y EMSSAM-09.



■ **Tabla 4** Tablas de vida EMMSA-09 para las edades de 0 a 51 años. Elaboración propia.

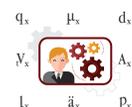
Edad	Hombres qx	Mujeres qx	Hombres sx	Mujeres sx
0	0.00138	0.00092	1.0000000	1.0000000
1	0.00138	0.00092	0.9986200	0.9990800
2	0.00139	0.00092	0.9972419	0.9981608
3	0.00140	0.00092	0.9958557	0.9972425
4	0.00142	0.00092	0.9944615	0.9963251
5	0.00143	0.00092	0.9930494	0.9954085
6	0.00145	0.00092	0.9916293	0.9944927
7	0.00147	0.00092	0.9901915	0.9935777
8	0.00149	0.00092	0.9887359	0.9926637
9	0.00152	0.00092	0.9872627	0.9917504
10	0.00155	0.00092	0.9857620	0.9908380
11	0.00158	0.00092	0.9842341	0.9899264
12	0.00161	0.00092	0.9826790	0.9890157
13	0.00165	0.00092	0.9810969	0.9881058
14	0.00168	0.00092	0.9794781	0.9871967
15	0.00172	0.00092	0.9778326	0.9862885
16	0.00177	0.00092	0.9761507	0.9853811
17	0.00181	0.00092	0.9744229	0.9844746
18	0.00186	0.00093	0.9726592	0.9835689
19	0.00191	0.00093	0.9708501	0.9826541
20	0.00197	0.00093	0.9689957	0.9817403
21	0.00202	0.00093	0.9670868	0.9808273
22	0.00209	0.00094	0.9651333	0.9799151
23	0.00215	0.00094	0.9631162	0.9789940
24	0.00222	0.00095	0.9610455	0.9780737
25	0.00230	0.00095	0.9589120	0.9771445
26	0.00237	0.00096	0.9567065	0.9762163
27	0.00246	0.00096	0.9544391	0.9752791
28	0.00254	0.00097	0.9520911	0.9743428
29	0.00264	0.00098	0.9496728	0.9733977
30	0.00274	0.00099	0.9471657	0.9724438
31	0.00284	0.00100	0.9445705	0.9714811
32	0.00295	0.00101	0.9418879	0.9705096
33	0.00307	0.00102	0.9391093	0.9695294
34	0.00319	0.00104	0.9362262	0.9685404
35	0.00332	0.00105	0.9332397	0.9675332
36	0.00346	0.00107	0.9301413	0.9665173
37	0.00361	0.00109	0.9269230	0.9654831
38	0.00377	0.00111	0.9235768	0.9644307
39	0.00393	0.00113	0.9200950	0.9633602
40	0.00411	0.00116	0.9164790	0.9622716
41	0.00430	0.00118	0.9127123	0.9611554
42	0.00450	0.00121	0.9087876	0.9600212
43	0.00471	0.00124	0.9046981	0.9588596
44	0.00493	0.00128	0.9004369	0.9576706
45	0.00517	0.00132	0.8959978	0.9564448
46	0.00542	0.00136	0.8913655	0.9551823
47	0.00569	0.00141	0.8865343	0.9538832
48	0.00598	0.00146	0.8814899	0.9525382
49	0.00629	0.00151	0.8762186	0.9511475
50	0.00661	0.00158	0.8707072	0.9497113
51	0.00696	0.00164	0.8649518	0.9482107

■ **Tabla 5** Tablas de vida EMMSA-09 para las edades de 52 a 86 años. Elaboración propia.

Edad	Hombres qx	Mujeres qx	Hombres sx	Mujeres sx
52	0.00733	0.00172	0.8589317	0.9466557
53	0.00772	0.00180	0.8526358	0.9450274
54	0.00814	0.00189	0.8460534	0.9433264
55	0.00859	0.00199	0.8391665	0.9415435
56	0.00906	0.00211	0.8319581	0.9396698
57	0.00957	0.00223	0.8244205	0.9376871
58	0.01011	0.00237	0.8165308	0.9355961
59	0.01069	0.00253	0.8082757	0.9333787
60	0.01131	0.00270	0.7996352	0.9310173
61	0.01198	0.00290	0.7905914	0.9285035
62	0.01268	0.00312	0.7811201	0.9258109
63	0.01344	0.00336	0.7712155	0.9229223
64	0.01425	0.00364	0.7608504	0.9198213
65	0.01512	0.00396	0.7500082	0.9164732
66	0.01604	0.00432	0.7386681	0.9128439
67	0.01703	0.00473	0.7268199	0.9089004
68	0.01810	0.00520	0.7144421	0.9046013
69	0.01924	0.00574	0.7015107	0.8998974
70	0.02045	0.00636	0.6880137	0.8947320
71	0.02176	0.00707	0.6739438	0.8890415
72	0.02316	0.00790	0.6592788	0.8827560
73	0.02467	0.00886	0.6440099	0.8757822
74	0.02628	0.00998	0.6281221	0.8680228
75	0.02801	0.01130	0.6116151	0.8593599
76	0.02986	0.01285	0.5944838	0.8496492
77	0.03185	0.01467	0.5767325	0.8387312
78	0.03399	0.01683	0.5583635	0.8264270
79	0.03629	0.01940	0.5393848	0.8125182
80	0.03875	0.02247	0.5198105	0.7967554
81	0.04139	0.02614	0.4996678	0.7788523
82	0.04423	0.03056	0.4789866	0.7584931
83	0.04728	0.03588	0.4578010	0.7353135
84	0.05055	0.04233	0.4361562	0.7089305
85	0.05406	0.05014	0.4141085	0.6789214
86	0.05783	0.05964	0.3917218	0.6448803

estimaciones sustancialmente diferentes a las dictaminadas por la CNSF, sino que también se identificó evidencia que sugiere una posible subestimación de la mortalidad actual en las tablas de vida EMSSAH-09 y EMSSAM-09. En ambos subgrupos de sexo, el modelo suavizado exhibió probabilidades de muerte inferiores desde la edad 0 hasta los 101 años en el caso femenino y los 108 años en el masculino. Sin embargo, este fenómeno se compensó por un decremento mucho más gradual en la función de supervivencia suavizada, a comparación de su homólogo regulatorio. Dicho distintivo se manifestó de manera más pronunciada en el subgrupo femenino, como se evidencia en la figura 15.

Es de resaltar que no fue necesario implementar restricciones explícitas para la forma del modelo, como aquellas expuestas en las expresiones (14) y (15). Además, la metodología propuesta ofrece una aproximación más precisa para funciones que involucran cálculos infinitesimales, como la función de fuerza



## 5. CONCLUSIONES

Tras el análisis de los resultados, no solo se determinó que el procedimiento de suavizamiento por *splines* proporciona

■ **Tabla 6** Tablas de vida EMMSA-09 para las edades de 87 a 110 años. Elaboración propia.

Edad	Hombres qx	Mujeres qx	Hombres sx	Mujeres sx
87	0.06187	0.07121	0.3690685	0.6064197
88	0.06621	0.08530	0.3462342	0.5632365
89	0.07087	0.10245	0.3233101	0.5151924
90	0.08147	0.12327	0.3003971	0.4624110
91	0.09207	0.14846	0.2759237	0.4054096
92	0.10439	0.17874	0.2505194	0.3452225
93	0.11835	0.21478	0.2243677	0.2835174
94	0.13418	0.25716	0.1978138	0.2226235
95	0.15212	0.30616	0.1712711	0.1653737
96	0.17247	0.36163	0.1452174	0.1147429
97	0.19554	0.42286	0.1201717	0.0732484
98	0.22170	0.48842	0.0966734	0.0422746
99	0.25135	0.55626	0.0752409	0.0216268
100	0.28497	0.62390	0.0563291	0.0095967
101	0.32309	0.68873	0.0402770	0.0036093
102	0.36630	0.74844	0.0272639	0.0011235
103	0.41530	0.80133	0.0172771	0.0002826
104	0.47085	0.84648	0.0101019	0.0000561
105	0.53383	0.88375	0.0053454	0.0000086
106	0.60523	0.91358	0.0024919	0.0000010
107	0.68618	0.93683	0.0009837	0.0000001
108	0.77796	0.95453	0.0003087	0.0000000
109	0.88202	0.96773	0.0000685	0.0000000
110	1.00000	1.00000	0.0000081	0.0000000

de mortalidad, en contraste con enfoques discretos como el de (19).

En cuanto al aspecto práctico, es relevante resaltar la disponibilidad de los registros de mortalidad general del INEGI para uso público. Aunque esta investigación no discrimina los datos, se abre la posibilidad de hacerlo según la ocupación, causa de muerte, entidad federativa u otras estructuras variables, con el objetivo de construir modelos estadísticos de mortalidad más detallados por factores específicos. Esto podría traducirse en probabilidades de muerte más precisas, sacrificando robustez estadística en aras de una estimación más especializada.

No obstante, existen desventajas importantes en el uso de este procedimiento. Por un lado, la elección de los años de registro para la ventana temporal 2012-2021, fue completamente arbitraria. Utilizar una cantidad de registros menor (conservando sólo los años más recientes, por ejemplo), o mayor (de ser disponibles), hubiera proporcionado resultados diferentes. Igualmente, se eligió implementar la técnica de suavizamiento por *splines* sobre las funciones  $\hat{l}(x)$ . Sin embargo, también hubiera sido posible construir una tabla de vida que incorporase todos los registros disponibles, sin agruparlos por año de registro. Sumado a estas alternativas, también se sugiere como tema de investigación futuro explorar si las estimaciones obtenidas mediante este método son objetivamente superiores a las comparaciones realizadas, puesto que la hipótesis propuesta

$$q_x = \mu_x d_x$$

$$N_x = A_x$$

$$l_x = \ddot{a}_x p_x$$

sólo contemplaba validar si eran diferentes.

Un objetivo implícito de esta investigación fue proporcionar una metodología clara y flexible, accesible para todos los lectores, para obtener estimaciones de probabilidades de muerte. Se repasaron los requisitos teóricos para la aplicación de un modelo de suavizamiento por *splines*, con el propósito de dotar a cualquier interesado de las herramientas necesarias para personalizar este modelo según sus necesidades y objetivos de investigación. Finalmente, este estudio fue un esfuerzo por alentar a futuros investigadores de incursionar en el descubrimiento de técnicas novedosas, que fortalezcan y desarrollen la profesión actuarial en México y en el mundo.

## REFERENCIAS

- Bertrand, C., F. Ernest, y H. Hao, 2009 *Springer Series in Statistics*. Springer.
- Booth, H. y L. Tickle, 2008 Mortality modelling and forecasting: a review of methods. *Annals of Actuarial Science* **3**: 3–43.
- Bowers, N. L., H. U. Gerber, J. C. Hickman, D. A. Jones, y C. J. Nesbitt, 1986 Actuarial mathematics. En *Mathematics of Life Insurance*, The Society of Actuaries.
- Comisión Nacional de Seguros y Fianzas, 2022 Comparativo de metodologías para el cálculo de tablas de mortalidad de pensiones. Reporte técnico, Comisión Nacional de Seguros y Fianzas.
- Comisión Nacional de Seguros y Fianzas, 2023 Circular Única de seguros y fianzas. Reporte técnico, Comisión Nacional de Seguros y Fianzas.
- Contreras, F. H. y F. P. Márquez, 2018 Modelo mexicano de supervisión basado en riesgos tipo solvencia 2. Reporte técnico 171, Comisión Nacional de Seguros y Fianzas.
- Estepa, A., M. Gea, G. Cañadas, y J. Contreras, 2012 Algunas notas históricas sobre la correlación y regresión y su uso en el aula. *Números*. Revista de Didáctica de las Matemáticas **81**: 5–14.
- Forfar, D. O., 2004 Mortality laws. En *Encyclopedia of Actuarial Science*, John Wiley & Sons, Ltd.
- James, G., D. Witten, T. Hastie, y R. Tibshirani, 2013 *An Introduction to Statistical Learning*, volumen 103. Springer New York.
- Neter, J. y W. Wasserman, 1997 *Applied Linear Regression Models*, volumen 39. McGraw-Hill.
- Oirov, T., G. Terbish, y N. Dorj, 2021 B-spline estimation for force of mortality. *Mathematics and Statistics* **9**: 736–743.
- Pollock, D. S. G., 1999 Smoothing with cubic splines. En *Handbook of Time Series Analysis, Signal Processing, and Dynamics*, pp. 293–322, Elsevier.
- Ramírez, M. M., A. M. M. Gómez, y E. M. Torres, 2000 Tablas de mortalidad cnsf 2000-i y cnsf 2000-g serie documentos de

trabajo. Reporte técnico 80, Comisión Nacional de Seguros y Fianzas.

Rice, J. y M. Rosenblatt, 1983 Smoothing splines: Regression, derivatives and deconvolution. *The Annals of Statistics* **11**: 1403–1433.

Rohatgi, V. K. y A. K. M. E. Saleh, 2015 *An Introduction to Probability and Statistics*. Wiley.

Sengupta, D., 2001 Linear models in statistics. *Journal of the American Statistical Association* **96**: 1138–1138.

Stanton, J. M., 2001 Galton, pearson, and the peas: A brief history of linear regression for statistics instructors. *Journal of Statistics Education* **9**.

Varol, B., I. Kurt Omurlu, y M. Türe, 2020 Comparison of piecewise regression and polynomial regression analyses in health and simulation data sets. *Süleyman Demirel Üniversitesi Sağlık Bilimleri Dergisi* **11**: 144–151.



**Erick Morales Bonilla** es licenciado en Actuaría por la Universidad Autónoma de Querétaro, donde se graduó en 2023. Cuenta con certificaciones de la Society of Actuaries, habiendo aprobado los exámenes P (Probabilidad) y FM (Matemáticas Financieras). Actualmente se desempeña como Especialista de Datos Senior en Traxión, donde colabora en el desarrollo de infraestructura

de datos, la implementación de modelos de optimización e inteligencia artificial, así como en la generación de reportes de inteligencia de negocios.

Entre 2024 y 2025 trabajó como Científico de Datos en Turing, participando en un proyecto conjunto con Google para el entrenamiento del modelo de lenguaje Gemini, enfocado en tareas de análisis, modelado y evaluación de resultados en ciencia de datos.

De 2022 a 2024 formó parte de Accumetrica Quantitative Research, donde lideró el diseño de pipelines de datos, la creación de bases relacionales y el desarrollo de soluciones de inteligencia de negocio con enfoque en análisis de mercado.



**Denise Gómez Hernández** se doctoró en Ciencias Actuariales por la Bayes Business School (antes Cass Business School). También es maestra en Ciencias Actuariales por la Herriot Watt University. Denise estudió Actuaría en la Universidad de las Américas Puebla. Desde 2008 y hasta la actualidad, se desempeña como profesora e investigadora de tiempo completo en la Universidad

Autónoma de Querétaro.

Da clases de modelos actuariales para el seguro de vida, teoría del interés y pensiones privadas a nivel licenciatura y de Métodos Cuantitativos a nivel posgrado. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadoras e Investigadores Nivel II y es líder del Cuerpo Académico “Gestión Tecnológica y Financiera”.

A nivel profesional, trabajó como consultora actuarial en Towers Perrin, Sungard y la OCDE; y como jefa de unidad en el área de riesgos financieros en CONSAR. Sus líneas de investigación incluyen modelos actuariales en pensiones y análisis de indicadores financieros.





# ACTUARIOS TRABAJANDO

## Diseño de un seguro de gastos médicos para los beneficiarios de la Cruz Roja

Mariel Pérez Villagrán y Diego Oliver Azuela



# Diseño de un seguro de gastos médicos para los beneficiarios de la Cruz Roja

Mariel Pérez Villagrán<sup>\*,1</sup> y Diego Oliver Azuela<sup>†,2</sup>

\*Profuturo, †Seguros Monterrey New York Life

**RESUMEN** La Cruz Roja Mexicana, institución humanitaria no gubernamental, brinda servicios de atención médica a toda la comunidad que presenta problemáticas de salud, enfermedades o lesiones por accidentes. En este estudio, se aplicarán diferentes técnicas referentes al cálculo actuarial y seguros para realizar un producto enfocado en asegurar urgencias y consultas que tendrá como objetivo principal generar ingresos económicos adicionales para que la institución cuente con los recursos necesarios para hacer frente a los gastos ocasionados por los servicios que ofrece. La población a la que está dirigido el producto es a personas de clase baja alta a media.

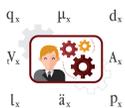
## Palabras clave

Seguro para urgencias, prima de riesgo, cálculo actuarial.

Derechos reservados © 2025 por el Colegio Nacional de Actuarios  
Última actualización del manuscrito: 29 de mayo de 2025  
Artículo formateado por Gerardo Kenjiro Otake Escobar y Diego Bezai Nava Ramos, elaborado por los autores y comunicado por Ma. de Lourdes Díez Gutiérrez Igartúa. La visión y comentarios contenidos en este documento corresponden exclusivamente a su autor y, por tanto, son ajenos a cualquier entidad pública o privada, incluyendo aquella para la que actualmente colabora. El CONAC no recomienda ni respalda el uso de la información proporcionada en este estudio. El CONAC no ofrece ninguna garantía, expresa o implícita, ni representación de ningún tipo y no asume ninguna responsabilidad en relación con el uso o mal uso de este trabajo.

<sup>1</sup>Correo electrónico: [mariel.perez1@profuturo.com.mx](mailto:mariel.perez1@profuturo.com.mx)

<sup>2</sup>Correo electrónico: [diego.oliverazu@gmail.com](mailto:diego.oliverazu@gmail.com)



## 1. INTRODUCCIÓN

La Cruz Roja Mexicana es una institución no gubernamental de asistencia humanitaria que tiene un papel muy importante en la sociedad por medio de apoyo en situaciones de emergencia y desastres, y servicios de salud. Su misión abarca desde la atención a víctimas de accidentes hasta la respuesta a grandes catástrofes, según dice la Cruz Roja Mexicana (2023, 2024b). Sin embargo, en los últimos años ha enfrentado desafíos financieros significativos que amenazan su capacidad operativa. Este estudio propone el diseño de un seguro de gastos médicos para urgencias y consultas, como una solución para generar ingresos adicionales y garantizar la estabilidad financiera de la organización.

Normalmente, el funcionamiento de la Cruz Roja Mexicana ha dependido de donaciones privadas, aportaciones voluntarias y eventos de recaudación de fondos para financiar sus operaciones. Sin embargo, desde 2020, la colecta nacional anual se suspendió debido a la pandemia de COVID-19, lo que redujo significativamente sus ingresos. Según Medrano (2023), esta situación ha llevado a que doce de las 30 delegaciones en el Estado de México estén en riesgo de cierre por falta de recursos financieros.

En el año 2024, se llevó a cabo la colecta nacional “Todos Somos Héroes” del 21 de febrero al 31 de mayo, pero su alcance no fue el mejor debido a que únicamente se podían hacer aportaciones dentro de la página web de la organización y vía bancaria, reduciendo su alcance (vea Cruz Roja Mexicana (2024a)). Además, la institución ha enfrentado una disminución en el apoyo gubernamental y empresarial. El gobierno actual ha optado por retirar ciertas ayudas, y las contribuciones de empresarios han disminuido. De acuerdo con Celis (2023), esta combinación de factores ha resultado en una caída de hasta el 70 % en los fondos recaudados.

La propuesta de diseñar un seguro de gastos médicos es atractiva por varias razones. Primero, ofrece una fuente de ingresos sostenible que puede reducir la dependencia de la Cruz Roja Mexicana de donaciones y apoyo gubernamental. Se puede ofrecer un producto accesible para personas de clase baja alta y media, que de acuerdo con las estadísticas experimentales del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (2021) son las personas que tienen un ingreso mensual desde los \$12,977 hasta \$23,451, ampliando la base de usuarios y generando ingresos recurrentes. Este enfoque no sólo fortalece la estabilidad financiera de la institución, sino que también amplía el acceso a servicios médicos para poblaciones que de otro modo podrían carecer de cobertura adecuada o tendrían que enfrentar las deficiencias del sector salud público del país. Al incluir cobertura para urgencias médicas y consultas generales, el producto garantiza atención inmediata en situaciones críticas, al tiempo

que fomenta un monitoreo constante de la salud de los usuarios. Este estudio, mediante el uso de herramientas de probabilidad, estadística, finanzas y cálculo actuarial, busca crear un modelo viable que responda a esta necesidad, garantizando que la Cruz Roja Mexicana pueda continuar su labor en beneficio de la sociedad y ofreciendo cobertura médica de calidad y accesible a los mexicanos.

### Planteamiento del problema

El problema se plantea a partir de la reciente disminución en los ingresos financieros de la Cruz Roja, lo que ha generado dificultades en la prestación de sus servicios y ha afectado la salud de la población mexicana. Ante esta situación, resulta viable proponer un seguro de gastos médicos dirigido a la clase baja alta y media en México, con el propósito de contribuir a la cobertura de los gastos operativos de la institución y garantizar la continuidad de sus servicios.

### Justificación

La implementación de un modelo que genere flujos financieros adicionales para la Cruz Roja Mexicana, mediante un seguro de gastos médicos accesible para la población a la que brinda atención, fortalecería su estabilidad económica y garantizaría la continuidad de sus operaciones. Esta iniciativa contribuiría a la sostenibilidad de sus servicios, permitiendo una prestación eficiente y oportuna de la atención médica, en beneficio de los sectores más vulnerables de la sociedad.

### Objetivos

El objetivo principal de este proyecto es generar ingresos adicionales para la Cruz Roja Mexicana mediante la implementación de un seguro de gastos médicos dirigido a los sectores de clase baja alta y media, con el fin de fortalecer su estabilidad financiera, y que garantice la accesibilidad y continuidad de los servicios para los beneficiarios.

## 2. MARCO TEÓRICO

### Modelos de valores extremos heterogéneos en el cálculo de la prima del seguro

El trabajo de fin de máster de Esteban (2022), desarrollado en el departamento de cuantificación de riesgos de la Universitat Politècnica de Catalunya–Universitat de Barcelona, se enfoca en mejorar la modelización de los costos siniestros en seguros, especialmente aquellos de carácter extremo. Estos eventos, difíciles de capturar con modelos tradicionales como la distribución Gamma o log-Normal, representan un reto clave para establecer tarifas que reflejen adecuadamente el riesgo asegurado.



Para abordar esta problemática, Esteban propone un modelo estadístico basado en la distribución generalizada de Pareto, ajustada para manejar datos truncados e inflados a cero, aplicado a una cartera de seguros de automóvil. El modelo consta de dos componentes: una distribución binomial para estimar la proporción de siniestros extremos y una distribución Pareto para calcular el costo medio de estos. Además, se emplea una distribución binomial negativa para modelar la frecuencia de los siniestros.

Uno de los principales aportes del estudio es la mejora en la precisión de las estimaciones tarifarias al capturar adecuadamente la severidad de los eventos extremos, superando las limitaciones de los modelos usuales con colas ligeras. A través de ejemplos prácticos, Esteban demuestra cómo su enfoque ofrece una herramienta más robusta para el diseño de tarifas, lo que representa un avance significativo en la gestión del riesgo financiero en el sector asegurador. Su investigación no sólo aporta una solución metodológica innovadora, sino que también fortalece la toma de decisiones en la elaboración de tarifas más justas y ajustadas al riesgo real.

### Ejemplos de proyectos de medicina prepagada en América Latina Plan de intervención Sani Salud en Casa IPS S.A.S.

La medicina prepagada en Colombia es un modelo de aseguramiento de salud que permite que los usuarios accedan a servicios médicos a cambio de un pago anticipado, ya sea mensual o anual, a una entidad específica. Este sistema busca ofrecer a los usuarios un acceso más ágil y eficiente a servicios de salud, en comparación con el sistema de salud pública tradicional. La medicina prepagada comenzó a consolidarse en este país a partir de la década de 1990 con la Ley 100 de 1993. Este modelo permite a los afiliados acceder a una variedad de servicios médicos que incluyen consultas, exámenes, hospitalización y atención de urgencias. La principal ventaja de este servicio es la rapidez y eficiencia en el acceso a la atención médica, lo que minimiza las esperas que a menudo se experimentan en el sistema público de salud.

Entre las características más destacadas de la medicina prepagada se encuentra la posibilidad de elegir entre una red de profesionales y centros de salud. Esta flexibilidad permite a los afiliados recibir atención de acuerdo con sus preferencias y necesidades específicas. Además, muchas entidades han incorporado modalidades de atención a distancia, como teleconsultas, especialmente en respuesta a la pandemia de COVID-19. Es importante tener en cuenta que, a pesar de las amplias coberturas que ofrecen los planes de este servicio, existen limitaciones y exclusiones que pueden aplicar a algunos tratamientos o condiciones preexistentes. Por lo tanto, antes de optar por un plan, los usuarios deben informarse adecuadamente sobre las

condiciones que aplican.

La medicina prepagada en Colombia ha crecido significativamente en los últimos años, siendo un componente crucial del sistema de salud del país. Según datos de la Superintendencia de Salud, en 2019 había aproximadamente 1,520,496 personas afiliadas a este servicio. Este aumento en la afiliación refleja la preferencia de los colombianos por alternativas que les brinden un acceso más ágil a la atención médica. Según Neissa (2021), a pesar de la crisis sanitaria de la COVID-19, la cobertura de salud en el país se mantuvo alta, alrededor del 97.81 %, lo que indica que el servicio ha sabido adaptarse y sostener su relevancia frente a los desafíos presentados.

### Análisis de cobertura de medicina prepagada en Pichincha (2019–2020)

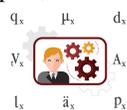
Este artículo analiza la situación de la medicina prepagada en la provincia de Pichincha, Ecuador. En esa entidad, se han registrado 17 compañías de medicina prepagada, incluyendo el Instituto Ecuatoriano de Seguridad Social. A pesar de la considerable generación de ingresos, que suma 581 millones de dólares entre 2019 y 2020, estas compañías sólo alcanzan a cubrir aproximadamente el 15 % de la población con ingresos medio-altos. Este dato muestra la baja penetración del modelo de medicina prepagada en comparación con las evidentes necesidades de atención médica de la población.

Los resultados muestran que, de cada 100 habitantes, sólo 48 tienen acceso a un seguro de atención médica, y de estos, 15 son beneficiarios de medicina prepagada. Más preocupante es el hecho de que más de la mitad de la población carece de cualquier tipo de cobertura médica, lo que les obliga a recurrir a los servicios del Ministerio de Salud Pública o a fundaciones de beneficencia para recibir atención. Esta realidad indica que, aunque la medicina prepagada ha proporcionado una opción viable para una parte de la población, su cobertura efectiva es limitada, dejando a muchos sin acceso a atención adecuada.

La cultura de aseguramiento en la población parece estar marcada por una desconfianza general hacia los seguros de salud, un factor que complica aún más la situación. Según Ortiz et al. (2021), la alta proporción de la población que no tiene acceso a medicina prepagada, representando un 51.8 %, sugiere que las personas no disponen de los recursos suficientes para acceder a estos servicios de salud, lo que acentúa su dependencia de la atención pública.

### Análisis de valores extremos de la Cruz Roja

Nuestro primer paso consistió en elaborar un análisis estadístico de valores extremos a los datos operativos de la Cruz Roja Mexicana, específicamente al registro mensual de costos por atención médica urgente. El objetivo fue identificar la dis-



tribución que mejor se ajusta a los datos y permite caracterizar adecuadamente la severidad y frecuencia de los eventos.

- **Severidad:** Se encontró que los datos presentan colas pesadas, lo que justifica el uso de la distribución Generalizada de Pareto (DGP) para modelar los costos más elevados. Esta distribución permitió identificar la probabilidad de ocurrencia de siniestros de alto impacto económico.
- **Frecuencia:** El conteo mensual de eventos se ajustó bien a una distribución binomial negativa, lo que refleja la alta dispersión en la cantidad de atenciones urgentes por mes.
- **Aplicación:** Estos resultados fueron fundamentales para proponer un esquema de tarificación más robusto, al permitir cuantificar con mayor precisión el riesgo asociado a la operación de los servicios médicos.
- **Limitaciones:** Se identificó una alta variabilidad estacional, por lo que se recomienda actualizar periódicamente el análisis, considerando ajustes por época del año y eventos extraordinarios como pandemias o desastres naturales.

A partir de eso, y sustentados en el artículo de Pérez (2022), concluimos que el uso de modelos de valores extremos mejora significativamente la capacidad de la Cruz Roja para diseñar productos de seguro con coberturas realistas y sostenibles, y para tomar decisiones informadas sobre la asignación de recursos y la planificación presupuestaria.

### Marco conceptual de la investigación

A continuación describimos los elementos clave que sustentan la metodología de diseño del producto.

**Cálculo actuarial.** Es el conjunto de herramientas matemáticas y estadísticas que permite evaluar riesgos, diseñar tarifas y garantizar la solvencia financiera de los productos de seguro. Se basa en teoría de probabilidades, inferencia estadística y modelos estocásticos.

**Prima de Riesgo.** La prima de riesgo es el valor esperado de los siniestros que se espera cubrir durante un periodo determinado. Representa la parte técnica y fundamental de la prima, calculada exclusivamente en función de la probabilidad de ocurrencia de los eventos asegurados y el costo promedio asociado a ellos Promislow (2014).

Matemáticamente, la prima se define como:

$$\text{Prima Pura o de Riesgo} = \mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N] \times \mathbb{E}[X] \quad (1)$$

Donde:

- $\mathbb{E}[N]$  es la frecuencia esperada de los siniestros
- $\mathbb{E}[X]$  es la severidad esperada, es decir, el costo promedio por siniestro

**Prima de Tarifa.** La prima de tarifa es el monto total que se cobra al asegurado por el servicio de aseguramiento. Esta prima no solo contempla el valor esperado de los siniestros, sino también un margen adicional que permite cubrir otros costos asociados a la operación del seguro, como los gastos administrativos, provisiones para eventos extremos y un posible margen de utilidad. La fórmula utilizada para calcularla es:

$$\text{Prima Tarifa} = \text{Prima de Riesgo} \times (1 + \text{Margen de Costo}),$$

donde el Margen de Costo es un porcentaje adicional aplicado sobre la prima de riesgo, destinado a cubrir otros costos no relacionados directamente con los siniestros. Incluye gastos operativos, reservas, carga administrativa y posibles ganancias.

**Modelo de medicina prepagada.** Según la Organización Panamericana de la Salud (2018), es un esquema donde el usuario paga una cuota fija por anticipado a cambio de acceso a servicios médicos básicos, sin considerar un esquema de mutualización del riesgo como en un seguro tradicional. Vea la tabla 1.

**Costo esperado del usuario.** El costo anual esperado por usuario se calcula como:

$$C_{\text{esperado}} = n \times C_{\text{servicio}},$$

donde:

- $C_{\text{esperado}}$ : es el costo total esperado por usuario en un año.
- $n$ : es el número estimado de servicios utilizados por el usuario en un año.
- $C_{\text{servicio}}$ : es el costo promedio de cada servicio.

**Cuota con margen de seguridad.** Para garantizar la sostenibilidad del modelo, se agrega un margen de seguridad  $\alpha$ :

$$C_{\text{total}} = C_{\text{esperado}} + (C_{\text{esperado}} \times \alpha)$$

donde:

- $C_{\text{total}}$ : es la cuota total anual ajustada con margen de seguridad.
- $\alpha$ : es el porcentaje de margen de seguridad.

**Distribución Generalizada de Pareto.** Es clave para modelar eventos extremos. Su función de distribución acumulada es:

$$F(x; \mu, \sigma, \xi) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi(x-\mu)}{\sigma}\right)^{-1/\xi}, & \xi \neq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right), & \xi = 0. \end{cases}$$

**Esperanza bajo DGP.**

$$\mathbb{E}[X] = \mu + \frac{\sigma}{1-\xi}, \quad \text{si } \xi < 1.$$



■ **Tabla 1** Diferencias clave entre un seguro de salud y medicina prepagada.

Característica	Seguro de Gastos Médicos	Medicina Prepagada
Riesgo	Compartido entre aseguradora y asegurados	Sin mutualización; el usuario cubre el costo fijo
Costo	Variable; depende del siniestro	Fijo; por cuota mensual o anual
Uso	Se activa ante un evento cubierto	Acceso constante a servicios definidos
Regulación	Supervisado por la CNSF	No siempre regulado como seguro

**Varianza bajo DGP.**

$$\text{Var}(X) = \frac{\sigma^2}{(1-\xi)^2(1-2\xi)}, \quad \text{si } \xi < 0.5.$$

**Varianza total del riesgo agregado.** La varianza del total de siniestros  $S$  es:

$$\text{Var}(S) = \mathbb{E}[N] \cdot \text{Var}(X) + \text{Var}(N) \cdot (\mathbb{E}[X])^2,$$

**Prima de tarifa ajustada por riesgo.** Considera un ajuste adicional:

$$\text{Tarifa Ajustada} = \mathbb{E}[S] + z_{1-\epsilon} \cdot \sqrt{\text{Var}(S)},$$

donde  $z_{1-\epsilon}$  es el cuantil de la distribución Normal estándar asociado al nivel de confianza  $1 - \epsilon$ .

**Capital inicial.** Se estima para garantizar solvencia ante eventos extremos:

$$U_0 = \Phi^{-1}(1 - \epsilon) \cdot \frac{\sigma[S]}{1 + i},$$

donde  $\epsilon$  es la probabilidad de ruina,  $i$  la tasa de interés y  $\sigma[S]$  la desviación estándar del costo total.

**Ejemplo en R.** El siguiente código ajusta una DGP sobre datos de siniestros extremos:

```
# Librerías
install.packages("evd")
library( evd )
install.packages("extRemes")
library( extRemes )

# Datos (excesos sobre umbral)
residuales <- c(0, 4000, 14000, 14000)

# Ajuste DGP
ajuste<-fevd(residuales,type="GP",threshold=0)
summary(ajuste)
```

Este listado en R estima los parámetros  $\sigma$  y  $\xi$  sobre los datos y permite obtener la esperanza.



**Relación con la propuesta de seguro**

El marco conceptual actuarial permite estructurar un producto de medicina prepagada viable para la Cruz Roja Mexicana. La aplicación de distribuciones de colas pesadas como la DGP permite estimar adecuadamente la frecuencia y severidad de incidentes de alto costo. El cálculo de la prima incorpora no sólo el valor esperado de siniestros, sino también ajustes por gastos, incertidumbre y solvencia. La metodología asegura que el producto pueda ofrecer cobertura adecuada a personas de clase media y baja-alta sin comprometer la estabilidad financiera de la institución. Nuestra meta es ajustar la tarifa a distintos perfiles de riesgo, haciendo el esquema más justo y equitativo. Esto refuerza la viabilidad técnica del modelo, ofreciendo un producto solidario, accesible y sostenible.

### 3. METODOLOGÍA

**Estrategia de la investigación**

La investigación es de tipo cuantitativo, con un enfoque descriptivo orientado a modelar el comportamiento de los eventos extremos registrados en los servicios médicos brindados por la Cruz Roja Mexicana. Para ello, se emplean técnicas actuariales y estadísticas que permiten analizar los datos históricos, estimar la frecuencia y severidad de los siniestros, y calcular la prima correspondiente al seguro propuesto. Además, el estudio incorpora un componente exploratorio al integrar modelos de valores extremos que no son de uso común en la práctica actuarial local. La figura 1 resume estas ideas.

**Alcance de la investigación**

El alcance de este estudio es de tipo cuantitativo, ya que se busca medir y analizar numéricamente la frecuencia y la severidad de los eventos extremos registrados en los servicios médicos de la Cruz Roja en Naucalpan durante el año 2023. A partir de esta información, se propone el diseño de una prima de tarifa adecuada para un seguro de gastos médicos.

El estudio es de tipo no experimental, ya que se utilizarán



Figura 1 Dimensiones metodológicas del estudio.

datos históricos sin manipular las variables originales, y de corte transversal, dado que se analizan los eventos y costos ocurridos exclusivamente durante un periodo específico: el año 2023.

Además, se integra un enfoque longitudinal en el tratamiento de los datos mensuales con el fin de captar variaciones temporales que permitan evaluar la estacionalidad de los siniestros. Para lograr este análisis, se retoma la base de datos elaborada previamente por los autores, donde se registran servicios como certificados médicos, consultas generales, urgencias médicas y cirugías.

Esta investigación también contempla el uso de herramientas actuariales avanzadas para modelar el comportamiento de eventos de alto costo, como el uso de distribuciones de Pareto generalizada y las recomendaciones de Bühlmann para obtener una prima de tarifa. El objetivo es proporcionar un producto viable y técnicamente sustentado para generar ingresos a la Cruz Roja, asegurando al mismo tiempo la accesibilidad y sostenibilidad del seguro propuesto.

### Procedimiento

El desarrollo de esta investigación se llevó a cabo a través de un enfoque estructurado por etapas. En primer lugar, se recopiló información de fuentes secundarias, específicamente el registro mensual de servicios médicos prestados por la Cruz Roja Mexicana en Naucalpan durante el año 2023.

Posteriormente, se clasificaron los servicios según su tipo y costo para identificar aquellos eventos considerados como extremos, definidos como aquellos cuyo valor excede el percentil 95 de los costos observados. A partir de esta selección, se calcularon las métricas de frecuencia y severidad de los eventos

extremos.

Una vez cuantificadas estas variables, se procedió al ajuste de una DGP sobre los excesos, utilizando software estadístico especializado. Con los parámetros estimados, se calculó la severidad esperada y, junto con la frecuencia, se estimó la prima pura de riesgo.

Finalmente, se aplicaron ajustes adicionales para determinar la prima de tarifa, incluyendo el margen de costos y el cálculo del capital requerido. Esta información permitió proponer un producto de seguro financieramente viable, técnica y socialmente fundamentado.

**Análisis de datos sobre costos** El análisis de datos es fundamental dentro de esta investigación, ya que permite identificar patrones, relaciones y características clave en la información histórica de la Cruz Roja Mexicana en una entidad y año específicos. Para este estudio, partimos del análisis de la información provista por la Cruz Roja en Naucalpan acerca de sus servicios durante 2023. Esta base de datos resultó de gran utilidad para estimar la frecuencia y severidad de los siniestros ocurridos.

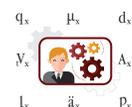
- **Fuente de datos:** Reporte mensual de servicios 2023 en Naucalpan.
- **Concepto:** Lista de 33 servicios ofrecidos por la institución, incluyendo certificados médicos, consultas, urgencias y cirugías.
- **Meses:** Datos desglosados por los 12 meses del año.
- **Totales:** Cada servicio incluye el número total de atenciones mensuales.

La tabla 2 presenta los precios de los servicios. Este arreglo incluye los costos más representativos de los procedimientos y consultas médicas. Estos valores fueron recopilados de diversas fuentes disponibles, ajustados a valores actuales.

La tabla 3 presenta la distribución mensual de atenciones por tipo de servicio en 2023.

Se realizó un análisis de reclamaciones agregadas al multiplicar el costo de cada servicio por su frecuencia mensual. Esto permitió estimar el impacto económico total anual de los servicios brindados por la Cruz Roja en Naucalpan. El resultado obtenido para 2023 fue de \$23,023,880.00. Esta cifra refleja los costos que implicaron dichos servicios para la institución durante ese año.

**Obtención de la población.** Para estimar la población objetivo del producto, se utilizó información de diversas fuentes oficiales y bases de datos actualizadas. En primer lugar, se recopiló el dato de la población total en el municipio de Naucalpan, la cual, según el [Gobierno de México \(2020\)](#) asciende a 834,434 habitantes. A partir de ello, se identificaron cinco categorías sociales según el grado de vulnerabilidad y nivel socioeconómico. El resultado se muestra en la tabla 4.



■ **Tabla 2** Costos representativos por servicio ofrecido.

Concepto	Costo (MXN)	Concepto	Costo (MXN)
Certificado médico	\$120.00	Cirugía menor	\$21,000.00
Consulta de medicina general	\$120.00	Partos	\$10,400.00
Urgencias médicas	\$200.00	Cesáreas	\$13,800.00
Urgencias quirúrgicas	\$1,000.00	Sala de labor	\$12,000.00
Sala de choque	\$300.00	Hospitalización	\$1,000.00
Curaciones	\$300.00	Defunciones	\$1,000.00
Retiro de puntos	\$300.00	Traslados	\$3,450.00
Consulta oftalmológica	\$400.00	Análisis clínicos	\$270.00
Consulta ginecológica	\$300.00	Banco de sangre	\$490.00
Consulta ortopedia	\$200.00	Rayos X	\$200.00
Consulta pediátrica	\$350.00	Ultrasonidos	\$200.00
Consulta dental	\$60.00	Papanicolaou	\$220.00
Cirugía de ortopedia	\$35,000.00	Toma de presión	\$40.00
Consulta cirugía general	\$120.00	Inyecciones	\$80.00
Cirugía ginecológica	\$25,000.00	Sueros	\$850.00
Cirugía mayor	\$35,000.00	Férulas	\$100.00
		Suturas	\$150.00

De acuerdo con los objetivos del estudio, se consideró como población potencial a los habitantes desde pobreza extrema hasta clase baja-alta, lo cual representa un total aproximado de 355,469 personas. Adicionalmente, se investigaron los rangos de ingresos mensuales para cada grupo socioeconómico con base en los datos del [Consejo Nacional Evaluador \(2020\)](#). Esta

información fue esencial para evaluar la viabilidad económica del producto, y se presenta en la tabla 5.

#### Cálculo de la prima

**Obtención de supuestos de cálculo.** Al tratarse de un seguro de gastos médicos que se enfoca en valores extremos, es decir,



■ **Tabla 3** Frecuencia de siniestros de la Cruz Roja de Naucalpan de enero a junio de 2023.

Concepto	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre	Total
Certificado médico	1192	1139	591	363	395	483	833	6774	4442	977	633	317	18,139
Consulta de medicina general	1257	990	1139	1056	1317	1289	1352	1335	1180	1339	1088	1328	14,670
Urgencias médicas	443	398	493	509	452	434	413	443	456	407	355	464	5267
Urgencias quirúrgicas	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Sala de choque	8	1	7	4	7	5	7	10	9	14	7	7	86
Curaciones	205	192	228	221	225	218	280	236	232	262	226	235	2760
Retiro de puntos	179	148	161	159	177	163	177	201	180	196	169	171	2081
Consulta oftalmológica	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Consulta ginecológica	6	4	5	1	1	1	0	1	2	0	2	1	24
Consulta ortopédica	212	119	188	134	378	235	197	144	301	164	143	432	2637
Consulta pediátrica	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Consulta dental	41	35	38	32	30	56	62	34	32	36	40	32	468
Consulta cirugía general	2	1	2	3	2	6	0	3	4	4	2	4	33
Cirugía mayor	2	2	0	0	2	3	1	3	5	5	3	4	30
Cirugía menor	7	17	11	15	6	4	8	10	9	9	6	5	107
Partos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

■ **Tabla 4** Distribución de habitantes por clase social en Naucalpan. Fuentes: Martínez (2022); Consejo Nacional Evaluador (2020); Tege (2023); García Zaballos *et al.* (2025); Melgar Manzanilla y García (2025).

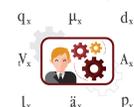
Clase Social	Porcentaje de la Población	Habitantes Aproximados
Pobreza extrema	4.90 %	40,887
Pobreza moderada	22.70 %	189,417
Clase baja-alta	15.00 %	125,165
Clase media	52.40 %	437,243
Clase alta	5.00 %	41,722

■ **Tabla 5** Rangos de ingresos mensuales por clase social en México.

Clase Social	Mínimo (MXN)	Máximo (MXN)
Pobreza extrema	\$0.00	\$2,740.00
Pobreza moderada	\$2,740.01	\$10,000.00
Clase baja-alta	\$10,000.01	\$22,300.00
Clase media	\$22,300.01	\$100,000.00
Clase alta	\$100,000.01	—

los servicios que implican un costo significativamente más alto que otros, se obtuvo el percentil 95 y trabajar con los que sean iguales o mayores a él. Primeramente, se acomodaron los costos de los servicios ofrecidos por la de menor a mayor. Lo siguiente fue usar la fórmula del percentil 95 que únicamente es multiplicar el número de datos (33) por el percentil dividido entre 100, obteniendo 31.35. Por consecuencia, los únicos siniestros que cubrirá el seguro son los mayores a \$21,000. Los resultados aparecen en la tabla 6.

**Cálculo de probabilidad de frecuencia.** Una vez identificados los eventos extremos de los datos, se cuantificó la frecuencia de su ocurrencia. Para esto, se contaron 284 siniestros extremos registrados en 2023. La población expuesta se estimó en 355,469



n	costos (\$)
1	40.00
2	60.00
3	80.00
4	100.00
5	120.00
6	120.00
7	120.00
8	150.00
9	200.00
10	200.00
11	200.00
12	200.00
13	220.00
14	270.00
15	300.00
16	300.00
17	300.00
18	300.00
19	350.00
20	400.00
21	490.00
22	850.00
23	1,000.00
24	1,000.00
25	1,000.00
26	3,450.00
27	10,400.00
28	12,000.00
29	13,800.00
30	21,000.00
31	25,000.00
32	35,000.00
33	35,000.00

■ **Tabla 6** Costos asociados a cada evento identificado. Elaboración propia

personas. Con esta información, se calculó la probabilidad de frecuencia utilizando la siguiente fórmula:

$$\mathbb{P}(\text{frecuencia}) = \frac{\text{No. de eventos extremos registrados}}{\text{Población expuesta}}$$



Servicio	Costo (MXN)
Cirugía de Ortopedia	\$35,000
Cirugía Mayor	\$35,000
Cirugía Ginecológica	\$25,000
Cirugía Menor	\$21,000

■ **Tabla 7** Servicios cubiertos por el seguro (arriba del percentil 95). Elaboración propia.

$$= \frac{284}{355,469} = 0.0799 \%$$

Este resultado refleja la probabilidad de que una persona que pertenece a esa población se encuentre frente a un evento extremo, lo que indica una baja frecuencia que es coherente con la naturaleza de ese tipo de siniestros.

**Cálculo de severidad esperada.** El resultado del cálculo de la severidad excedente esperada se obtuvo por medio del ajuste de una distribución Generalizada de Pareto. Se empleó el código en R y las fórmulas descritas en la sección 2. Para este análisis, se consideró un umbral de \$21,000, modelando únicamente los montos que superan esa cantidad. Por medio del ajuste de la distribución en R, se obtuvieron los siguientes parámetros:

- Parámetro de forma ( $\epsilon$ ):  $-1.676$ .
- Parámetro de escala ( $\sigma$ ):  $23,466$ .
- Parámetro de ubicación ( $\mu$ ):  $0$  (fijado, ya que los datos ya representan los excesos sobre el umbral).

Con base en esa información, se estimó la severidad excedente, es decir, el valor promedio que se esperaría cubrir por parte de la Cruz Roja ante un evento extremo. El resultado obtenido fue de \$8,768.69.

- Frecuencia:  $0.0799 \%$ .
- Severidad excedente esperada:  $\$8,768.69$ .
- Prima pura de riesgo estimada:  $\$7.01$ .

Este valor representa el monto que cada persona de la población expuesta debería pagar para cubrir el costo de los eventos extremos identificados.

**Prima de riesgo.** La prima de riesgo es el valor esperado de los siniestros que se espera cubrir durante un periodo determinado. De acuerdo con el capítulo 17 en el libro de Promislow (2014), representa la parte técnica y fundamental de la prima, calculada exclusivamente en función de la probabilidad de ocurrencia de los eventos asegurados y el costo promedio asociado a ellos.

Matemáticamente, la prima se define como

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X],$$

donde  $\mathbb{E}[N]$  es la frecuencia esperada de los siniestros,  $\mathbb{E}[X]$  es la severidad esperada, es decir, el costo promedio por siniestro.

**Prima de tarifa.** Se trata del monto total que se cobra al asegurado por el servicio de aseguramiento. Esta prima no sólo contempla el valor esperado de los siniestros, sino también un margen adicional que permite cubrir otros costos asociados a la operación del seguro, como los gastos administrativos, provisiones para eventos extremos y un posible margen de utilidad. La fórmula utilizada para calcularla es Prima de Tarifa = Prima de Riesgo · (1 + Margen de Costo), donde el Margen de Costo es un porcentaje adicional aplicado sobre la prima de riesgo, destinado a cubrir otros costos no relacionados directamente con los siniestros. Este margen incluye gastos operativos, reservas, carga administrativa y posibles ganancias.

#### Modelo de medicina prepagada

Según la Organización Panamericana de la Salud (2018), la medicina prepagada es un esquema en el que los usuarios pagan anticipadamente una cuota fija para acceder a ciertos servicios médicos, funcionando de manera similar a un seguro de salud, pero sin el concepto de riesgo compartido de la póliza tradicional. La cercanía entre el ingreso esperado y el costo de los siniestros extremos podría indicar que la prima de riesgo obtenido tiene sentido y que refleja correctamente el riesgo. La tabla 8 muestra las diferencias entre los modelos de medicina prepagada y los seguros de gastos médicos.

Característica	Seguro de Gastos Médicos	Medicina Prepagada
Riesgo	Compartido entre asegurados y aseguradora	El usuario paga por acceso, no por riesgo
Costo	Variable, depende del siniestro	Fijo, basado en cuotas
Uso	Se paga cuando ocurre un siniestro	Se puede usar de manera frecuente
Regulación	Supervisado por la CNSF	No siempre está regulado como seguro

■ **Tabla 8** Diferencias clave con un seguro de salud.

#### Recomendación de Bühlmann: Cálculo de capital inicial y Prima de tarifa

Con base en las fórmulas que presentamos en la sección 2, se calcularon dos elementos esenciales en el marco del modelo

de Bühlmann, los cuales son el capital inicial requerido y la prima de tarifa ajustada por riesgo. El capital Inicial representa la cantidad de fondos que debe tener el asegurador para cubrir las reclamaciones con una alta probabilidad de solvencia. En este caso, se utilizó una probabilidad de ruina ( $\epsilon$ ) del 1 %. Tras aplicar los valores respectivos, se determinó que el capital inicial requerido es

$$u = 70,832.22 \cdot \sqrt{\frac{|\ln(0.01)|}{2(0.10)}} = \$339,890.27.$$

Por lo tanto, la prima de tarifa que debe cobrarse a cada asegurado es de \$246.36, garantizando la sostenibilidad técnica y financiera del seguro ofrecido. Los resultados obtenidos pueden verse en la tabla 9.

Concepto	Valor (\$)
$\mathbb{E}[X]$	7.01
$\mathbb{E}[N]$	284.00
$\text{Var}[X]$	17,666,163.24
$\text{Var}[N]$	283.77
$\text{Var}[S]$	5,017,204,287.95
$u$	339,890.27
PRIMA DE TARIFA	246.36

■ **Tabla 9** Resumen de variables y resultados actuariales. Elaboración propia

#### Interpretación de resultados

Conforme a los resultados obtenidos, interpretamos que si se llegara a alcanzar a toda la población asegurada esperada, se lograría recaudar un total aproximado de \$87,574,898.00. Es importante mencionar que la prima de tarifa es 35.17 veces más grande que la prima de riesgo, lo cual genera una mayor volatilidad esperada en la distribución de los siniestros. Esto no sólo justifica el resultado de una prima de tarifa significativamente mayor a la pura, sino que también indica la necesidad de contar con un capital inicial suficiente. Para comprobarlo, se realizó el cálculo del percentil en el que la prima de tarifa acumulada es suficiente para cubrir las reclamaciones, además de considerar la incertidumbre asociada. El resultado fue el percentil 83, lo cual significa que en el 83 % de los escenarios posibles, tomar únicamente la prima de tarifa es suficiente para cubrir incluso los siniestros extremos.

## 4. CONCLUSIONES

Este trabajo logró desarrollar una metodología basada en fundamentos actuariales para la estimación de primas cuando



existe mucha incertidumbre. Por medio del análisis detallado de la siniestralidad y su volatilidad, se estableció un esquema tarifario que permite enfrentar riesgos extremos sin afectar la sostenibilidad financiera.

El modelo permitió no sólo establecer una prima técnicamente sólida, sino también calcular el capital de respaldo necesario para cubrir posibles escenarios adversos. La implementación de un análisis basado en percentiles aportó una perspectiva clara sobre la suficiencia de la prima frente a eventos extremos, lo cual es clave en la toma de decisiones en entornos donde los riesgos no son totalmente comunes o previsibles. Además, al contar con una prima estructurada sobre criterios actuariales y no sólo históricos o administrativos, se mejoró la transparencia y justificación de los costos frente a donantes y asegurados. En el contexto actual, en el que la Cruz Roja enfrenta desafíos económicos importantes, contar con una herramienta como esta permitiría evaluar mejor sus riesgos, proteger su sostenibilidad financiera y continuar cumpliendo con su labor humanitaria sin poner en riesgo su viabilidad operativa.

Como paso futuro, sería recomendable realizar un estudio para evaluar el grado de aceptación que tendría este producto en la población objetivo. Conocer la disposición e interés de las personas para adquirir este tipo de cobertura permitirá estimar con mayor precisión su viabilidad comercial. Este análisis no sólo ayudaría a dimensionar el alcance real que podría tener la propuesta, sino también a identificar ajustes necesarios para asegurar su éxito en la práctica.

## REFERENCIAS

- Celis, D., 2023 La Cruz Roja en crisis. El Financiero **Marzo**, Recuperado de [aquí](#).
- Consejo Nacional Evaluador, 2020 *Evolución de las Líneas de Pobreza por Ingresos*. Recuperado de, Recuperado de [aquí](#).
- Cruz Roja Mexicana, 2023 *Servicios*. Naucalpan de Juárez, Recuperado de [aquí](#).
- Cruz Roja Mexicana, 2024a *Colecta Nacional 2024*. Naucalpan de Juárez, Recuperado de [aquí](#).
- Cruz Roja Mexicana, 2024b *Reporte servicio médico urgencias 2024*. Base de datos interna.
- Esteban, H., 2022 *Modelos de valores extremos heterogéneos en el cálculo de la prima del seguro*. No publicado, CDMX, Disponible [aquí](#).
- García Zaballos, A., J. Marín, y X. Barragán Martínez, 2025 *Informe anual sobre la situación de pobreza y rezago social 2025. Naucalpan de Juárez*. Gobierno de México, Naucalpan de Juárez, Recuperado de: [aquí](#).
- Gobierno de México, 2020 *Naucalpan de Juárez: Economía, empleo, equidad, calidad de vida, educación, salud y seguridad pública*. Recuperado de [aquí](#).

Instituto Nacional de Estadística y Geografía, 2021 *Estadísticas experimentales: Cuantificando la clase media en México 2010-2020*. INEGI.

- Martínez, M., 2022 *¿Por qué hay carencias económicas en Naucalpan si es el municipio que más aporta al EdoMex?*. AD Noticias, Recuperado de [aquí](#).
- Medrano, D., 2023 *Por esta razón es posible que cierren 12 delegaciones de la Cruz Roja Mexicana en EdoMex*. Infobae, Recuperado de [aquí](#).
- Melgar Manzanilla, P. y E. García, 2025 Pobreza y salud mental en las entidades federativas de México: Relación basada en estadísticas de inegi y coneval. *Nomos: Procesalismo Estratégico* 2: 51–82.
- Neissa, J., 2021 *Plan de intervención Sani salud en casa IPS S. AS*. Biblioteca Digital Areandina, Recuperado de [aquí](#).
- Organización Panamericana de la Salud, 2018 *Modelos de financiamiento en salud en América Latina*. Organización Panamericana de la Salud, Recuperado de [aquí](#).
- Ortiz, O., C. Fernandez, y C. Pérez, 2021 Análisis de cobertura de medicina prepagada en Pichincha (2019-2020). *Revista Ciencia UNEMI* 15: 1–13.
- Promislow, S. D., 2014 *Fundamentals of Actuarial Mathematics*. John Wiley and Sons, Inc., NJ.
- Pérez, J. A., 2022 Análisis de la intensidad sísmica máxima mediante la teoría de valores extremos. *Ingeniería Investigación y Desarrollo* 22: 72–78.
- Tege, O., 2023 Dime cuánto ganas y te diré a qué clase social perteneces. *Expansión Digital junio*, Recuperado de [aquí](#).





**Mariel Pérez-Villagran** se graduó de la Licenciatura en Actuaría de la Universidad Anáhuac México. Durante su trayectoria universitaria, destacó no sólo por su desempeño académico, sino también por su liderazgo, al fungir como presidente de la Sociedad de Alumnos del Campus Sur de su Universidad durante la gestión 2023-2024, y como tesorera de la Federación de Sociedades de

Alumnos en el periodo 2024-2025.

Actualmente se desempeña como trainee en el área de pensiones del equipo actuarial en Profuturo, donde ha fortalecido sus conocimientos en estadística aplicada, enfocándose en temas de pricing y análisis de participación de mercado.



**Diego Oliver Azuela** se graduó de la Licenciatura en Actuaría de la Universidad Anáhuac México. Actualmente se desempeña como gerente de la promotoría Asesores KG en Seguros Monterrey New York Life, donde ha sido reconocido por su alto desempeño en ventas, incluyendo el primer lugar en pólizas emitidas y mayor prima pagada en eventos nacionales. Es aspirante a ser miembro de la Million Dollar Round Table

(MDRT), una distinción internacional que reconoce la excelencia en la industria aseguradora.

Ha combinado su experiencia profesional con una sólida formación académica, desarrollando un enfoque analítico y práctico en temas de seguros, riesgos y finanzas personales. Participa activamente en espacios de formación y liderazgo dentro del sector, y busca impulsar una nueva generación de asesores con visión ética, técnica y cercana a las necesidades reales de las personas.





# ACTUARIOS TRABAJANDO

## Análisis del Supuesto de Rotación

Ana Ma. del Pilar Montes Sánchez, César Adrián Hernández  
Viveros, Carmen Licona Barajas, José Miguel Hernández  
Martínez y Roberto Ángel Rocha López



## Análisis del Supuesto de Rotación

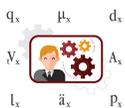
Ana Ma. del Pilar Montes Sánchez<sup>\*,1</sup>, César Adrián Hernández Viveros<sup>\*,2</sup>, Carmen Licona Barajas<sup>\*,3</sup>, José Miguel Hernández Martínez<sup>\*,4</sup>, y Roberto Ángel Rocha López<sup>\*,4</sup>

\*Grupo de trabajo de la Asociación Mexicana de Actuarios Consultores

**RESUMEN** Las tasas de rotación y jubilación influyen considerablemente en los costos de los planes de pensiones y médicos para jubilados. En México, hasta hace poco, no existía una tabla propia de rotación laboral, por lo que se adaptaban modelos extranjeros. Para subsanar esta carencia, la Asociación Mexicana de Actuarios Consultores creó el Grupo de Trabajo Tabla de Rotación, encargado de recopilar y analizar datos recientes sobre la rotación (por despido o separación voluntaria) y jubilación de empleados en empresas mexicanas de distintos tamaños, sectores y regiones, manteniendo la confidencialidad de la información. Entre los hallazgos destacan: no hay diferencias claras entre la rotación de hombres y mujeres; los despidos se mantienen estables hasta los 57 años, edad a partir de la cual aumentan, mientras que las separaciones voluntarias disminuyen hasta esa edad y luego se incrementan a los 60 y 65 años o más. El sector primario presenta menor rotación, a diferencia de los sectores de transporte y construcción, donde es más alta. Finalmente, no se observan diferencias significativas en la rotación entre empresas con y sin plan de pensiones.

### Palabras clave

Estructura de la base de datos, verificación de hipótesis, diseño de código de entidades, análisis estadístico



Derechos reservados © 2025 por el Colegio Nacional de Actuarios  
Última actualización del manuscrito: 28 de mayo de 2025  
Artículo formateado por Oliver Iñiguez Castilla, elaborado bajo la asesoría de Carlos Fernando Lozano Nathal (QEPD) y Francisco Fernando Morales Castro, y comunicado por Claudia Feria Cuevas. Este artículo es publicado por el Colegio Nacional de Actuarios (CONAC) y contiene información de una variedad de fuentes. Es un trabajo cuyo fin es únicamente informativo y no debe interpretarse como asesoramiento profesional o financiero. La visión y comentarios contenidos en este documento corresponden exclusivamente a su autor y, por tanto, son ajenos a cualquier entidad pública o privada, incluyendo aquella para la que actualmente colabora. El CONAC no recomienda ni respalda el uso de la información proporcionada en este estudio. El CONAC no ofrece ninguna garantía, expresa o implícita, ni representación de ningún tipo y no asume ninguna responsabilidad en relación con el uso o mal uso de este trabajo.

## 1. INFORMACIÓN SOLICITADA

Se solicitó a los miembros de la Asociación Mexicana de Actuarios Consultores presentar información de empleados activos referida a inicios de año, de los últimos siete años, identificando las causas de salida de los empleados que dejan la empresa en cada año. Con la finalidad de tener una muestra diversa, se solicitó a los miembros proporcionar información de preferencia de empresas con diversas características en cuanto al número de colaboradores en cada una, su sector, localización, si tenían plan de pensiones o no. Con la finalidad de guardar los requerimientos de seguridad y confidencialidad de la información no se solicitaron: nombre de la compañía, nombre de los empleados, fechas de nacimiento ni fechas de ingreso. El requerimiento de información del personal activo al cierre de cada año consideró los siguientes campos:

1. Año de reporte de la información,
2. Identificador para la empresa,
3. Identificador del empleado,
4. Edad truncada,
5. Años de servicio (antigüedad truncada),
6. Sexo (Hombre, Mujer),
7. Tipo de empleado (sindicalizado, no sindicalizado),
8. Industria (Comercio, Construcción, Gobierno, Industrias Manufactureras, Sector primario (agricultura, minería y energía), Servicios y Transporte),
9. Entidad Federativa,
10. Tipo de Plan de Pensiones (Beneficio Definido, Contribución Definida, Híbrido, No existencia de un plan),
11. Requisitos de Jubilación (Combinación de edad y antigüedad, sólo condición de edad, sólo condición de antigüedad, no aplica—no hay plan).
12. Edad anticipada
13. Antigüedad anticipada
14. Edad normal

<sup>1</sup> Correo electrónico: [ana.montes@lockton.com](mailto:ana.montes@lockton.com)

<sup>2</sup> Correo electrónico: [cesar.hernandez@lockton.com](mailto:cesar.hernandez@lockton.com)

<sup>3</sup> Correo electrónico: [carmen.licona@aon.com](mailto:carmen.licona@aon.com)

<sup>4</sup> Correo electrónico: [miguel.hernandez@aon.com](mailto:miguel.hernandez@aon.com)

<sup>5</sup> Correo electrónico: [roberto.rocha@asarom.com](mailto:roberto.rocha@asarom.com)

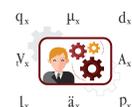
15. Antigüedad normal

Adicionalmente para la información de bajas se requirieron los siguientes campos:

1. Año de reporte de la información
2. Identificador para la empresa
3. Identificador del empleado
4. Edad a la fecha de baja
5. Años de servicio a la fecha de baja
6. Fecha de baja (dd/mm/aaaa)
7. Causa de baja (Fallecimiento, Invalidez, Despidos y/o salidas negociadas, Separación voluntaria, Jubilación y Otros, como reestructuras)

## 2. INTEGRACIÓN DE LA BASE DE INFORMACIÓN

Entre Abril y Mayo de 2023 se recibió la información por parte de 26 miembros de la AMAC correspondiente a 210 empresas. El primer análisis de información se centró en validar que hubiera cierto nivel de consistencia entre el identificador de la empresa y del empleado del reporte de activos, de un año a otro así como con el reporte de bajas. La base de datos se integró a partir de registros anuales. Es decir, si el empleado de una empresa aparece reportado como activo en cinco años, de los siete años observados, se tienen cinco registros de ese empleado. Se identificaron los registros donde el id del empleado y las características demográficas relacionadas con ese id, tenían congruencia de un año a otro, en la base de activos. A partir de esta identificación, se descartaron 67,077 registros que no guardaban consistencia de un año a otro, provenientes de 21 empresas. A partir de esta primera validación, se integró una base de 1,316,248 registros correspondiente a 439,010 empleados activos entre el periodo Diciembre 2016 a Diciembre 2022, provenientes de 189 empresas (las 210 originales menos las 21 descartadas por inconsistencias de un año a otro). Considerando la información proporcionada entre los años 2016 y 2022 y que en lo general, la información era consistente, las estadísticas globales de la información recibida se presenta en las Tablas 1-5.



Registros	1,316,248
Empleados	439,010
Empresas	189

■ **Tabla 1** Base de empleados activos. Descripción general.

Hombres	824,765
Mujeres	473,846
Sin clasificación	17,637

■ **Tabla 2** Base de empleados activos. Clasificación por sexo.

Sindicalizado	507,786
No Sindicalizado	776,325
Sin clasificación	32,137

■ **Tabla 3** Base de empleados activos. Clasificación por tipo de empleado.

Comercio	27
Comercio y Servicios	1
Construcción	3
Construcción y sector primario	1
Gobierno	7
Ind Manufacturera	70
Sector primario	6
Servicios	60
Transporte	14

■ **Tabla 4** Base de empleados activos. Clasificación por tipo de industria (vea [Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática \(2024\)](#)).



Aguascalientes	2
Baja California	3
Baja California Sur	1
Chiapas	1
Chihuahua	15
Coahuila	3
Ciudad de México	78
Guanajuato	3
Hidalgo	3
Jalisco	3
Estado de México	27
Michoacán	1
Morelos	1
Nayarit	1
Nuevo León	10
Puebla	4
Querétaro	9
San Luis Potosí	3
Tamaulipas	4
Tlaxcala	1
Veracruz	3
Yucatán	1
Baja California y CDMX	2
Baja California y México	1
CDMX y Nuevo León	2
Estado de México y Nuevo León	1
Jalisco, México y Puebla	2
Distribución en más de 6 estados	1
Distribución en más de 10 estados	1
Sin reporte de entidad	2

■ **Tabla 5** Base de empleados activos. Clasificación por ubicación del personal en cada Entidad Federativa.

## Base de bajas

De la información de bajas se identificó que no todas las causas de bajas fueron estandarizadas. Hubo bases de datos que se recibieron con múltiples causas de baja y fue necesario que el GTR AMAC tuviera que clasificarlas de acuerdo con el catálogo reportado. Atendiendo a lo anterior, incluimos dos nuevas categorías de causa de baja: transferencias y rotación (vea el Anexo A).

La clasificación de *rotación* se consideró para aquellas causas de baja en las que no fue posible identificar si era separación voluntaria o despido y/o salida negociada. Número de empleados identificados con una fecha o causa de baja: 194,000. La distribución de las causas de bajas que sí fueron reportadas aparece en la Tabla 6.

Separación voluntaria	132,934	68.50 %
Despidos y/o salidas negociadas	43,825	22.60 %
Otros como reestructuras	9,092	4.70 %
Jubilación	5,215	2.70 %
Fallecimiento	1,285	0.70 %
Invalidez	850	0.40 %
Rotación	556	0.30 %
Transferencia	242	0.10 %

■ **Tabla 6** Distribución de las causas de bajas.

De igual manera se analizó la fecha de baja en función al mes para identificar si había algún periodo donde se haya presentado un mayor número de bajas. Se identificó que el 57 % de las bajas se reportan en el primer semestre del año, siendo enero el mes donde se reporta el mayor número de bajas (14 %).

## Relación de información de activos y bajas

Al revisar la información de las bajas con relación a la base de activos se encontraban más de un reporte de baja por cada empleado o había fechas de baja que no coincidían con el año en que dejaba de ser reportado un empleado activo. Por tal motivo, se decidió analizar la información de las bajas a partir del reporte de empleados activos, es decir, la información reportada de las bajas se supeditó a que el id de la baja correspondiera a un id de un empleado activo reportado en el periodo de Dic 2016 a Dic 2022. De igual manera, si se reportaba una fecha de baja en un determinado año pero al final del año el colaborador seguía siendo reportado como activo, se omitió la fecha de baja de dicho año.

De los registros de empleados identificados como bajas, 1,952 presentaron más de una fecha de baja. En estos casos se consideró la regla:

1. Si cualquiera de las fechas de baja reportada era anterior al 1º de julio de 2016, se omitió la fecha de baja
2. Si se tenían dos fechas de baja posteriores al 1º de julio de 2016, se consideraba la primer fecha de baja y se omitía la segunda.

Adicionalmente se consideró que si la fecha de baja reportada era mayor al 1º de noviembre del año de registro y el empleado fue reportado como activo en ese año de registro, se consideró que su fecha de baja sería el 1º de enero del año siguiente. Este criterio se consideró tomando en consideración que cuando el actuario recibe la base de información para generar la valuación actuarial, muchas veces se recibe la información hasta con tres meses de anticipación, por lo que es posible que se considere como activo al momento de elaborar el reporte y aparezca el registro de su baja hasta el siguiente año.

En virtud de que en varios casos, la fecha de baja no coincidía con el año en que dejaba de ser reportado el empleado como activo, se tomó la decisión de tomar como fecha de baja el año en que dejaba de ser reportado el colaborador como activo. Si la diferencia entre el año de desaparición y la fecha de baja era menor a un año, se asociaba la fecha de baja reportada en la información de bajas, en caso contrario, a dicha baja se le asociaba la causa de rotación (sin distinguir entre separación voluntaria o despido y/o salida negociada). Se definió lo anterior, debido a que el 91 % de las causas de baja en la información reportada corresponde a separación voluntaria o despido y/o salida negociada.

Se identificó un grupo de empleados provenientes de ocho empresas que fueron reportados como activos en Diciembre de 2020 y que pertenecían a empresas de las cuales ya no se compartió información a partir de 2021. Estos empleados fueron clasificados como bajas, con la causa de “Indefinida”.

## 3. REVISIÓN DEL CONJUNTO DE INFORMACIÓN RECABADA

Antes de realizar el proceso de cálculo de la rotación fue importante realizar una validación a la información para revisar la consistencia de la misma. Se revisó la información referida en la Tabla 7, identificando el número de empleados que tenían dicha condición.



Tipo de revisión	Número de empleados	Porcentaje del total de empleados
Antigüedades no reportadas o negativas	1,525	0.35 %
Cambio de edades de un año a otro distintas a uno	44,463	10.13 %
Cambio de antigüedades de un año a otro distintas a uno	43,251	9.85 %
Edad reportada menor a 15 años de edad	230	0.05 %
Edad reportada mayor a 69 años de edad	375	0.09 %
Antigüedad mayor a 1 y que son nuevos ingresos	114,686	26.12 %
Edad de ingreso menor a 15 años de edad	1,487	0.34 %
Sexo no reportado	8,208	1.87 %
Bajas mayores a 60 con tipo de baja diferente de Jubilación	4,095	0.93 %
IDs con plan de pensiones	276,257	62.93 %
IDs con fecha de baja reportada distinta en más de un año con respecto al año en que ya no fue reportado como activo	5,548	1.26 %
IDs sin causa de baja	29,232	6.66 %
IDs con inconsistencia de sexo (ambos sexos reportados para un mismo ID)	9,689	2.21 %
IDs cuya causa de baja fue renombrada conforme al catálogo	11,287	2.57 %

■ **Tabla 7** Revisiones.

#### 4. INTEGRACIÓN DE LA MUESTRA DEFINITIVA

Se tomó la decisión en el grupo de eliminar del análisis los registros de aquellos empleados que tuvieran las siguientes características, derivadas de la revisión de la sección 3.

1. Cambio de edades de un año a otro distintas a uno,
2. Edad reportada menor a 15 años de edad,
3. Edad reportada mayor a 69 años de edad,
4. IDs con inconsistencia de sexo (ambos sexos reportados para un mismo ID),
5. IDs con fecha de baja reportada distinta en más de un año con respecto al año en que ya no fue reportado como activo.

De los 1,316,248 registros originales se eliminaron 227,235 que cumplen una o más de las cinco inconsistencias mencionadas anteriormente, dando como resultado una muestra definitiva con 1,089,013 registros, para procesar en R con los siguientes campos:

- Llave\_conteo (identificador empresa / identificador empleado)
- Llave\_activos (año reporte / identificador empresa / identificador empleado)
- Año reporte
- Identificador para la empresa
- Identificador del empleado
- Edad inicio año
- Año servicio
- Sexo
- Tipo de empleado



- Industria
- Entidad Federativa
- Tipo de Plan de Pensiones
- Requisitos de Jubilación
- Edad anticipada
- Antigüedad anticipada
- Edad normal
- Antigüedad normal
- Año baja final
- Causa de baja del siguiente año
- Causa de baja del año siguiente
- Estatus para el siguiente año (P, R, RD, C)

Los valores de la variable estatus para el siguiente año corresponden a: P (empleado que permanece el siguiente año), R (empleado que es baja el siguiente año por rotación), DR (empleado que es baja el siguiente año por causa distinta de rotación), C (empleado reportado activo al 31 de Diciembre de 2022).

#### Empresas Consideradas

La Tabla 8 muestra la clasificación del total de 175 empresas, que resultan de eliminar de la muestra a los empleados que tienen una o varias de las cinco inconsistencias mencionadas anteriormente. La base se integra por 390,544 registros de Mujeres (35.86 %) correspondiente a 135,213 empleadas y 682,018 registros de Hombre (62.63 %) correspondiente a 247,944 empleados. En la base de datos se tienen 16,451 registros sin información relativa al sexo del empleado (1.51 %).

## 5. MODELO DE SUPERVIVENCIA

### Descripción del modelo y las variables

El modelo elegido para determinar la función de supervivencia empírica que modela la rotación fue el estimador **Kaplan y Meier (1958)**, el cual en el contexto de la rotación, se resume como un estimador que mide las salidas por diferentes causas (rotación) entre el número de empleados expuestos durante un determinado periodo. La elección de este estimador se debe a su practicidad tanto en el cálculo como en la información necesaria para éste.

Las causas de baja consideradas son:

1. Distintas a rotación
  - a) Fallecimiento
  - b) Invalidez
  - c) Transferencias
  - d) Otros, como reestructuras
  - e) Indefinida

### 2. Por rotación

- a) Separación voluntaria
- b) Despidos y/o salidas negociadas
- c) Rotación (engloba separaciones voluntarias y despidos o salidas negociadas)

Dadas las diferencias observadas entre el año de desaparición del listado de activos y la fecha de baja reportada así como la distribución de las bajas a lo largo de los meses, se tomó el criterio de suponer que las bajas en cada año se daban al 30 de junio, es decir, las bajas, por cualquier causa, aportarían medio año de vida, en el año que hayan sido baja. Los empleados que fueron reportados como activos a Diciembre de 2022, fueron clasificados como datos censurados.

En esta primera etapa, se determinó una Tabla de rotación por edad. Para generar el estimador de Kaplan Meier se consideraron los registros de cada año con la siguiente información:

1. llave\_conteo (id entidad+id empleado),
2. ano\_reporte,
3. edad\_inicio,
4. status\_sig\_ano.

La subsección siguiente describe el proceso para la determinación de la Tabla de rotación propuesta.

### Conteo por estatus

Para cada edad  $x$ , se calculan los registros totales asociados a un estatus para el año siguiente.

Permanencias:

$$P_x = \sum \text{estatus\_sig\_ano}_x^P \text{ para } 15 \leq x \leq 69.$$

Censurados:

$$C_x = \sum \text{estatus\_sig\_ano}_x^C \text{ para } 15 \leq x \leq 69.$$

Bajas por Rotación:

$$R_x = \sum \text{estatus\_sig\_ano}_x^R \text{ para } 15 \leq x \leq 69.$$

Bajas Distinta a Rotación:

$$DR_x = \sum \text{estatus\_sig\_ano}_x^{DR} \text{ para } 15 \leq x \leq 69.$$



	Micro	Pequeña	Mediana	Grande	TOTAL
Comercio	0	0	6	22	28
Construcción	0	0	0	3	3
Gobierno	0	1	2	3	6
Ind. Manufacturera	1	1	23	36	61
Sector Primario	0	0	1	6	7
Servicios	2	1	26	28	57
Transporte	0	1	4	8	13
Comercio y Servicios	0	0	0	0	0
Construcción y Sector Primario	0	0	0	0	0
TOTAL	3	4	62	106	175

■ **Tabla 8** Clasificación de empresas por sector y tamaño. Se considera *Micro* una empresa hasta con diez empleados; *Pequeña*, una empresa de entre 11 y 51 empleados para Industria y Servicios, y de 11 a 30 empleados para Comercio; *Mediana* es una empresa hasta de entre 51 y 250 empleados para industria y Servicios, de 31 a 100 empleados para Comercio; asimismo, *Grande* es una empresa hasta con más de 250 empleados para Industria y Servicios, y más de 100 empleados para Comercio.

### Tasas Centrales de Rotación

Para cada edad, se calcularon las tasas centrales de rotación. Defina Tasa $[0, t]$  como el número de veces que ocurre un evento entre 0 y  $t$  años, entre los años-persona vividos por la población entre 0 y  $t$  años. La tasa central de salida o tasa específica de salida representa la frecuencia con que ocurren salidas en una determinada edad o grupo de edades con respecto al total de la población de esta edad o grupo. La tasa central de salida se obtiene como:

$${}_n m_x = \frac{{}_n D_x(t, t+k)}{k \cdot {}_n \bar{N}_x(t, t+k)}, \quad (1)$$

donde  $x$  es la edad,  $k$  es la unidad de tiempo,  ${}_n D_x(t, t+k)$  son las defunciones ocurridas entre  $t$  y  $t+k$  en el  $n$ -ésimo período, y  ${}_n \bar{N}_x(t, t+k)$  es la población a mitad del período entre  $t$  y  $t+k$  en el  $n$ -ésimo período.

De esta manera se determinó

$$tasa_{R_x} = \frac{R_x}{P_x + \frac{1}{2}(R_x + DR_x + C_x)}$$

para  $15 \leq x \leq 69$ , donde  $k$  es de un año.

### Cálculo de las funciones de rotación general

Considerando el método de [Greville \(1943\)](#) y [Chiang \(1968\)](#), tenemos que la probabilidad de salida a edad  $x$ , en un plazo de



$n$  años, y su complemento a la unidad están dados, respectivamente por:

$$\begin{aligned} {}_n q_x &= \frac{{}_n m_x}{1 + (1 - {}_n a_x) {}_n m_x}, \\ p_x &= 1 - q_x, \end{aligned}$$

donde  ${}_n a_x$  representa los años-persona vividos por los que salieron entre  $x$  y  $x+n$  y se aproxima como  ${}_n a_x = n/2$ . Asimismo, tenemos que las personas activas a edad  $x$ ,  $\ell_x = \ell_{x-1} \cdot p_{x-1}$  para  $x > 15$ , y  $\ell_{15} = 1$ . Combinando esto con (1), tenemos los resultados de la Tabla 9.

### Proporción de separación voluntaria y despido

Para la determinación del porcentaje de separación voluntaria, se consideró que la rotación se compone por las dos causas de salida: separación voluntaria y despido y/o salidas negociadas. En la práctica actuarial, una vez que se determina la probabilidad de rotación, se le suele aplicar a esta probabilidad el porcentaje de despido para obtener la probabilidad de despido y/o salidas negociadas y el porcentaje de separación voluntaria, para obtener la probabilidad de separación voluntaria.

Para obtener la proporción de separación voluntaria y la proporción de despidos y/o salidas negociadas, se realizaron los siguientes cálculos:

- Total de salidas por separación voluntaria a edad  $x$  de la

edad	mx	qx	px	lx
15	0.153846	0.142857	0.857143	1.000000
16	0.794457	0.568595	0.431405	0.857143
17	0.802593	0.572750	0.427250	0.369776
18	0.737297	0.538704	0.461296	0.157987
19	0.620255	0.473431	0.526569	0.072879
20	0.532690	0.420652	0.579348	0.038376
21	0.470332	0.380785	0.619215	0.022233
22	0.428188	0.352681	0.647319	0.013767
23	0.393498	0.328806	0.671194	0.008912
24	0.352478	0.299666	0.700334	0.005981
25	0.327995	0.281783	0.718217	0.004189
26	0.301741	0.262185	0.737815	0.003009
27	0.285937	0.250170	0.749830	0.002220
28	0.273901	0.240908	0.759092	0.001664
29	0.251915	0.223734	0.776266	0.001263
30	0.241975	0.215859	0.784141	0.000981
31	0.229248	0.205673	0.794327	0.000769
32	0.220545	0.198640	0.801360	0.000611
33	0.207390	0.187905	0.812095	0.000490
34	0.194327	0.177118	0.822882	0.000398
35	0.191600	0.174850	0.825150	0.000327
36	0.186081	0.170242	0.829758	0.000270
37	0.177160	0.162744	0.837256	0.000224
38	0.169184	0.155989	0.844011	0.000188
39	0.161080	0.149074	0.850926	0.000158
40	0.156368	0.145029	0.854971	0.000135
41	0.153454	0.142519	0.857481	0.000115
42	0.139785	0.130654	0.869346	0.000099
43	0.136898	0.128128	0.871872	0.000086
44	0.133723	0.125342	0.874658	0.000075
45	0.127853	0.120171	0.879829	0.000065
46	0.126591	0.119056	0.880944	0.000058
47	0.123316	0.116154	0.883846	0.000051
48	0.120657	0.113792	0.886208	0.000045
49	0.112190	0.106231	0.893769	0.000040
50	0.105697	0.100391	0.899609	0.000036
51	0.098760	0.094113	0.905887	0.000032
52	0.094399	0.090144	0.909856	0.000029
53	0.091724	0.087702	0.912298	0.000026
54	0.088938	0.085151	0.914849	0.000024
55	0.090601	0.086675	0.913325	0.000022
56	0.082451	0.079186	0.920814	0.000020
57	0.0916119	0.0875993	0.9124007	1.849E-05
58	0.1226788	0.1155887	0.8844113	1.687E-05
59	0.2026871	0.1840362	0.8159638	1.492E-05
60	0.2738826	0.2408942	0.7591058	1.217E-05
61	0.2194635	0.1977627	0.8022373	9.24E-06
62	0.2169184	0.1956936	0.8043064	7.413E-06
63	0.2065533	0.187218	0.812782	5.962E-06
64	0.251315	0.2232606	0.7767394	4.846E-06
65	0.2664474	0.2351234	0.7648766	3.764E-06
66	0.3462017	0.2951168	0.7048832	2.879E-06
67	0.2739212	0.2409241	0.7590759	2.029E-06
68	0.3384615	0.2894737	0.7105263	1.54E-06
69	0.8644068	0.6035503	0.3964497	1.095E-06

■ **Tabla 9** Cálculo de tasa y funciones de rotación general para edades de 15 a 69 años.

muestra

$$TSV_x = \sum \text{causa baja}_x^{SV} \text{ para } 15 \leq x \leq 69.$$

- Total de salidas por despido y/o salida negociada a edad x de la muestra

$$TD_x = \sum \text{causa baja}_x^D \text{ para } 15 \leq x \leq 69.$$

- Porcentaje de salidas por separación voluntaria a edad x

$$\%SV_x = \frac{TSV_x}{TSV_x + TD_x} \text{ para } 15 \leq x \leq 69.$$

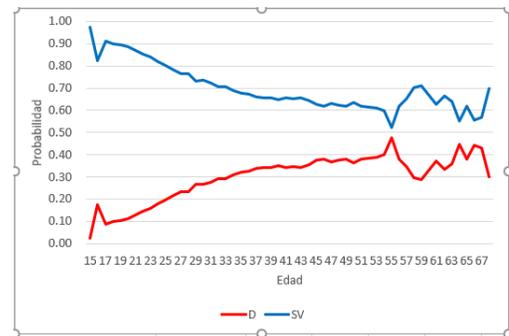
- Porcentaje de salidas por despido y/o salidas negociadas a edad x

$$\%D_x = 1 - \%SV_x.$$

Es importante mencionar que los registros con causa de baja “Rotación” no fueron contabilizados para este porcentaje en virtud de que no se podía identificar si eran separación voluntaria o despido y/o salida negociada. Considerando los porcentajes de Separación Voluntaria y Despido y/o salidas negociadas, se determinaron las correspondientes probabilidades (vea la Figura 1):

$$q_x^{(sv)} = q_x \cdot \%SV_x \text{ para } 15 \leq x \leq 69,$$

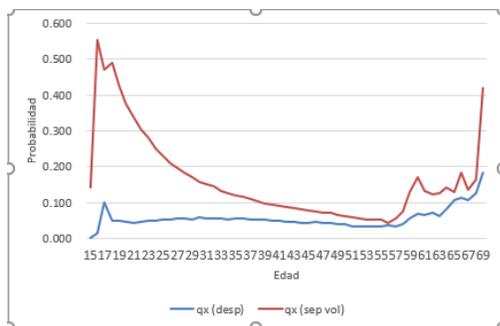
$$q_x^{(d)} = q_x \cdot \%D_x \text{ para } 15 \leq x \leq 69.$$



**Figura 1** Proporción de salidas por separación voluntaria y Despido y/o salidas negociadas.

La gráfica de las probabilidades correspondientes puede apreciarse en la Figura 2. Note que la tasa bruta de rotación es de 14.07 %, la tasa bruta de despido y/o salidas negociadas es del 3.46 %, y la tasa bruta de separación voluntaria es del 10.61 %.





**Figura 2** Probabilidad de separación voluntaria y de despido y/o salidas negociadas.

Como referencia adicional, se determinó la tasa bruta de rotación como:

$$TBR = \frac{\text{número de salidas por rotación}}{\text{número de registros en la muestra}}$$

Bajo este mismo criterio se determinaron la tasa bruta de separación voluntaria y la tasa bruta de despido y/o salidas negociada. La Tabla 10 muestra los resultados.

### Suavizamiento de la probabilidad de rotación

La Tabla de rotación es el resultado de suavizar o graduar el estimador bruto obtenido en el análisis. Dado que las probabilidades de rotación para las edades menores a 17 años y mayores a 56 años presentaban una tendencia distinta, se decidió suavizar la Tabla por secciones:

1. De la edad 15, a la edad 17, se tomó la decisión de considerar la misma probabilidad que la reportada a edad 18, por ser pocos los casos que se tienen en estas edades.
2. Entre los 18 y los 56 años.
3. Entre los 57 y los 60 años.
4. De 61 a 66 años.
5. De 67 a 69 años.

Se utilizó software Risk Simulator<sup>7</sup> para determinar el análisis de tendencias y ajustes en cada intervalo. Los resultados fueron los siguientes.

1. El suavizamiento de  $q_x$  de 18 a 55 años dio la función logarítmica

$$Y(x) = 0.5534 - 0.13 \ln(x)$$

con  $R^2 = 0.9978$ .

<sup>7</sup> Es una herramienta de simulación que se integra con Excel para realizar análisis de riesgo y toma de decisiones.



edad_inicia	D	SV	SV_D	prop_SV	prop_D
16	4	151	155	0.97419	0.02581
17	102	472	574	0.82230	0.17770
18	221	2242	2463	0.91027	0.08973
19	468	4131	4599	0.89824	0.10176
20	601	5067	5668	0.89397	0.10603
21	700	5446	6146	0.88610	0.11390
22	866	5695	6561	0.86801	0.13199
23	1021	5896	6917	0.85239	0.14761
24	1134	5984	7118	0.84069	0.15931
25	1320	5930	7250	0.81793	0.18207
26	1431	5824	7255	0.80276	0.19724
27	1595	5724	7319	0.78207	0.21793
28	1645	5350	6995	0.76483	0.23517
29	1593	5146	6739	0.76361	0.23639
30	1727	4753	6480	0.73349	0.26651
31	1595	4403	5998	0.73408	0.26592
32	1554	4051	5605	0.72275	0.27725
33	1516	3661	5177	0.70717	0.29283
34	1390	3329	4719	0.70545	0.29455
35	1374	3045	4419	0.68907	0.31093
36	1344	2841	4185	0.67885	0.32115
37	1219	2531	3750	0.67493	0.32507
38	1180	2296	3476	0.66053	0.33947
39	1095	2089	3184	0.65609	0.34391
40	1007	1931	2938	0.65725	0.34275
41	973	1785	2758	0.64721	0.35279
42	828	1596	2424	0.65842	0.34158
43	797	1495	2292	0.65227	0.34773
44	740	1408	2148	0.65549	0.34451
45	695	1249	1944	0.64249	0.35751
46	686	1144	1830	0.62514	0.37486
47	639	1036	1675	0.61851	0.38149
48	572	979	1551	0.63121	0.36879
49	501	834	1335	0.62472	0.37528
50	439	717	1156	0.62024	0.37976
51	358	624	982	0.63544	0.36456
52	342	554	896	0.61830	0.38170
53	292	465	757	0.61427	0.38573
54	276	432	708	0.61017	0.38983
55	257	385	642	0.59969	0.40031
56	256	282	538	0.52416	0.47584
57	198	323	521	0.61996	0.38004
58	193	361	554	0.65162	0.34838
59	242	571	813	0.70234	0.29766
60	202	499	701	0.71184	0.28816
61	120	241	361	0.66759	0.33241
62	96	161	257	0.62646	0.37354
63	55	110	165	0.66667	0.33333
64	56	99	155	0.63871	0.36129
65	51	63	114	0.55263	0.44737
66	35	57	92	0.61957	0.38043
67	23	29	52	0.55769	0.44231
68	16	21	37	0.56757	0.43243
69	10	23	33	0.69697	0.30303

■ **Tabla 10** Proporción de Separación Voluntaria y de Despido y/o salidas negociadas (16 a 69 años de edad).

2. El suavizamiento de  $q_x$  de 57 a 60 años dio la función polinómica de segundo grado

$$Y(x) = 0.0842 - 0.0169x + 0.0098x^2$$

con  $R^2 = 0.9910$ .

3. El suavizamiento de  $q_x$  de 61 a 66 años dio la función polinómica de tercer grado

$$Y(x) = 0.208 - 0.0111x + 0.0005x^2 + 0.0006x^3$$

con  $R^2 = 0.9643$ .

- Se llevó a cabo una interpolación con trazadores cúbicos interpolantes (vea el capítulo 3.5 en el libro de [Burden et al. \(2015\)](#)) en los nodos correspondientes a los 66, 69 y 70 años. Se consideró que a edad 70, la probabilidad unitaria de rotación. El modelo de interpolación y extrapolación polinómica spline cúbica se utiliza para *rellenar los huecos* de valores faltantes y para pronosticar datos de series de tiempo.

La Figura 3 muestra las probabilidades de rotación con y sin ajuste.

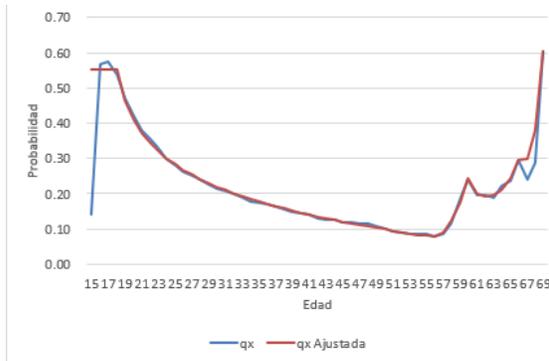


Figura 3 Probabilidades de rotación  $q_x$  con y sin ajuste.

La Tabla 11 refiere los resultados del ajuste para los grupos de edades recién referidos.

La línea de tendencia del ajuste de  $q_x$  en el grupo de 18 a 56 años de edad aparece en la Figura 4.

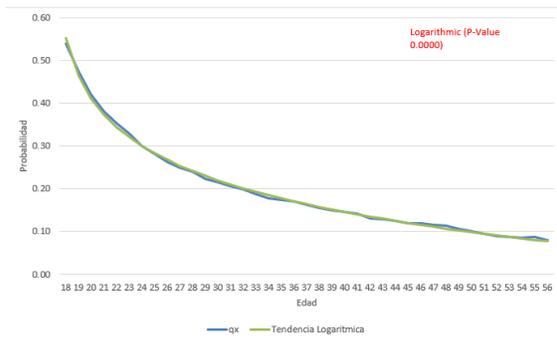


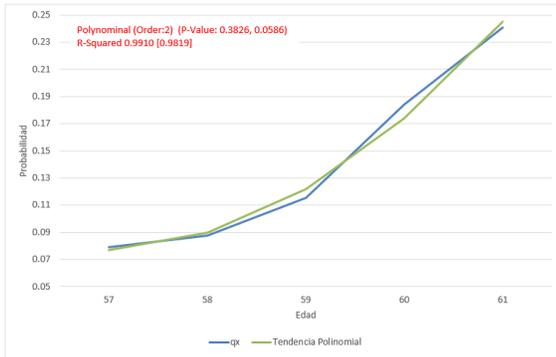
Figura 4 Línea de tendencia para el grupo de 18 a 56 años de edad.

edad	qx	qx ajustada
15	0.14285714	0.55342043
16	0.56859504	0.55342043
17	0.57275021	0.55342043
18	0.53870429	0.55342043
19	0.47343078	0.46331628
20	0.42065184	0.41060874
21	0.38078473	0.37321214
22	0.35268094	0.34420508
23	0.32880571	0.32050459
24	0.2996656	0.30046612
25	0.28178292	0.283108
26	0.26218487	0.26779705
27	0.25017038	0.25410094
28	0.24090849	0.2417113
29	0.22373408	0.23040045
30	0.2158588	0.21999547
31	0.20567279	0.21036197
32	0.19864018	0.2013934
33	0.18790515	0.19300385
34	0.17711783	0.18512309
35	0.17484968	0.17769291
36	0.17024182	0.17066456
37	0.16274396	0.1639968
38	0.15598867	0.15765443
39	0.14907366	0.15160716
40	0.1450292	0.14582875
41	0.14251874	0.14029631
42	0.13065367	0.13498974
43	0.12812813	0.12989133
44	0.12534248	0.12498536
45	0.1201709	0.12025783
46	0.11905552	0.11569621
47	0.11615417	0.11128925
48	0.11379201	0.10702681
49	0.1062312	0.10289971
50	0.10039134	0.09889961
51	0.09411296	0.09501894
52	0.09014427	0.09125077
53	0.08770153	0.08758876
54	0.08515118	0.08402709
55	0.08667488	0.08056041
56	0.07918609	0.07718379
57	0.08759929	0.08966502
58	0.11558868	0.12183978
59	0.18403619	0.17363566
60	0.24089425	0.24505266
61	0.19776268	0.19803316
62	0.19569365	0.19281372
63	0.18721805	0.19603301
64	0.22326064	0.21139057
65	0.23512337	0.24258596
66	0.29511677	0.29511677
67	0.24092409	0.30004844
68	0.28947368	0.37838973
69	0.6035503	0.6035503

Tabla 11 Resultados de la probabilidad rotación sin ajustar, y con ajuste, por edad del empleado.

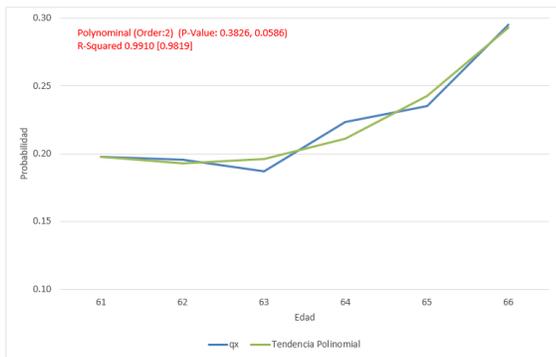


La línea de tendencia del ajuste de  $q_x$  en el grupo de 57 a 60 años de edad aparece en la Figura 5.



**Figura 5** Línea de tendencia para el grupo de 57 a 60 años de edad.

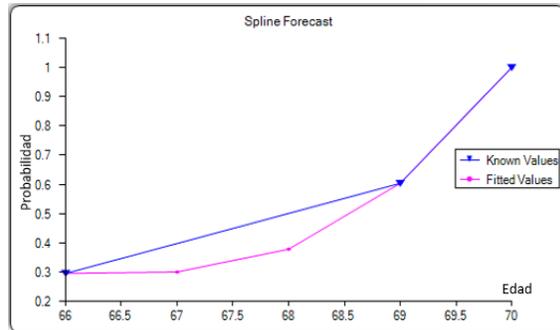
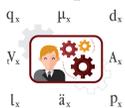
La línea de tendencia del ajuste de  $q_x$  en el grupo de 61 a 66 años de edad aparece en la Figura 6.



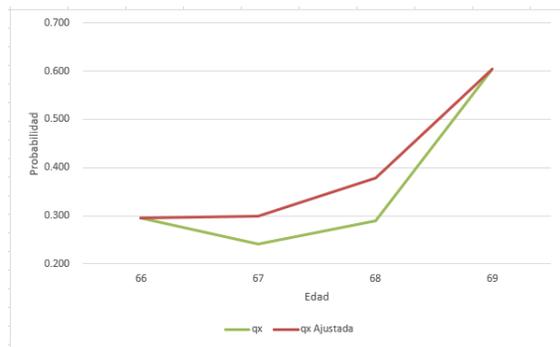
**Figura 6** Línea de tendencia para el grupo de 61 a 66 años de edad.

La línea de tendencia del ajuste de  $q_x$  en el grupo de 67 a 70 años de edad aparece en la Figura 7.

La probabilidad de rotación con y sin ajuste de 67 a 70 años de edad puede verse en la Figura 8.



**Figura 7** Línea de tendencia para el grupo de 67 a 70 años de edad.



**Figura 8** Probabilidad de rotación de 67 a 69 años de edad.

### Suavizamiento de la proporción de separación voluntaria y despido

Se decidió suavizar la proporción de separación voluntaria por edad, por secciones:

1. De edad 15 a 17 se tomó la decisión de considerar la misma probabilidad que la reportada a edad 18.
2. De 18 a 55 años de edad.
3. De 56 a 60 años de edad.
4. De 60 a 65 años de edad.
5. De 65 a 69 años de edad.

La función polinomial de orden dos para suavizar la proporción de separación voluntaria de 18 a 55 años de edad fue

$$Y(x) = 0.979 - 0.0175x - 0.0002x^2$$

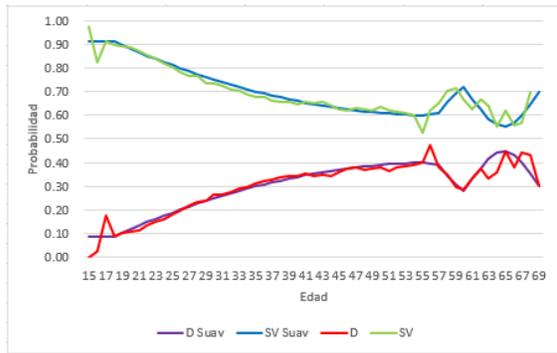
con  $R^2 = 0.9545$ .

La función logarítmica para suavizar la proporción de separación voluntaria de 55 a 60 años de edad fue

$$Y(x) = 0.5285 + 0.1185 \ln(x)$$

con  $R^2 = 0.9869$ .

Dada la pronunciada caída de la proporción de SV a edad 56, se decidió tomar el promedio entre la proporción de separación voluntaria ajustada de 55 a 57 años de edad. Asimismo, se llevó a cabo una interpolación con splines cúbicos utilizando los nodos de 61, 65 y 69 años. Las proporciones de separaciones voluntarias y despido suavizadas se muestran en la Figura 9.

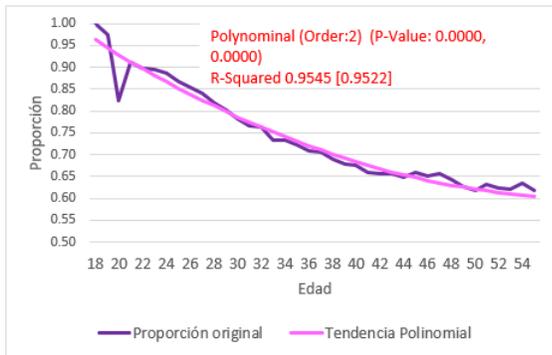


**Figura 9** Proporción de salidas por separación voluntaria y despido con y sin ajuste.

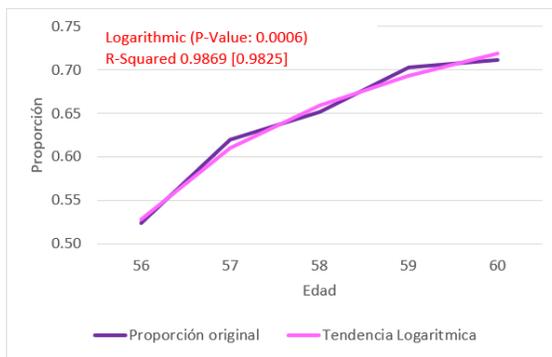
edad	SV	D	SV - suavizado	D-suavizado
15	100.00%	0.00%	91.24%	8.76%
16	97.42%	2.58%	91.24%	8.76%
17	82.23%	17.77%	91.24%	8.76%
18	91.03%	8.97%	91.24%	8.76%
19	89.82%	10.18%	89.67%	10.33%
20	89.40%	10.60%	88.15%	11.85%
21	88.61%	11.39%	86.66%	13.34%
22	86.80%	13.20%	85.22%	14.78%
23	85.24%	14.76%	83.81%	16.19%
24	84.07%	15.93%	82.45%	17.55%
25	81.79%	18.21%	81.12%	18.88%
26	80.28%	19.72%	79.83%	20.17%
27	78.21%	21.79%	78.59%	21.41%
28	76.48%	23.52%	77.38%	22.62%
29	76.36%	23.64%	76.22%	23.78%
30	73.35%	26.65%	75.09%	24.91%
31	73.41%	26.59%	74.01%	25.99%
32	72.27%	27.73%	72.96%	27.04%
33	70.72%	29.28%	71.96%	28.04%
34	70.54%	29.46%	70.99%	29.01%
35	68.91%	31.09%	70.07%	29.93%
36	67.89%	32.11%	69.18%	30.82%
37	67.49%	32.51%	68.34%	31.66%
38	66.05%	33.95%	67.53%	32.47%
39	65.61%	34.39%	66.77%	33.23%
40	65.72%	34.28%	66.04%	33.96%
41	64.72%	35.28%	65.36%	34.64%
42	65.84%	34.16%	64.71%	35.29%
43	65.23%	34.77%	64.11%	35.89%
44	65.55%	34.45%	63.54%	36.46%
45	64.25%	35.75%	63.02%	36.98%
46	62.51%	37.49%	62.53%	37.47%
47	61.85%	38.15%	62.09%	37.91%
48	63.12%	36.88%	61.68%	38.32%
49	62.47%	37.53%	61.32%	38.68%
50	62.02%	37.98%	60.99%	39.01%
51	63.54%	36.46%	60.71%	39.29%
52	61.83%	38.17%	60.46%	39.54%
53	61.43%	38.57%	60.25%	39.75%
54	61.02%	38.98%	60.09%	39.91%
55	59.97%	40.03%	59.96%	40.04%
56	52.42%	47.58%	60.52%	39.48%
57	62.00%	38.00%	61.07%	38.93%
58	65.16%	34.84%	65.87%	34.13%
59	70.23%	29.77%	69.28%	30.72%
60	71.18%	28.82%	71.92%	28.08%
61	66.76%	33.24%	66.76%	33.24%
62	62.65%	37.35%	62.37%	37.63%
63	66.67%	33.33%	58.58%	41.42%
64	63.87%	36.13%	56.01%	43.99%
65	55.26%	44.74%	55.26%	44.74%
66	61.96%	38.04%	56.74%	43.26%
67	55.77%	44.23%	60.05%	39.95%
68	56.76%	43.24%	64.57%	35.43%
69	69.70%	30.30%	69.70%	30.30%

■ **Tabla 12** Proporciones suavizadas de separaciones voluntarias y despido.





**Figura 10** Línea de tendencia de las proporciones de separación voluntaria de 18 a 55 años de edad.

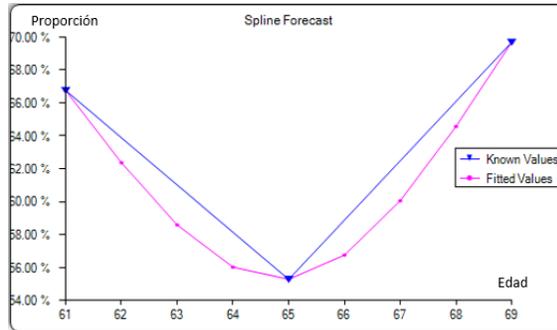
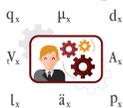


**Figura 11** Línea de tendencia de las proporciones de separación voluntaria de 56 a 60 años de edad.

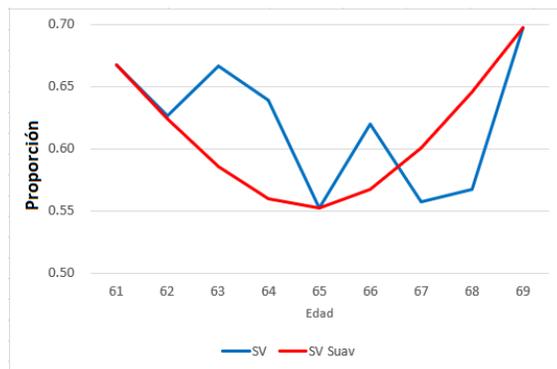
### Desglose de probabilidad de rotación por categorías

Para obtener las probabilidades de rotación por sexo, industria, región y por existencia o no de un plan de pensiones por jubilación, se segmentó la población conforme a la cualidad por analizar y se desarrollaron los primeros cuatro pasos mencionados con anterioridad. En el caso de la localidad, se agruparon las entidades federativas de la siguiente forma:

- Noroeste - Baja California, Baja California Sur, Chihuahua, Durango, Sinaloa y Sonora.
- Noreste - Coahuila, Nuevo León y Tamaulipas.
- Centro norte - Aguascalientes, Guanajuato, San Luis Potosí, Zacatecas y Querétaro
- Centro sur - Morelos, Estado de México y Ciudad de Méx.
- Occidente - Nayarit, Jalisco, Colima y Michoacán de Ocampo.



**Figura 12** Línea de tendencia de las proporciones de separación voluntaria de 61 a 69 años de edad.



**Figura 13** Proporción SV con y sin ajuste 61 a 69 años de edad.

- Suroeste - Guerrero, Oaxaca y Chiapas.
- Oriente - Puebla, Veracruz, Tlaxcala e Hidalgo.
- Sureste - Tabasco, Campeche, Quintana Roo y Yucatán

En el caso del tipo de plan de pensiones, se agruparon las categorías de la siguiente forma:

- Con plan de pensiones: Beneficio Definido, Contribución Definida e Híbrido.
- Sin plan de pensiones: No existencia de un plan y dato en blanco.

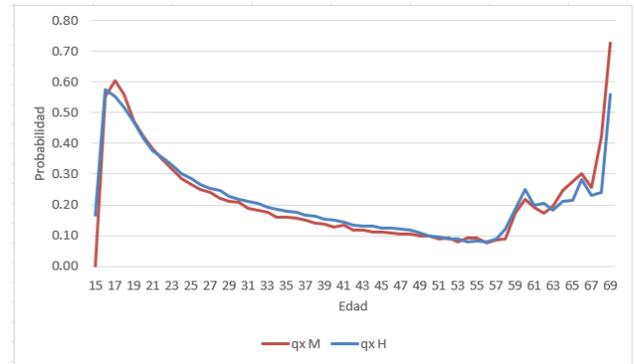
La probabilidad de rotación por sexo puede verse en la Figura 14 y en la Tabla 13.

La probabilidad de rotación por sector puede verse en la Figura 15 y en la Tabla 14.

La probabilidad de rotación por región puede verse en la Figura 16 y en la Tabla 15.

edad	qx M	qx H
15	-	0.16666667
16	0.55339806	0.57644110
17	0.60282916	0.55380398
18	0.55960957	0.51794872
19	0.47060159	0.47009990
20	0.41997376	0.41538385
21	0.38136786	0.37400041
22	0.34559194	0.35219689
23	0.31726488	0.32933479
24	0.28554908	0.30261710
25	0.26565547	0.28657208
26	0.24958896	0.26459179
27	0.23990904	0.25193698
28	0.22265319	0.24832714
29	0.21275499	0.22663358
30	0.20674590	0.21825055
31	0.18984381	0.21218352
32	0.18299904	0.20498382
33	0.17723800	0.19154063
34	0.15996443	0.18485013
35	0.16087963	0.18036435
36	0.15552971	0.17685009
37	0.15079007	0.16726600
38	0.14213672	0.16218136
39	0.13615023	0.15438377
40	0.12878208	0.15188674
41	0.13468402	0.14458579
42	0.11960060	0.13583454
43	0.11897307	0.13208047
44	0.11100659	0.13154289
45	0.11043845	0.12424734
46	0.10836034	0.12354400
47	0.10419982	0.12170768
48	0.10521682	0.11724366
49	0.09933775	0.10878101
50	0.09974802	0.09956357
51	0.09071111	0.09540419
52	0.09354672	0.08788912
53	0.08023505	0.09015364
54	0.09122203	0.08109674
55	0.09174810	0.08314343
56	0.07632184	0.07978445
57	0.08489431	0.08843482
58	0.08904934	0.12252891
59	0.17288802	0.18639125
60	0.21737523	0.24889741
61	0.19325329	0.19870410
62	0.17197452	0.20600500
63	0.19517544	0.18296893
64	0.24808576	0.21127879
65	0.27649770	0.21359223
66	0.30075188	0.28139183
67	0.25806452	0.23214286
68	0.41904762	0.24000000
69	0.72727273	0.56000000

■ **Tabla 13** Probabilidades de rotación por sexo.

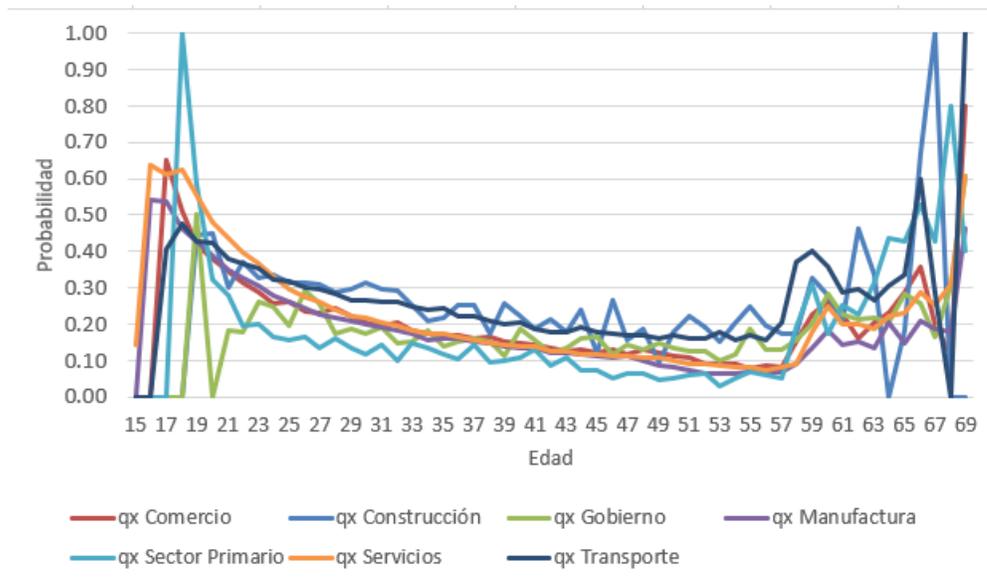


■ **Figura 14** Probabilidad de rotación por sexo.

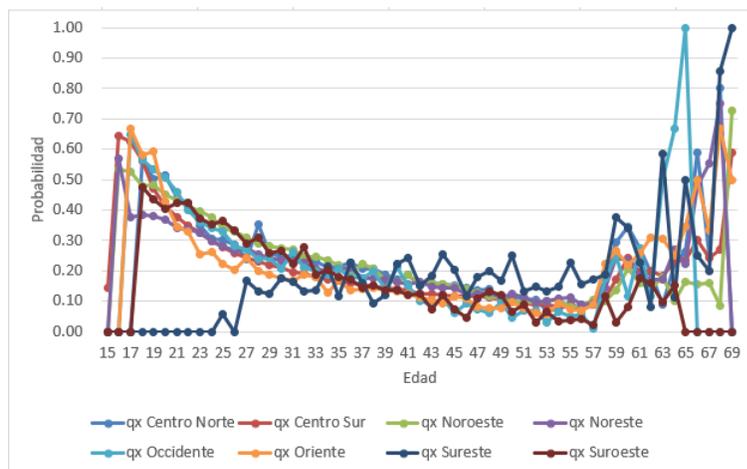
edad	qx Comercio	qx Construcción	qx Gobierno	qx Manufactura	qx Sector Primario	qx Servicios	qx Transporte
15	-	-	-	-	-	0.14285714	-
16	-	-	-	0.53900709	-	0.63736264	-
17	0.64875240	-	-	0.53778559	-	0.60913706	0.40625000
18	0.51129728	-	-	0.46344959	1.00000000	0.62216495	0.47417840
19	0.42021339	0.44444444	0.50000000	0.42750302	0.58333333	0.55268959	0.42708969
20	0.38111972	0.44705882	-	0.38679245	0.32352941	0.47925957	0.42426850
21	0.34309330	0.30252101	0.18181818	0.35002103	0.27868852	0.43550165	0.37732095
22	0.31367830	0.37068966	0.17647059	0.32476156	0.19631902	0.39781209	0.36518686
23	0.28644872	0.32515337	0.26086957	0.30330901	0.19852941	0.36726188	0.35487179
24	0.25856616	0.33734940	0.24761905	0.27935293	0.16564417	0.32969639	0.32229124
25	0.25959562	0.31485588	0.19736842	0.26261082	0.15754923	0.29531358	0.31860776
26	0.23629161	0.31330472	0.29015544	0.24217266	0.16438356	0.27518473	0.29821674
27	0.23109803	0.31055901	0.25510204	0.22682064	0.13574661	0.25939871	0.29478870
28	0.24452935	0.28631579	0.17167382	0.21808125	0.16152717	0.24125884	0.28305258
29	0.22266875	0.29387755	0.18637993	0.20948309	0.13394216	0.22282437	0.26331554
30	0.20568443	0.31264368	0.17391304	0.19924338	0.11816839	0.21732349	0.26415602
31	0.19699639	0.29729730	0.19076923	0.18919283	0.14349776	0.20409021	0.26275159
32	0.20213800	0.29186603	0.14857143	0.18210555	0.10064935	0.19331710	0.26140426
33	0.18252861	0.25181598	0.15085158	0.17557040	0.14723926	0.18367911	0.24838758
34	0.17499261	0.21000000	0.18340611	0.15589514	0.13270142	0.17534153	0.23964868
35	0.17079834	0.21728395	0.13963039	0.15846763	0.11821086	0.17158097	0.24369332
36	0.17093654	0.25178147	0.14989293	0.16171071	0.10377358	0.16485485	0.32227982
37	0.16221789	0.25257732	0.16157205	0.15188182	0.14147910	0.15655097	0.22019660
38	0.16507553	0.17142857	0.15319149	0.14847821	0.09523810	0.14812078	0.22019660
39	0.15087397	0.25519288	0.11157025	0.13824169	0.09904153	0.14492148	0.19869582
40	0.14669250	0.22222222	0.18461538	0.13518059	0.10625000	0.13821876	0.20247423
41	0.14099526	0.18685121	0.15384615	0.13480919	0.12874251	0.13879271	0.18446181
42	0.13247729	0.21455939	0.12302285	0.12192441	0.08736349	0.12625865	0.17972880
43	0.12485472	0.17968750	0.13526570	0.12017688	0.10802920	0.12397499	0.17809524
44	0.12822765	0.24031008	0.15847861	0.11556033	0.07272727	0.11786341	0.18989072
45	0.11931394	0.12017167	0.16313214	0.11324986	0.07221350	0.11457426	0.17707212
46	0.13032985	0.26556017	0.11556982	0.10717069	0.05279503	0.11395232	0.17262075
47	0.11624309	0.15686275	0.14308426	0.11129098	0.06567164	0.11039647	0.16975966
48	0.12839147	0.18536585	0.13149847	0.09798643	0.06501548	0.10994369	0.17052702
49	0.12068497	0.09523810	0.14618974	0.08483290	0.04694836	0.10644953	0.15856395
50	0.11304092	0.17931034	0.13201320	0.08221892	0.05220228	0.09708401	0.16895369
51	0.10825083	0.22058824	0.12736661	0.07485630	0.05821918	0.09066272	0.16203260
52	0.09230769	0.19200000	0.12615955	0.06619116	0.06500956	0.09085515	0.15966387
53	0.09040512	0.15238095	0.09775967	0.06456644	0.02845528	0.08787771	0.17647059
54	0.08983452	0.20408163	0.11522634	0.06557377	0.05095541	0.08376003	0.15756036
55	0.07680000	0.24761905	0.18584071	0.06790353	0.06726457	0.08235967	0.17114569
56	0.0845106	0.19444444	0.13032581	0.06661284	0.06000000	0.07363273	0.15647922
57	0.08033241	0.17241379	0.12967581	0.06835722	0.05154639	0.08356272	0.20353982
58	0.15198060	0.17543860	0.15736041	0.08960483	0.19251337	0.08895428	0.37044745
59	0.22419534	0.32653061	0.20111732	0.13365484	0.31046931	0.17733189	0.40077821
60	0.26266417	0.27777778	0.28363636	0.18181818	0.17218543	0.24942441	0.35521236
61	0.22801303	0.20689655	0.22429907	0.14388489	0.25242718	0.20059524	0.28930818
62	0.16190476	0.46153846	0.21390374	0.15120275	0.22500000	0.20032310	0.29752066
63	0.20359281	0.33333333	0.21556886	0.13299233	0.31372549	0.18736142	0.26470588
64	0.22857143	-	0.20588235	0.20610687	0.43478261	0.22304833	0.30434783
65	0.28571429	0.18181818	0.28301887	0.14723926	0.42857143	0.23236515	0.33333333
66	0.35555556	0.66666667	0.25581395	0.20952381	0.52631579	0.28571429	0.60000000
67	0.20000000	1.00000000	0.16393443	0.18461538	0.42857143	0.25238095	0.28571429
68	0.11111111	-	0.30434783	0.17647059	0.80000000	0.31111111	-
69	0.80000000	-	0.60869565	0.46153846	0.40000000	0.60550459	1.00000000

■ **Tabla 14** Probabilidades de rotación por sector.





**Figura 15** Probabilidades de rotación por sector.

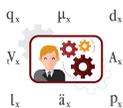


**Figura 16** Probabilidad de rotación por región.

La probabilidad de rotación para la población con y sin plan de pensiones por jubilación puede verse en la Figura 17 y en la Tabla 16.

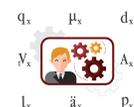
## 6. RESULTADOS Y COMENTARIOS FINALES

La Tabla de Rotación AMAC 2023 resultante se muestra en la Tabla 17. Asimismo, las probabilidades de rotación  $q_x$  con y sin ajuste pueden verse en la Figura 3. De hecho, en la Figura 3 puede apreciarse que la probabilidad de rotación presenta una tendencia decreciente hasta la edad de 56 años. A partir de



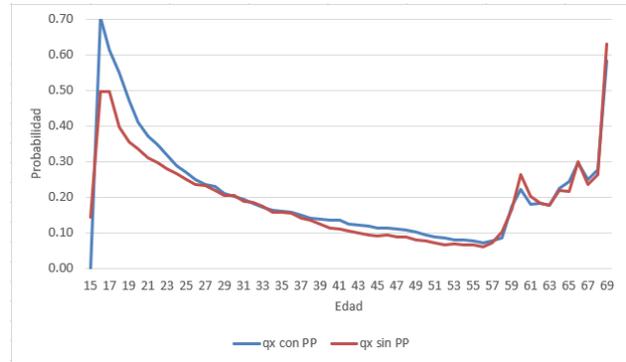
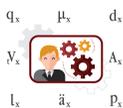
edad	qx Centro Norte	qx Centro Sur	qx Noroeste	qx Noreste	qx Occidente	qx Oriente	qx Sureste	qx Suroeste
15	-	0.14285714	-	-	-	-	-	-
16	-	0.64444444	0.53588517	0.57142857	-	-	-	-
17	-	0.62284820	0.52725471	0.37583893	0.64739884	0.66666667	-	-
18	0.57142857	0.56223108	0.47812971	0.38489209	0.56436663	0.58267717	-	0.47619048
19	0.50190114	0.47277403	0.48220065	0.37894737	0.53567735	0.59310345	-	0.43564356
20	0.51268358	0.41324456	0.45040214	0.36982119	0.50774370	0.42748092	-	0.40223464
21	0.43873979	0.37568775	0.43258205	0.33965785	0.45838752	0.34336283	-	0.42533937
22	0.42258652	0.34910102	0.41135840	0.33635308	0.39925094	0.33062331	-	0.42384106
23	0.34756554	0.32691243	0.39424763	0.32445001	0.36182573	0.25431034	-	0.37073171
24	0.30752803	0.29692690	0.37667868	0.29761905	0.33993835	0.26385224	-	0.35159817
25	0.30125863	0.27774552	0.34146341	0.28227109	0.32919847	0.22434368	0.05555556	0.36395147
26	0.28571429	0.25784535	0.32809871	0.26671238	0.28262047	0.20358423	-	0.33333333
27	0.23968566	0.24433983	0.31021999	0.27473124	0.27139640	0.24088542	0.16666667	0.28797468
28	0.35348333	0.23073722	0.29133204	0.25377449	0.23748395	0.19925743	0.13043478	0.30924855
29	0.25786359	0.21703700	0.28106592	0.24087276	0.24281984	0.18858561	0.12500000	0.25993884
30	0.24764992	0.21004583	0.27562446	0.23626312	0.20767494	0.17369093	0.17391304	0.26502311
31	0.25170999	0.19694340	0.27085714	0.23083150	0.26368159	0.16894410	0.16326531	0.22258592
32	0.23716558	0.18977318	0.24811594	0.22863485	0.21149897	0.18773946	0.13043478	0.27677100
33	0.23088456	0.17944413	0.24754193	0.20905476	0.20084567	0.17896175	0.13793103	0.18909091
34	0.21168169	0.17035327	0.23411765	0.19953973	0.18859139	0.12795549	0.21621622	0.20446097
35	0.21350932	0.16634316	0.21915285	0.20551237	0.20722892	0.16890080	0.11494253	0.18146718
36	0.22538553	0.16152081	0.19213697	0.21259030	0.17938420	0.13715047	0.22857143	0.17357002
37	0.20740741	0.15554350	0.22376738	0.17678348	0.17567568	0.14075067	0.15873016	0.14545455
38	0.20833333	0.14779778	0.20763648	0.17418000	0.19921875	0.14470990	0.09411765	0.15291751
39	0.18575851	0.14427667	0.17001647	0.17046038	0.14049587	0.13424658	0.12000000	0.13646055
40	0.17181208	0.13931661	0.16522893	0.16565209	0.21052632	0.13107822	0.22429907	0.13513514
41	0.18887824	0.13580409	0.18603133	0.15430862	0.15075377	0.12580415	0.24074074	0.12603032
42	0.15146986	0.12478128	0.15524806	0.16264674	0.09975062	0.11312849	0.15267176	0.12359551
43	0.15907954	0.12331548	0.16088947	0.14994179	0.08737864	0.10422535	0.18181818	0.07508532
44	0.15516319	0.12108146	0.15679788	0.14324525	0.10786517	0.09305655	0.25563910	0.12186380
45	0.15139442	0.11489776	0.14794521	0.14412955	0.06103286	0.11596278	0.20437956	0.07438017
46	0.14277423	0.11744045	0.14164306	0.12096774	0.09478673	0.10906298	0.11842105	0.04651163
47	0.13511939	0.11541972	0.13010481	0.12335629	0.07246377	0.08261886	0.17808219	0.10762332
48	0.14007782	0.11396315	0.11480363	0.12907752	0.06075949	0.07588933	0.20000000	0.13197970
49	0.10998553	0.10579364	0.10848861	0.11323764	0.09693878	0.07875308	0.16666667	0.11976048
50	0.11415168	0.09927031	0.09668756	0.12284578	0.04736842	0.09727947	0.25165563	0.06711409
51	0.10871441	0.09331273	0.09582543	0.11071610	0.06878307	0.07651246	0.13138686	0.08888889
52	0.10294118	0.08991748	0.09690310	0.09849363	0.06741573	0.06003752	0.14876033	0.03174603
53	0.07007007	0.08858238	0.10080183	0.10026738	0.03105590	0.05773196	0.13223140	0.06451613
54	0.07164179	0.08234711	0.10331633	0.10798479	0.06622517	0.09448819	0.14814815	0.03508772
55	0.09157128	0.08521892	0.08138659	0.11290323	0.05017921	0.07358739	0.22807018	0.03703704
56	0.07272727	0.07887795	0.08578638	0.08823529	0.05809129	0.06824926	0.15652174	0.04040404
57	0.08951708	0.08731222	0.10418605	0.09274673	0.00892857	0.08919383	0.17241379	0.02127660
58	0.17134831	0.10675469	0.10210877	0.14285714	0.17621145	0.22357724	0.18691589	0.11627907
59	0.29445507	0.17310037	0.13467049	0.24444444	0.25174825	0.26512968	0.37647059	0.03030303
60	0.34432234	0.24215247	0.20895522	0.23456790	0.11538462	0.21698113	0.34146341	0.08163265
61	0.27272727	0.19719695	0.15822785	0.18446602	0.27586207	0.25974026	0.22857143	0.17647059
62	0.19672131	0.19872867	0.13953488	0.17142857	0.11764706	0.30769231	0.08000000	0.16000000
63	0.09090909	0.18341825	0.18000000	0.17142857	0.50000000	0.30555556	0.58333333	0.09523810
64	0.22222222	0.23101067	0.10218978	0.27027027	0.66666667	0.25000000	0.11111111	0.15384615
65	0.26086957	0.23425022	0.16513761	0.22222222	1.00000000	0.34482759	0.50000000	-
66	0.58823529	0.30012937	0.15584416	0.48000000	-	0.50000000	0.25000000	-
67	0.25000000	0.24340771	0.16000000	0.55555556	-	0.33333333	0.20000000	-
68	0.80000000	0.27129338	0.08333333	0.75000000	-	0.66666667	0.85714286	-
69	-	0.58741259	0.72727273	-	-	0.50000000	1.00000000	-

■ **Tabla 15** Probabilidades de rotación por región.



edad	Población con Plan de Pensiones qx con PP	Población sin Plan de Pensiones qx sin PP
15		0.14285714
16	0.70588235	0.49500998
17	0.61414141	0.49503546
18	0.54965035	0.39708214
19	0.47145488	0.35532102
20	0.41017195	0.33576947
21	0.37137695	0.30995162
22	0.34665953	0.29498786
23	0.31958371	0.27883651
24	0.28749511	0.26447074
25	0.26935586	0.24865380
26	0.24821819	0.23542979
27	0.23459826	0.23273690
28	0.22899164	0.21779582
29	0.20965251	0.20495296
30	0.20096211	0.20469565
31	0.19219254	0.18825847
32	0.18133045	0.18525659
33	0.17132477	0.17494936
34	0.16307340	0.15805029
35	0.15913828	0.15760843
36	0.15590038	0.15564745
37	0.14805575	0.14087654
38	0.14149312	0.13447494
39	0.13859354	0.12327236
40	0.13595468	0.11302059
41	0.13529567	0.10923494
42	0.12282928	0.10331909
43	0.12195437	0.09878127
44	0.11839038	0.09275932
45	0.11372091	0.09087788
46	0.11141498	0.09211067
47	0.10891520	0.08694050
48	0.10678114	0.08740559
49	0.10119129	0.07973747
50	0.09358432	0.07671521
51	0.08659276	0.07202261
52	0.08525955	0.06610703
53	0.07874016	0.06717703
54	0.07838464	0.06539453
55	0.07720352	0.06625352
56	0.07198504	0.06053755
57	0.07765830	0.07040046
58	0.08500292	0.10052641
59	0.17445712	0.16524338
60	0.22222222	0.26376989
61	0.17836812	0.20158103
62	0.18274543	0.18232819
63	0.17746643	0.17550627
64	0.22489960	0.21862348
65	0.24330357	0.21643287
66	0.29629630	0.30030030
67	0.24802111	0.23469388
68	0.27586207	0.26229508
69	0.58252427	0.62962963

■ **Tabla 16** Probabilidades de rotación para la población con y sin plan de pensiones por jubilación.



**Figura 17** Probabilidad de rotación para la población con y sin plan de pensiones por jubilación.

edad 57 se aprecia una tendencia creciente hasta los 60 años. Es necesario recordar que estas bajas fueron clasificadas como rotación y no como jubilación. Pudiera ser que la cercanía a la edad en la que podría una persona promedio obtener una pensión por parte del Seguro Social sea lo que incentive a las personas cercanas a los 60 años a separarse voluntariamente de la empresa. Entre edades de 61 a 65 se aprecia una disminución de la probabilidad y vuelve a repuntar a edad 64 y 65. Esto pudiera deberse a que las personas opten por separarse de la empresa a edad 60 y jubilarse ante el Seguro Social o en caso contrario esperarse hasta los 64 ó 65 años para hacerlo. Partiendo de este comportamiento observado, valdría la pena replantear y analizar los supuestos de rotación que se consideran en las valuaciones actuariales para validar si es necesario rectificar una tendencia decreciente en la rotación para edades superiores a los 56 años de edad.

La Figura 18 y la Tabla 18 muestran las probabilidades ajustadas de despido y separación voluntaria. Éstas nos llevan a reflexionar si al considerar un supuesto constante de proporción de separación voluntaria y despido tiene algún fundamento y cuál pudiera ser el impacto de modificarlo conforme a la tendencia observada.

edad	qx Ajustada
15	0.55342043
16	0.55342043
17	0.55342043
18	0.55342043
19	0.46331628
20	0.41060874
21	0.37321214
22	0.34420508
23	0.32050459
24	0.30046612
25	0.28310800
26	0.26779705
27	0.25410094
28	0.24171130
29	0.23040045
30	0.21999547
31	0.21036197
32	0.20139340
33	0.19300385
34	0.18512309
35	0.17769291
36	0.17066456
37	0.16399680
38	0.15765443
39	0.15160716
40	0.14582875
41	0.14029631
42	0.13498974
43	0.12989133
44	0.12498536
45	0.12025783
46	0.11569621
47	0.11128925
48	0.10702681
49	0.10289971
50	0.09889961
51	0.09501894
52	0.09125077
53	0.08758876
54	0.08402709
55	0.08056041
56	0.07718379
57	0.08966502
58	0.12183978
59	0.17363566
60	0.24505266
61	0.19803316
62	0.19281372
63	0.19603301
64	0.21139057
65	0.24258596
66	0.29511677
67	0.30004844
68	0.37838973
69	0.60355030

■ **Tabla 17** Tabla de rotación.

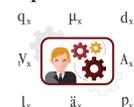
edad	%SV- suav	$q_x^{(desp)}$	Ajustada	$q_x^{(sep vol)}$	Ajustada
15	0.91236	0.04850346	0.50491696		
16	0.91236	0.04850346	0.50491696		
17	0.91236	0.04850346	0.50491696		
18	0.91236	0.04850346	0.50491696		
19	0.89671	0.04785783	0.41545845		
20	0.88145	0.04867567	0.36193307		
21	0.86660	0.04978509	0.32342705		
22	0.85215	0.05088981	0.29331527		
23	0.83810	0.05188922	0.26861538		
24	0.82445	0.05274674	0.24771937		
25	0.81120	0.05345106	0.22965693		
26	0.79835	0.05400188	0.21379517		
27	0.78590	0.05440392	0.19969702		
28	0.77385	0.05466421	0.18704710		
29	0.76219	0.05479069	0.17560976		
30	0.75094	0.05479159	0.16520389		
31	0.74009	0.05467503	0.15568695		
32	0.72964	0.05444888	0.14694452		
33	0.71959	0.05412066	0.13888319		
34	0.70994	0.05369753	0.13142556		
35	0.70068	0.05318625	0.12450665		
36	0.69183	0.05259323	0.11807133		
37	0.68338	0.05192450	0.11207230		
38	0.67533	0.05118578	0.10646865		
39	0.66768	0.05038247	0.10122469		
40	0.66043	0.04951970	0.09630905		
41	0.65357	0.04860232	0.09169399		
42	0.64712	0.04763493	0.08735482		
43	0.64107	0.04662190	0.08326943		
44	0.63542	0.04556742	0.07941794		
45	0.63017	0.04447544	0.07578239		
46	0.62531	0.04334977	0.07234644		
47	0.62086	0.04219401	0.06909524		
48	0.61681	0.04101165	0.06601517		
49	0.61316	0.03980599	0.06309372		
50	0.60991	0.03858023	0.06031939		
51	0.60705	0.03733741	0.05768153		
52	0.60460	0.03608050	0.05517028		
53	0.60255	0.03481230	0.05277646		
54	0.60090	0.03353555	0.05049154		
55	0.59964	0.03225288	0.04830753		
56	0.60515	0.03047577	0.04670802		
57	0.61066	0.03490991	0.05475511		
58	0.65871	0.04158322	0.08025656		
59	0.69279	0.05334216	0.12029350		
60	0.71923	0.06880284	0.17624982		
61	0.66759	0.06582820	0.13220496		
62	0.62366	0.07256405	0.12024968		
63	0.58580	0.08119653	0.11483648		
64	0.56010	0.09299055	0.11840002		
65	0.55263	0.10852530	0.13406066		
66	0.56745	0.12765403	0.16746274		
67	0.60049	0.11987188	0.18017656		
68	0.64569	0.13406651	0.24432323		
69	0.69697	0.18289403	0.42065627		

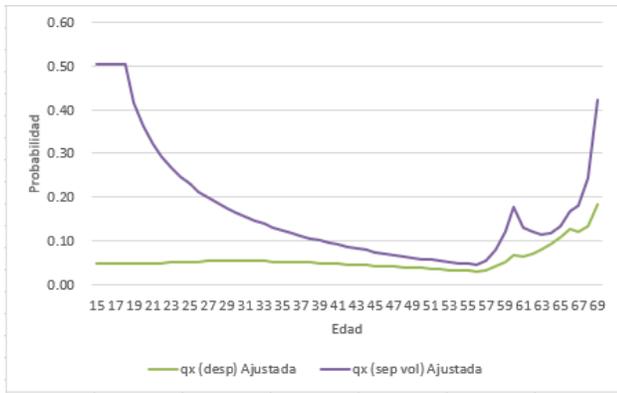
■ **Tabla 18** Probabilidades ajustadas de despido y separación voluntaria.

En la Figura 19 no se observa una tendencia constante a lo largo de las distintas edades. Más bien se observa una tendencia decreciente en la proporción de salidas por separación voluntaria, con algunos cambios en la pendiente a partir de edad 57.

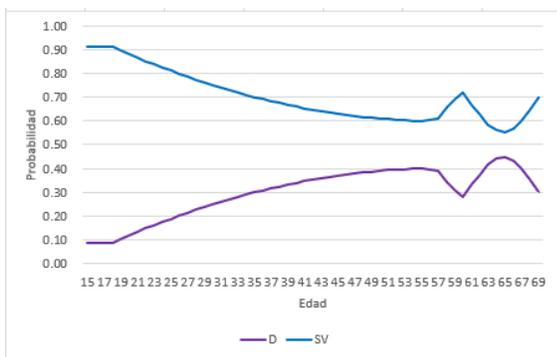
En las Figuras 20 y 21 se destaca que no se observa una constante a lo largo de las distintas edades.

Un comportamiento que se analizó de forma muy general fue el comportamiento que tiene la rotación en la población que cuenta con un plan de pensiones por jubilación y una que no. En la Tabla 16 la Figura 17 se muestra el comportamiento

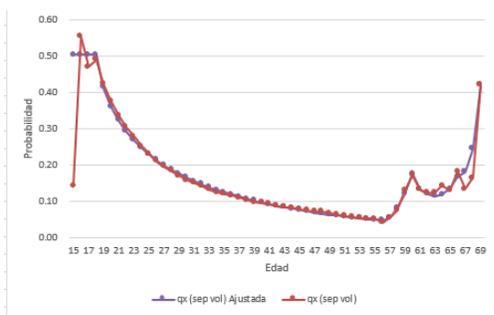




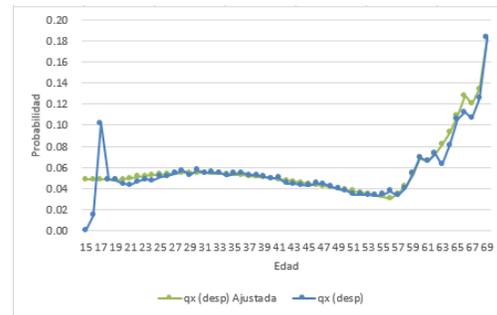
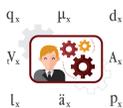
**Figura 18** Probabilidades ajustadas de separación voluntaria y despido.



**Figura 19** Proporciones ajustadas de separación voluntaria y despido y/o salidas negociadas.



**Figura 20** Probabilidades de separación voluntaria con y sin ajuste.



**Figura 21** Probabilidades de despido con y sin ajuste.

de la rotación comparada en estos dos grupos de poblaciones. De hecho, se observa que para algunas edades, la probabilidad de rotación es mayor en el grupo de empleados con Plan de Pensiones.

Dados los resultados observados en el presente documento, no se puede concluir que la existencia de un plan de pensiones por jubilación contribuya a la disminución de la rotación.

## AGRADECIMIENTO

Los autores agradecen a la actuario Yaneth Itzel Díaz Juárez, pues les brindó el apoyo para la programación de las validaciones y determinación de las tasas y probabilidades en R.

## A. ESTANDARIZACIÓN DE CAUSAS DE BAJA

Las causas de bajas que se identificaron y se tuvieron que estandarizar fueron:

- Abandono (Separación voluntaria) Abandono de Trabajo (Separación voluntaria)
- Abandono/Rescisión (Separación voluntaria)
- Accidente clave D (Invalidez)
- Actos inmorales (Despido y/o salida negociada)
- Aliento alcohólico (Despido y/o salida negociada)
- Ausencia de corrida (Separación voluntaria)
- Asentismo (Separación voluntaria)
- Despido (Despidos y/o salidas negociadas)
- Renuncia voluntaria (Separación voluntaria)
- Cambio a comarca (Transferencia)
- Cambio a líneas panamericanas (Transferencia)
- Cambio a personal administrativo (Transferencia)
- Cambio de empresa (Transferencia)
- Cambio de escuela a conductor (Transferencia)
- Cambio de puesto (Transferencia)
- Cambio de sucursal (Transferencia)

- Cuidado de hijos (Separación voluntaria)
- Defuncion (Fallecimiento)
- Defusion (Fallecimiento)
- Dejó de presentarse (Separación voluntaria)
- Despido injustificado (Despidos y/o salidas negociadas)
- Despido justificado (Despidos y/o salidas negociadas)
- Dictamen de invalidez (Invalidez)
- Falta honradez (Despidos y/o salidas negociadas)
- Faltantes en corte (Despidos y/o salidas negociadas)
- Fin de contrato (Rotación)
- Indisciplina (Despidos y/o salidas negociadas)
- Jubilacion (Jubilación)
- Justificado Despido (Despidos y/o salidas negociadas)
- Muerte (Fallecimiento)
- Motivos personales (Separación voluntaria)
- No honesto (Despidos y/o salidas negociadas)
- No renovación de contrato (Rotación)
- Otro empleo (Separación voluntaria)
- Otros (Otros, como reestructura)
- Pensión (Jubilación)
- Pensión médica (Invalidez)
- Positivo en antidoping (Despidos y/o salidas negociadas)
- Proyecto de reducción de personal (Otros, como reestructura)
- Recisión de contrato (Despidos y/o salidas negociadas)
- Reestructura (Otros, como reestructura)
- Reestructuración (Otros, como reestructura)
- Remoción (Despidos y/o salidas negociadas)
- Renuncia (Separación voluntaria)
- Renuncia voluntaria (Separación voluntaria)
- Rescisión de contrato (Despidos y/o salidas negociadas)
- Rescisión de contrato, abuso de confianza (Despidos y/o salidas negociadas)
- Rescisión laboral (Despidos y/o salidas negociadas)
- Retiro (Jubilación)
- Retiro voluntario (Separación voluntaria)
- Separacion voluntaria (Separación voluntaria)
- Separación voluntaria. (Separación voluntaria)
- Separacion voluntario (Separación voluntaria)
- Sin información (Rotación)
- Terminacion de contrato (Rotación)
- Terminación de contrato (Rotación)
- Término de contrato (Rotación)
- Transferencia a otra empresa (Transferencia)
- Trasferencia (Transferencia)

## B. RESGUARDO DE LA INFORMACIÓN

La información utilizada para el análisis se encuentra bajo resguardo de la AMAC y estará disponible para todos los

miembros. La información se puede encontrar en [esta ruta](#). En la carpeta original de información se encuentra la información tal cual se recibió de parte de cada uno de los equipos de los miembros de la AMAC. La carpeta bases para programación contiene la información que se estandarizó para compartir a la programadora y se pudiera integrar una sola base de datos para programar en R y proceder con su análisis. La carpeta programadora contiene la información que fue generando la programadora que nos apoyó en el proyecto. En esta carpeta se encuentran algunas validaciones y Tablas. De igual manera se tiene un folder en esta carpeta con las Tablas que se reprodujeron al correr el código en R. En la carpeta documentos finales se encuentran:

- Las bases en R.
- Los resultados de la programación generados con los últimos ajustes en la información procesada.
- El código de las validaciones de la información y del modelo para la Tabla de rotación
- Los cuadros resumen con los resultados y los análisis de suavizamientos.

## REFERENCIAS

- Burden, R. L., J. D. Faires, y A. M. Burden, 2015 *Numerical Analysis*. Cengage Learning, Canada.
- Chiang, C. L., 1968 *An Introduction to Stochastic Processes in Biostatistics*. John Wiley and Sons, Inc., New York.
- Greville, T. N. E., 1943 Short methods of constructing life tables. Record from the American Institute of Actuaries **32**: 29–42.
- Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática, 2024 *Indicador Mensual de la Actividad Industrial*. Sistema de Cuentas Nacionales de México, Aguascalientes.
- Kaplan, E. L. y P. Meier, 1958 Nonparametric estimation from incomplete observations. Journal of the American Statistical Association **53**: 457–481.





**Ana Ma. del Pilar Montes Sánchez** cuenta con más de 20 años de experiencia como consultor actuarial en diseño y valuación beneficios a empleados, atendiendo compañías privadas e internacionales. Tiene amplia experiencia en la definición de estrategias para optimizar impactos en costos por cambios en la remuneración total, la implementación de

beneficios flexibles, el diseño de planes de jubilación y otros beneficios de largo plazo, el desarrollo y la auditoría de valuaciones actuariales de pasivos laborales de acuerdo con USGAAP, IFRS y MEXGAAP, la definición de encuestas de beneficios para sectores determinados. Se graduó como actuario en el ITAM en 1998, es Maestra en Administración de Negocios, también por el ITAM, cuenta con dos Diplomados, y es actuario certificada por el Colegio Nacional de Actuarios en Pasivos Contingentes Laborales desde 2010. Además, fue miembro del Consejo Directivo de la Asociación Mexicana de Actuarios Consultores de 2012 a 2018, y de 2022 a la fecha.

**César Adrián Hernández Viveros** cuenta con 18 años de experiencia como Consultor actuarial; ocho de ellos en temas de pasivos; y los últimos diez, desarrollando aplicaciones para la Administración Integral de Riesgos en las empresas del sector asegurador, y de los sectores público y privado. Tiene amplia experiencia en valuaciones actuariales de pasivos laborales y diseño de planes de

retiro, valuaciones actuariales estocásticas, así como modelos para la gestión conjunta de activos y pasivos relacionados con planes de beneficio definido. Está a cargo del área de modelos analíticos para riesgos asegurables para la región de Latinoamérica. Fue docente de la materia de Pensiones Privadas en la Facultad de Ciencias de 2006 a 2020. Egresó de la licenciatura en Actuaría de la Universidad Nacional Autónoma de México, hizo una Maestría en Finanzas Bursátiles y Corporativas en la Universidad Marista, es actuario certificado por el Colegio Nacional de Actuarios en pasivos contingentes laborales desde 2016, así como Certified Risk Management Professional por The Risk Management Society y está certificado en administración cuantitativa del riesgo por el International Institute of Professional Education and Research. Está Diplomado en Administración de riesgos financieros en el ITESM. Miembro del Colegio Nacional de Actuarios y de The Risk Management Society.



**Carmen Licona Barajas** estudió Actuaría en la UNAM. Cuenta con 26 años de experiencia en Valuaciones Actuariales. Ha participado en diversos proyectos de consultoría para instituciones de Seguridad Social y empresas paraestatales, entre las que destacan: IMSS, ISSSTE, PEMEX, CFE, Banrural, Luz y Fuerza del Centro, Infonavit, Consejo de la

Judicatura. En estos proyectos ha efectuado la Valuación Actuarial y Financiera de las instituciones referidas, para efectuar el diagnóstico que permite determinar el grado de suficiencia de los recursos establecidos para garantizar la cobertura de las prestaciones que se otorgan. Como Jefa de Actuarios en Wealth LatAm para América Latina ha liderado proyectos de automatizaciones en procesos actuariales, consultoría en pensiones, asesorías actuariales, capacitaciones para la región y ha extendido su conocimiento de pasivos laborales para América Latina. Actualmente continúa con sus labores de Jefa de Actuarios y liderea proyectos relacionados con análisis de datos.

**José Miguel Hernández Martínez** es Actuario por la Universidad Nacional Autónoma de México. Cuenta con cinco años de experiencia realizando valuaciones actuariales para diversos clientes de distintos sectores con diferentes tamaños. Ha participado en valuaciones locales e internacionales, principalmente en América Latina. A lo largo de su carrera, ha participado en distintos

proyectos, entre los que destacan, la automatización de procesos actuariales, el análisis de supuestos en distintos clientes para identificar posibles cambios y/o actualizaciones, la implementación de simuladores de costos por reformas implementadas en los últimos años y las proyecciones a tres, cinco y diez años del Pasivo Laboral de algunos clientes.

Actualmente se desempeña como Consultor Senior en Aon, donde continúa realizando valuaciones de Pasivos Laborales para clientes de América Latina.





**Roberto Ángel Rocha López** es Director de Asesoría Actuarial ROM, con 28 años dedicados a la valuación actuarial de obligaciones laborales contingentes y al diseño, valuación, administración y comunicación de planes beneficios al retiro para el personal. Ha sido consultor de Petróleos Mexicanos, Aeropuertos y Servicios Auxiliares, del Foro Consultivo de CONACYT, Cartier, Revlon, Schneider Electric y otras compañías nacionales y extranjeras, en el desarrollo de esquemas pensionarios privados y de compensación al personal. Es actuario por la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) y estudió la Maestría en Dirección de Empresas en el Instituto Panamericano de Alta Dirección y diplomados en el área financiera en la UNAM y el Instituto Tecnológico Autónomo de México. Es Actuario Certificado por el Colegio Nacional de Actuarios y por la Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro para la valuación de planes privados de pensiones. Fue presidente del Consejo Directivo de la Asociación Mexicana de Actuarios Consultores de 2016 a 2018.

consultivo de CONACYT, Cartier, Revlon, Schneider Electric y otras compañías nacionales y extranjeras, en el desarrollo de esquemas pensionarios privados y de compensación al personal. Es actuario por la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) y estudió la Maestría en Dirección de Empresas en el Instituto Panamericano de Alta Dirección y diplomados en el área financiera en la UNAM y el Instituto Tecnológico Autónomo de México. Es Actuario Certificado por el Colegio Nacional de Actuarios y por la Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro para la valuación de planes privados de pensiones. Fue presidente del Consejo Directivo de la Asociación Mexicana de Actuarios Consultores de 2016 a 2018.





# ESTUDIANTES TRABAJANDO

## Gestión de riesgo de tasa en una reserva de mercado de seguros dotales puros vía swaps bajo procesos de Liu

David Sánchez Herrera

DOI:



# Gestión de riesgo de tasa en una reserva de mercado de seguros dotales puros vía swaps bajo procesos de Liu

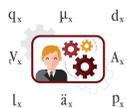
David Sánchez Herrera<sup>\*,1</sup>

\*Universidad Anáhuac Veracruz

**RESUMEN** La gestión de las reservas actuariales para seguros de dotación pura exige estrategias sólidas para garantizar la estabilidad ante la volatilidad del mercado. Este estudio integra bonos cupón cero y swaps de tipos de interés como herramientas de cobertura. Los bonos cupón cero eliminan el riesgo de reinversión y los swaps abordan los desajustes entre activos y pasivos, a la vez que mitigan los casos extremos de tipos de interés altos y bajos. Un análisis comparativo contrasta el marco estocástico, basado en procesos gaussianos, con el marco de incertidumbre, utilizando procesos canónicos de Liu para modelar. Mediante simulaciones numéricas, se evalúa el comportamiento de las cuentas con y sin swaps de tipos de interés en horizontes temporales de 5 y 15 años, lo que dilucida el papel de los swaps en la reducción de la dispersión y la mejora de la estabilidad de los valores terminales de las reservas de mercado. Los hallazgos destacan la relevancia del seguro de dotación pura como análogo actuarial de los bonos cupón cero, ofreciendo una base para modelos más complejos. Las investigaciones futuras podrían explorar mejoras como la calibración de modelos, la incorporación de medidas alternativas como medidas difusas o de posibilidad, y la integración de principios de finanzas cuánticas.

## Palabras clave

Reserva de dotación pura, Bono cupón cero, Swap de tipos de interés, Modelo de Vasicek, Proceso de Liu



Derechos reservados © 2025 por el Colegio Nacional de Actuarios

Última actualización del manuscrito: 30 de mayo de 2025

Artículo formateado por el autor. La visión y comentarios contenidos en este documento corresponden exclusivamente a su autor y, por tanto, son ajenos a cualquier entidad pública o privada, incluyendo aquella para la que actualmente colabora. El CONAC no recomienda ni respalda el uso de la información proporcionada en este estudio. El CONAC no ofrece ninguna garantía, expresa o implícita, ni representación de ningún tipo y no asume ninguna responsabilidad en relación con el uso o mal uso de este trabajo.

## 1. INTRODUCCIÓN

### Contexto y Motivación

La gestión de reservas actuariales, especialmente en seguros dotales puros, exige un enfoque matemático riguroso cuando se incorporan tasas de interés aleatorias. Aunque estos productos implican un único pago condicionado a la sobrevivencia, su cobertura representa un reto técnico relevante.

**Tradicionalmente**, en la formación actuarial se emplean **modelos con tasas deterministas**, conforme a las **bases actuariales de primer orden** que garantizan el principio de equivalencia, pero limitan la capacidad de reflejar dinámicas reales del mercado. Al avanzar hacia **bases de tercer orden**, se incorporan **tasas aleatorias modeladas mediante procesos estocásticos**, como el de Vasicek, dentro del marco probabilístico clásico.

Sin embargo, la teoría de la probabilidad requiere condiciones estructurales que resultan restrictivas cuando no se dispone de muestras suficientemente grandes para estimar frecuencias relativas estables, o cuando los fenómenos a modelar están dominados por la ambigüedad, la escasez de datos. En este contexto, **la Teoría Incierta de Liu ofrece una alternativa no probabilística** para modelar fenómenos aleatorios, utilizando medidas inciertas y procesos asociados que **capturan la aleatoriedad mediante grados de creencia**.

Esta dualidad metodológica entre el enfoque estocástico y el incierto motiva el presente trabajo, cuyo objetivo es comparar ambos esquemas en la modelación de la tasa de interés dentro de un mismo contexto actuarial.

### Revisión del Problema

La literatura actuarial ha comenzado a incorporar modelos más complejos que permiten la evolución estocástica de la tasa de interés. Un referente importante es el trabajo de **Møller y Steffensen (2007)**, donde se propone un modelo actuarial de reservas que utiliza instrumentos derivados como bonos cupón cero y swaps, en combinación con procesos estocásticos de tasas de interés como el modelo de Vasicek. Este enfoque permite reflejar de manera más precisa las condiciones de mercado en la estimación de la reserva técnica.

Sin embargo, esta línea de investigación se ha desarrollado exclusivamente dentro del marco probabilístico clásico. En la práctica actuarial, existen situaciones donde la información disponible no es suficiente para definir una probabilidad bien fundamentada, o donde el tomador de decisiones enfrenta ambigüedad y falta de precisión. Ante este tipo de situaciones, surge la necesidad de considerar estructuras matemáticas alternativas a la medida de probabilidad.

### Objetivo

El presente trabajo tiene como objetivo principal evaluar **estrategias de cobertura para la reserva de un seguro dotal puro bajo dos enfoques distintos de modelización de la tasa de interés**:

- Un **marco estocástico**, basado en el modelo de Vasicek, en el cual la evolución de la tasa se modela mediante una medida de probabilidad, la cual puede estimarse empíricamente a partir de datos históricos.
- Un **marco incierto**, basado en el modelo de Chen y Gao, construido sobre el proceso de Liu y la medida incierta, que permite representar fenómenos aleatorios bajo grados de creencias subjetivas coherentes con la lógica humana.

Ambos marcos se implementan dentro de la estructura propuesta por **Møller y Steffensen (2007)**, para hacer una comparación en términos de comportamiento de la reserva ante la sensibilidad de la tasa de interés.

Adicionalmente, se explora de manera preliminar el uso de *swaptions* como instrumentos complementarios de cobertura ante escenarios extremos, ampliando las posibilidades dentro del espacio de derivados financieros aplicados a seguros de vida.

### Justificación del Estudio

En la formación actuarial, los modelos de seguros de vida suelen construirse bajo supuestos simplificadores, como una tasa de interés constante, que facilitan la enseñanza pero no capturan la realidad del mercado financiero.

Este estudio surge de una inquietud académica: ¿cómo cambia el modelo de reservas si se sustituye la tasa constante por una tasa aleatoria? Esta exploración llevó a considerar bases actuariales de tercer orden, más acordes con la dinámica del mercado, desarrolladas en **Møller y Steffensen (2007)**.

Una segunda inquietud metodológica cuestionó el uso exclusivo de la medida de probabilidad para modelar la aleatoriedad. La Teoría Incierta de **Liu (2015)** ofreció una alternativa viable mediante la medida incierta, que permite representar aleatoriedad no probabilística. El modelo propuesto por Chen y Gao adaptó esta perspectiva al caso de tasas inciertas.

Así, **el trabajo demuestra que es posible reformular** el modelo de reserva del seguro dotal puro **bajo una medida incierta**, proponiendo un marco alternativo para modelar la fuerza de interés cuando la probabilidad resulta insuficiente.

### Contribuciones

Este estudio realiza tres contribuciones principales al cuerpo teórico y aplicado de las finanzas actuariales:



<sup>1</sup>Correo electrónico: [act.dave.saher@gmail.com](mailto:act.dave.saher@gmail.com)

1. Revisión y análisis del modelo clásico de **Møller y Steffensen (2007)**, destacando el papel de los bonos cupón cero y los swaps de interés como mecanismos esenciales en la gestión de reservas actuariales.
2. Extensión del modelo de reserva de mercado de **Møller y Steffensen (2007)** al marco de la Teoría Incierta desarrollado por **Liu (2015)**, incorporando la medida incierta y el proceso de Liu Canónico como herramientas alternativas para modelar fenómenos aleatorios sin necesidad de una estructura probabilística clásica.
3. Introducción de un análisis sobre el posible uso de *swaps* como mecanismos de cobertura, ampliando las alternativas para mitigar riesgos asociados a tasas de interés.

Estas aportaciones refuerzan la relevancia del trabajo al situarse en la intersección entre las finanzas estocásticas y las finanzas inciertas, integrando además consideraciones actuariales en el diseño de estrategias de cobertura ante la variabilidad de las tasas de interés.

### Estructura del Artículo

El documento se organiza en tres partes principales, cada una de las cuales desarrolla progresivamente los elementos teóricos, metodológicos y aplicados del trabajo:

1. **Parte I:** se presentan los modelos probabilísticos del bono cupón cero y de la tasa de interés estocástica.
  - Se introducen los fundamentos deterministas del bono cupón cero como punto de partida conceptual.
  - Posteriormente, se expone la teoría estocástica correspondiente, incluyendo la valoración del bono bajo medida de probabilidad y la modelación de la tasa de interés mediante el proceso de Vasicek.
2. **Parte II:** se desarrollan los modelos inciertos del bono cupón cero y de la tasa de interés.
  - Se introducen los conceptos esenciales de la Teoría Incierta: medida incierta, variable incierta, expectativa incierta y procesos inciertos.
  - Luego, se formulan los modelos financieros bajo este marco, incluyendo el valor actual incierto del bono cupón cero y la evolución de la tasa mediante el proceso de Liu (modelo de Chen y Gao).
3. **Parte III:** se construyen los modelos actuariales y se implementan numéricamente ambos enfoques.
  - Se define el seguro dotal puro y se desarrollan las reservas bajo distintos supuestos: la reserva clásica de primer orden y la reserva de mercado (de tercer orden).
  - Se integra el modelo de tasas estocásticas al cálculo de la reserva de mercado según Møller y Steffensen.

- Posteriormente, se adapta dicho modelo al marco incierto, construyendo una versión alternativa de la reserva bajo el proceso de Liu.
- Finalmente, se realiza una implementación numérica comparativa entre ambos enfoques (estocástico e incierto), analizando los resultados.

## Parte I

# Finanzas Estocásticas

## 2. BONO CUPÓN CERO

El objetivo de esta sección es presentar el tratamiento determinista y estocástico del bono cupón cero.

### Matemáticas Deterministas

Estas definiciones son extraídas del material presentado en el libro de **Vaaler et al. (2019)**, que proporciona una introducción rigurosa a la teoría del interés y sus aplicaciones financieras.

En Teoría del Interés, se estudia el concepto del **valor del dinero en el tiempo**. El valor temporal del dinero es un principio fundamental de las matemáticas financieras que establece que una cantidad de dinero tiene diferente valor dependiendo del momento en el que se disponga de ella, debido a factores como la capacidad de generar intereses o rendimientos. Matemáticamente, este principio se formaliza mediante el uso de tasas de interés, que, dependiendo de su comportamiento, permiten construir funciones de descuento, las cuales son utilizadas para calcular el **valor presente** y el **valor futuro** de un flujo de efectivo.

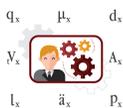
La **función de descuento**, denotada como  $a^{-1}(t)$ , es una herramienta fundamental en las matemáticas financieras que permite cuantificar el valor presente de una unidad monetaria futura. Su propósito es capturar la relación intrínseca entre el valor temporal del dinero y el efecto acumulativo de las tasas de interés sobre el tiempo. En términos formales, representa el factor multiplicativo que reduce el valor nominal futuro a su equivalente presente. En un marco general, se define como el **recíproco de la función de acumulación**  $a(t)$ , esto es

$$a^{-1}(t) = \frac{1}{a(t)},$$

donde  $a(t)$ , describe el crecimiento de 1 unidad monetaria invertida en  $t = 0$  a lo largo de  $t$  períodos de tiempo.

Cuando se desea incorporar una **fuerza de interés variable**,  $\tilde{i}_t$  (**nomenclatura actuarial**), su dinámica determinista está dada por la siguiente sencilla ecuación diferencial

$$a'(t) = \tilde{i}_t \cdot a(t), \tag{1}$$



la función de descuento se formaliza elegantemente como

$$a^{-1}(t) = e^{-\int_0^t \bar{i}_s ds}, \quad (2)$$

En el caso particular donde la fuerza de interés deja de ser variable (es constante),  $\bar{i}_t = \bar{i}$ , la función de descuento se simplifica a

$$a^{-1}(t) = e^{-\int_0^t \bar{i} ds} = e^{-\bar{i} \int_0^t ds} = e^{-\bar{i}t}, \quad (3)$$

en el contexto actuarial este caso particular es llamado **factor de descuento** y se denota como sigue

$$v^t = e^{-\bar{i}t}. \quad (4)$$

Gracias a la función de acumulación que depende de una fuerza de interés variable, es posible definir la función de monto  $A(t)$ , cuyo dominio es  $\mathcal{D}_{A_c} = \{t : t \in \mathbb{R}^+\}$ . Esta función representa el saldo de una inversión inicial  $A(0)$  en el tiempo  $t$

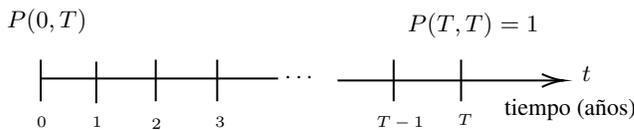
$$A(t) = A(0) \cdot e^{\int_0^t \bar{i}_s ds}, \quad (5)$$

en el contexto de ingeniería financiera, finanzas cuantitativas o finanzas matemáticas, esta función es llamada **cuenta bancaria**. La cual se considera el activo "libre de riesgo" en un portafolio de  $N$  activos riesgosos.

Un bono cupón cero (*zero-coupon bond*) es un instrumento de deuda que se distingue por la ausencia de pagos periódicos de interés (cupones), es decir, no realiza cupones durante su vida útil. Estos bonos se comercializan a un descuento respecto a su valor nominal, de manera que el único flujo de efectivo que el inversor recibe es el pago de dicho valor nominal al vencimiento del bono.

El rendimiento del bono se genera a partir de la apreciación del precio de compra inicial hasta el valor de redención al vencimiento. Esta estructura lo convierte en un instrumento financiero puro, donde la única consideración es el tiempo y el efecto de la capitalización compuesta de las tasas de interés.

Un bono descontado que comienza en el tiempo 0 y vence en el tiempo  $T$  es un valor con la promesa, por parte del emisor del bono, estableciendo que pague 1 unidad monetaria al tenedor del bono cuando este vence. De esta manera su valor máximo alcanzado en  $T$  es 1 unidad monetaria. El flujo de caja de un bono  $T$  que paga una unidad monetaria en el momento de vencimiento  $T$  se puede visualizar en la figura a continuación:



La relación más esencial, pero profundamente fundamental, para determinar el valor de un bono se expresa en la siguiente definición.

**Definición 2.1.** *Bono Cupón Cero Continuo.*

Sea  $P(T, T)$  el valor nominal a recibir en el tiempo  $T$  (vencimiento del bono) e  $\bar{i}_t$  la fuerza de interés variable respecto al tiempo. El valor presente en tiempo  $t = 0$ ,  $P(0, T)$ , de un bono cupón cero se define como sigue

$$P(0, T) = P(T, T) \cdot e^{-\int_0^T \bar{i}_s ds}. \quad (6)$$

La fórmula resulta intuitiva: el valor del reclamo futuro se reduce a su equivalente presente utilizando una función de descuento apropiada, siendo aplicable a cualquier clase de reclamo. Sin embargo, su derivación no es inmediata ni evidente.

### Tasas Spot & Tasas Forward

Las siguientes definiciones están basadas en el material presentado en el libro de Filipović (2009), el cual ofrece una introducción rigurosa a los modelos matemáticos de la estructura temporal de tasas de interés en tiempo continuo, explorando herramientas teóricas como modelos de tasas cortas, el marco de Heath-Jarrow-Morton, y análisis de procesos afines.

Considere un bono con precio a tiempo  $t$  denotado por  $P(t, t_2)$ , que vence en el tiempo  $t_2$ . Para entregar este bono en un tiempo  $t_1$ ,  $t < t_1 < t_2$ , con la condición de no existencia de oportunidades de arbitraje. La tasa forward implícita  $\bar{r}^f(t; t_1, t_2)$  para el período  $[t_1, t_2]$ , se define como:

$$\frac{P(t, t_2)}{P(t, t_1)} = e^{-(t_2 - t_1)\bar{r}^f(t; t_1, t_2)}, \quad (7)$$

resolviendo para la tasa forward se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{r}^f(t; t_1, t_2) &= -\frac{\ln P(t, t_2) - \ln P(t, t_1)}{t_2 - t_1}, \\ &= \frac{(t_2 - t)\bar{i}_{[t, t_2]} - (t_1 - t)\bar{i}_{[t, t_1]}}{t_2 - t_1}, \end{aligned} \quad (8)$$

donde  $\bar{i}_{[t, t_j]} = -\frac{\ln\{P(t, t_j)\}}{t_j - t}$ .

Al tomar el límite  $t_2 - t_1 \rightarrow 0$ , obtenemos la tasa forward instantánea, que refleja la tasa de interés para un infinitesimal período de tiempo en el futuro, y es denotada como  $\bar{f}(t, t_2)$ :

$$\begin{aligned} \bar{f}(t, t_2) &\equiv \lim_{t_1 \rightarrow t_2} \bar{r}^f(t; t_1, t_2), \\ &= -\frac{\partial}{\partial t_2} \ln P(t, t_2), \\ &= \bar{i}_{[t, t_2]} + (t_2 - t) \frac{\partial}{\partial t_2} \bar{i}_{[t, t_2]}. \end{aligned} \quad (9)$$



Ahora es posible definir  $\bar{i}_{[t,t]}$ . Primero, observe que  $\bar{f}(t, t) = \bar{i}_{[t,t]} = \lim_{t_2 \rightarrow t} \bar{f}(t, t_2)$ . Luego resulta

$$\begin{aligned}\bar{i}_{[t,t]} &= \lim_{t_2 \rightarrow t} -\frac{\ln \{P(t, t_2)\}}{t_2 - t}, \\ &= \lim_{t_2 \rightarrow t} -\frac{\partial}{\partial t_2} \ln \{P(t, t_2)\}.\end{aligned}\quad (10)$$

Además, es posible expresar el precio del bono en términos de la tasa forward capitalizable continuamente

$$\begin{aligned}\ln \{P(t, t_2)\} - \ln \{P(t, t)\} &= \int_t^{t_2} \frac{\partial \{P(t, s)\}}{\partial s} ds, \\ &= \int_t^{t_2} -\bar{f}(t, s) ds,\end{aligned}$$

finalmente se obtiene:

$$P(t, t_2) = e^{-\int_t^{t_2} \bar{f}(t, s) ds}, \quad (11)$$

adicionalmente, resulta la siguiente relación entre la tasa forward y el factor de descuento

$$a^{-1}(t, T) = e^{-\int_t^T \bar{f}(t, s) ds}. \quad (12)$$

## Matemáticas Estocásticas

Estas definiciones son obtenidas del material presentado en el libro de Björk (2020), el cual constituye una referencia completa sobre la teoría de arbitraje en tiempo continuo, abordando tanto los fundamentos de los mercados financieros como las aplicaciones avanzadas de los modelos estocásticos y la valoración de derivados financieros.

Se considera un espacio de probabilidad filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ , donde  $\Omega$  es el espacio muestral y  $\mathcal{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra que representa el conjunto de eventos. La familia  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  es una filtración, es decir, una colección creciente de  $\sigma$ -álgebras tal que  $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$  para  $s \leq t$ . La medida de probabilidad  $\mathbb{P}$  está definida en  $\mathcal{F}$ .

Una **variable aleatoria** es una función  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que es  $\mathcal{F}$ -medible, lo cual significa que

$$Y^{-1}(A) \in \mathcal{F} \quad \text{para todo } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

donde  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  representa la  $\sigma$ -álgebra de Borel en  $\mathbb{R}$ . Esta  $\sigma$ -álgebra es la colección más pequeña de conjuntos que contiene todos los intervalos abiertos de la forma  $(s, t)$ , con  $s \leq t$  y  $s, t \in \mathbb{R}$ .

De esta forma, la  $\mathcal{F}$ -medibilidad de  $Y$  garantiza que se pueda asignar una probabilidad a cualquier intervalo de valores posibles de  $Y$  a través de la estructura de  $\mathcal{F}$  en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .



Un **proceso estocástico** es una colección de variables aleatorias  $\{X_t\}_{t \in T}$  indexadas por el tiempo  $t \in [0, \infty)$ . Decimos que el proceso es adaptado si  $X_t$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible para todo  $t \geq 0$ . Una **trayectoria muestral** de un proceso estocástico es la trayectoria de  $X(\cdot, \omega)$ , manteniendo  $\omega$  fijo.

Consideramos un modelo de tiempo continuo con un horizonte finito  $[0, T]$ , donde las transacciones ocurren en instantes  $t \in [0, T)$  y todos los resultados de estas transacciones se realizan en  $t = T$ . En  $t = T$ , no se efectúan nuevas transacciones, ya que todos los activos negociados se liquidan y distribuyen en ese momento.

Un **reclamo contingente** es una obligación de pago que depende de la realización de ciertos eventos futuros o del comportamiento de un activo subyacente. El monto y el momento del pago están condicionados a dichas contingencias. Por ejemplo: un seguro de vida, cuyo pago depende del fallecimiento del asegurado. Y una opción financiera, cuyo valor depende del precio del activo subyacente al vencimiento.

### Definición 2.2. Reclamo Contingente.

Un **reclamo contingente con vencimiento en  $T$**  es un flujo de efectivo aleatorio representado con una variable aleatoria  $\mathcal{X}$ . Es el valor o el monto que será entregado al titular en el momento  $T$ , dependiendo de la información disponible en ese momento.

Para valorar de manera coherente los reclamos contingentes en un mercado sin arbitraje, se utiliza una **medida de martingala  $\mathbb{Q}$**  que permite construir un proceso de precios consistente con los precios de los activos subyacentes. Bajo esta medida  $\mathbb{Q}$ , los precios descontados de los activos actúan como martingalas, lo que asegura que no existen oportunidades de obtener ganancias sin riesgo mediante arbitraje.

La medida  $\mathbb{Q}$  transforma la valoración al permitir que el valor presente esperado de los pagos futuros del reclamo contingente bajo esta medida sea igual al precio de mercado. Este ajuste asegura que la estructura de precios en el mercado sea coherente y que los precios reflejen el riesgo inherente de los flujos de efectivo futuros. De esta manera  $\mathbb{Q}$  es la medida de probabilidad usada para la valoración de los bonos y los derivados de la tasa de interés, por ello su nombre alternativo es **medida del mercado**.

En este mercado se negocia una cuenta monetaria  $A(t)$  y  $N$  activos riesgosos. Los mercados son **sin fricciones y competitivos**, lo cual implica:

- **Sin fricciones**: no existen costos de transacción, impuestos diferenciales ni límites en la cantidad negociada; los activos son divisibles y no están sujetos a restricciones como ventas en corto, límites de préstamo, o márgenes.

- **Competitividad:** los operadores actúan como tomadores de precios, es decir, pueden negociar cualquier cantidad deseada sin afectar el precio de mercado.

Consideremos un conjunto de  $N$  **activos riesgosos**,  $S_t = (S_{1t}, \dots, S_{Nt})^\top > 0$ , el vector de precios de los  $N$  activos riesgosos en el tiempo  $t$ . Note que se excluye el activo  $S_{0t}$ , esto se debe a que se define que  $S_{0t}$  representa un activo **libre de riesgo**, en este marco en particular, es una **cuenta monetaria**  $A(t)$ . Específicamente  $S_{0t}$  juega un papel fundamental como **activo numéraire** en el modelo.

En el contexto de valoración de activos, todos los precios se interpretan en términos de un **numéraire** seleccionado a priori, que sirve como unidad de referencia para expresar el valor de otros activos. Este numéraire suele ser una moneda local, como el peso mexicano (MX). No obstante, se podría utilizar cualquier otro activo o indicador como base, siempre que sea adecuado para el análisis. Para simplificar, en este caso elegimos el activo  $S_{0t}$  como numéraire. Se modela de acuerdo con la siguiente dinámica:

$$dS_{0t} = S_{0t} \bar{i}_t dt, \quad S_{00} = 1, \quad \mathbb{P}(S_{0t} > 0) = 1 \quad \forall t > 0,$$

donde

- $\bar{i}$  es la tasa libre de riesgo, un proceso estocástico adaptado a la filtración  $\mathcal{F}$  y que cumple la condición de integrabilidad  $\int_0^t |\bar{i}_s| ds < \infty$  para todo  $t \geq 0$ , es decir, es un proceso estocástico adaptado.
- Es importante notar que  $A(t) > 0$  para todo  $t \geq 0$ .
- La cuenta monetaria se inicia con una inversión de una unidad monetaria, es decir,  $A(0) = 1$ .

Consideramos el mercado “primario” o “subyacente” de activos  $S_{1t}, \dots, S_{Nt}$  como dado a priori y fijamos un reclamo contingente  $\mathcal{X}$ . El objetivo es determinar un proceso de precios “razonable”  $\Pi_t[\mathcal{X}]$  para  $\mathcal{X}$  asumiendo que el mercado primario está libre de arbitraje.

El precio de un derivado debe ser consistente con los precios de los activos subyacentes. Esto implica que el mercado extendido  $\Pi[\mathcal{X}], S_{1t}, \dots, S_{Nt}$  debe estar libre de posibilidades de arbitraje. Para lograrlo, debe existir una medida de martingala  $\mathbb{Q}$  para el mercado extendido.

**Teorema 2.3.** *Fórmula General de Valoración.*

*El proceso de precios libre de arbitraje para el reclamo  $\mathcal{X}$  de vencimiento  $T$  está dado por:*

$$\Pi_t[\mathcal{X}] = S_{0t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{\Pi_T[\mathcal{X}]}{S_{0T}} \middle| \mathcal{F}_t \right] = S_{0t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{\mathcal{X}}{S_{0T}} \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad (13)$$

donde  $\mathbb{Q}$  es una medida de martingala (no necesariamente única) para el mercado dado con  $S_{0t}$  como numéraire.

**Lema 2.4.** *Valoración Neutral al Riesgo.*

*Asumiendo la existencia de una fuerza de interés estocástica  $\bar{i}_t$ , la fórmula de valoración toma la forma:*

$$\Pi_t[\mathcal{X}] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T \bar{i}_s ds} \mathcal{X} \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad (14)$$

donde  $\mathbb{Q}$  es una medida de martingala con la cuenta monetaria como numéraire.

El mercado de bonos se diferencia de otros mercados financieros en los siguientes aspectos:

- Contiene un número infinito de activos (un bono por cada posible tiempo de vencimiento  $T$ ).
- Cada bono tiene una trayectoria estocástica específica, dependiendo de su vencimiento.

Bajo una medida martingala neutral al riesgo  $\mathbb{Q}$ , el precio actual de un reclamo contingente  $\mathcal{X}$  pagadero en el tiempo  $T$  se calcula mediante (14). Para un bono cupón cero con vencimiento  $T$ , el reclamo contingente  $\mathcal{X} = 1$ , por lo tanto, se obtiene la siguiente definición.

**Definición 2.5.** *Precio Justo de un Bono Cupón Cero.* *Considere un reclamo contingente  $\mathcal{X} = 1$  con vencimiento  $T$ , por definición, es un bono cupón cero. Por lo tanto, bajo una medida martingala neutral al riesgo  $\mathbb{Q}$ , el precio de un bono cupón cero al instante  $t$  se calcula como*

$$P(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T \bar{i}_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (15)$$

Aplicando Itó a  $P(t, T)$  se obtiene su dinámica estocástica

$$dP = \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{\partial P}{\partial \bar{i}} d\bar{i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \bar{i}^2} d\langle \bar{i} \rangle.$$

Asumiendo que **la fuerza de interés** sigue una ecuación diferencial estocástica de la siguiente forma

$$d\bar{i}_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

sustituyendo en la dinámica de  $P$  se obtiene

$$dP(t, T) = P(t, T) m_t dt + P(t, T) v_t dW_t^{\mathbb{P}}, \quad (16)$$

donde

- $m_t = \frac{1}{P} \left[ \frac{\partial P}{\partial t} + \mu_t \frac{\partial P}{\partial \bar{i}} + \frac{\sigma_t^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \bar{i}^2} \right]$ .
- $v_t = \frac{1}{P} \sigma_t \frac{\partial P}{\partial \bar{i}}$ .



Ahora es de interés cambiar la medida de  $\mathbb{P}$  a  $\mathbb{Q}$ , una medida equivalente, bajo la cual el precio de los bonos cumple con la **ausencia de arbitraje**.

Para garantizar que las medidas  $\mathbb{P}$  y  $\mathbb{Q}$  sean equivalentes, se asume que  $\gamma_t$  satisface la condición de Novikov. Se define un nuevo movimiento Browniano  $W^{\mathbb{Q}}$  bajo la medida  $\mathbb{Q}$  como

$$W^{\mathbb{Q}} = W^{\mathbb{P}} + \int_0^t \gamma_s ds,$$

además, la relación entre ambas medidas es

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left\{ - \int_0^T \gamma_t dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt \right\}$$

De esta forma el precio del bono  $P(t, T)$  bajo  $\mathbb{Q}$  es

$$\begin{aligned} dP(t, T) &= P(t, T) \left[ m_t dt + v_t dW_t^{\mathbb{P}} \right], \\ &= P(t, T) \left[ m_t dt + v_t (dW^{\mathbb{Q}} - \gamma_t dt) \right], \\ &= P(t, T) \left[ (m_t - \gamma_t v_t) dt + v_t dW^{\mathbb{Q}} \right], \end{aligned}$$

recordando que para que sea una martingala bajo la medida de riesgo neutral  $\mathbb{Q}$ , la deriva debe ser igual a la fuerza de interés, por lo tanto

$$d\bar{i}_t = P(t, T) \left[ \bar{i}_t dt + v_t dW^{\mathbb{Q}} \right]. \quad (17)$$

Manteniendo la asunción que la fuerza de interés  $\bar{i}_t$  es modelada mediante la siguiente ecuación diferencial estocástica (en la Sección 3 se definirá de manera detallada)

$$d\bar{i}_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t^{\mathbb{P}},$$

la dinámica estocástica bajo  $\mathbb{Q}$  es

$$d\bar{i}_t = \tilde{\mu}_t dt + \sigma_t dW_t^{\mathbb{Q}} = (\mu_t - \gamma_t \sigma_t) dt + \sigma_t dW_t^{\mathbb{Q}},$$

para simplificar el análisis, asumimos que  $\gamma_t = 0$ , lo que implica que  $\mathbb{P}$  es la medida martingala utilizada en el mercado, lo que implica

$$\tilde{\mu}_t = \mu_t.$$

La propiedad de Markov establece que el futuro de  $\bar{i}_t$  después de un tiempo  $t$  depende únicamente del valor presente  $\bar{i}_t$  y no del historial completo

$$\mathbb{E}[f(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[f(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) | X_t],$$

para cualquier función integrable  $f$ .

Las soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas como  $d\bar{i}_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$  tienen esta propiedad de manera



inherente. De esta manera, el precio de un bono cupón cero  $P(t, T)$  satisface

$$\begin{aligned} P(t, T) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T \bar{i}_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right], \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T \bar{i}_s ds} \mid \bar{i}_t \right], \end{aligned} \quad (18)$$

es decir, depende únicamente de  $\bar{i}_t$ :

$$P(t, T) = F(t, \bar{i}_t), \quad (19)$$

donde  $F(t, \cdot)$  es una función de  $\bar{i}_t$  que se determina resolviendo una ecuación diferencial parcial asociada al modelo. Dicho esto, es natural notar que la siguiente relación surge

$$P(t, T) = F(t, \bar{i}_t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T \bar{i}_s ds} \right], \quad (20)$$

para formalizar y verificar este resultado, se hace uso de la representación de Feynman-Kac.

### 3. FUERZA DE INTERÉS ESTOCÁSTICA

Esta sección está basada en el material presentado en *MøllerySteffensen (2007)*.

Un **bono cupón cero** es un contrato que tiene un precio de mercado en el tiempo  $t$ , denotado como  $P(t, T)$ , y que promete un pago de 1 unidad monetaria al vencimiento  $T$ . La determinación del precio de este bono a partir de un proceso subyacente de tasas de interés a corto plazo  $\bar{i}_t$ .

#### 1. Tasa de interés constante y determinista ( $\bar{i}$ ):

- Si la fuerza de interés variable es una constante determinista  $\bar{i} > 0$ , el precio del bono cupón cero debe satisfacer:

$$\begin{aligned} P(t, T) &= 1 \cdot e^{-\int_t^T \bar{i}_s = \bar{i} ds}, \\ &= 1 \cdot e^{-\bar{i} \int_t^T ds}, \\ &= 1 \cdot e^{-\bar{i} |t|}, \\ &= 1 \cdot e^{-\bar{i}(T-t)}, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

#### 2. Tasa de interés dependiente del tiempo y determinista ( $\bar{i}_t$ ):

- Cuando la fuerza interés varía en función del tiempo, pero sigue siendo determinista, se tiene que:

$$P(t, T) = 1 \cdot e^{-\int_t^T \bar{i}_s ds}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

### 3. Tasa de interés estocástica ( $\bar{i}_t$ ):

- Si la fuerza de interés se modela como un proceso estocástico, la fórmula anterior ya no es aplicable directamente. En este caso, el precio del bono en el tiempo  $t$  sólo puede depender de la información disponible hasta ese instante, lo que significa que  $P(t, T)$  se construye considerando la expectativa de la evolución futura de la tasa de interés, condicionada a la información presente en el tiempo  $t$ . Su precio es aquel que se obtiene mediante **la valoración neutral al riesgo** (2.5).

La modelización de tasas de interés a corto plazo es fundamental para la valoración de instrumentos financieros derivados y la gestión de carteras de renta fija. La tasa de interés instantánea  $\bar{i}_t$  (también conocida como **fuerza de interés, tasa de interés a corto plazo** o *tasa de interés spot*) es la tasa aplicable para operaciones de préstamo o inversión a un horizonte temporal infinitesimal alrededor de un instante  $t$ . Esta tasa describe el costo del capital en el mercado libre de riesgo a lo largo de intervalos infinitesimales  $[t, t + dt]$ .

Un **modelo de un factor** se basa en la idea de que hay una única fuente de aleatoriedad que afecta a los precios de los bonos. Esta fuente es generalmente un proceso de Browniano unidimensional,  $B_t$ . Si la fuerza de interés  $\bar{i}_t$  está determinada por un único factor, entonces conocer cómo cambia  $\bar{i}_t$  permite inferir los cambios en los precios de todos los bonos.

Un **modelo multifactorial** considera que hay múltiples fuentes de aleatoriedad que afectan a los precios de los bonos, podrían incluir diferentes procesos estocásticos.

#### Modelos de un Factor

Los modelos de un factor se utilizan para describir la estructura temporal de las tasas de interés. Estos modelos se basan en un enfoque estocástico para modelar la tasa libre de riesgo,  $\bar{i}_t$  mediante una ecuación diferencial estocástica (EDE). En general, se asume que  $\bar{i}_t$  sigue un proceso de Itô de la forma

$$d\bar{i}_t = a_t dt + b_t dW_t,$$

para simplificar el análisis, se asume que  $a_t$  y  $b_t$  dependen únicamente del valor actual de  $\bar{i}_t$ , es decir:  $a_t = a(\bar{i}_t)$  y  $b_t = b(\bar{i}_t)$ . Bajo esta suposición,  $\bar{i}_t$  es un proceso de Markov homogéneo en el tiempo.

Se considera un modelo de estructura temporal en el que la única fuente de aleatoriedad es un movimiento browniano unidimensional. Las tasas de interés libres de riesgo  $\bar{i}_t$  y el precio  $P(t, T)$  de un bono cupón cero que vence en  $T$  están modelados mediante las siguientes ecuaciones diferenciales estocásticas:

- Para la tasa libre de riesgo  $\bar{i}_t$ :

$$d\bar{i}_t = a_t dt + b_t dW_t, \quad (21)$$

donde  $a_t$  y  $b_t$  son funciones que describen la deriva y la volatilidad de  $\bar{i}_t$ , respectivamente.

- Para el precio del bono  $P(t, T)$ :

$$dP(t, T) = P(t, T)[m(t, T)dt + S(t, T)dW_t], \quad (22)$$

donde  $m(t, T)$  es la tasa esperada de retorno del bono y  $S(t, T)$  representa la volatilidad del bono.

Se asocia a estos procesos una cuenta monetaria (el activo libre de riesgo)  $A(t)$ , cuya evolución está dada por

$$dA(t) = \bar{i}_t A(t) dt, \quad (23)$$

cuya solución es

$$A(t) = A(0) \exp\left(\int_0^t \bar{i}_s ds\right), \quad (24)$$

lo anterior refleja cómo la fuerza de interés afecta la evolución del valor de una inversión libre de riesgo.

#### Modelo Vasicek

El modelo de Vasicek es un caso particular dentro de los modelos de un factor para la estructura temporal de tasas de interés. Fue introducido en 1977 y es ampliamente utilizado por su simplicidad matemática y capacidad para capturar ciertos comportamientos fundamentales de las tasas de interés. El modelo describe la dinámica de la tasa libre de riesgo  $\bar{i}_t$  mediante una ecuación diferencial estocástica (EDE).

La ecuación para  $\bar{i}_t$  está dada por:

$$d\bar{i}_t = (\mu - \alpha \bar{i}_t) dt + \sigma dW_t^Q, \quad (25)$$

- Término de reversión a la media

$$(\mu - \alpha \bar{i}_t) dt,$$

este término fuerza a  $\bar{i}_t$  a regresar hacia su media a largo plazo  $\mu$ . Los elementos clave son:

- $\mu$ : representa la media a largo plazo de  $\bar{i}_t$  bajo la medida  $Q$ . Se interpreta como la tasa libre de riesgo esperada a largo plazo.
- $\alpha$ : es la velocidad de reversión. Un valor alto de  $\alpha$  implica que  $\bar{i}_t$  regresa rápidamente a  $\mu$ , mientras que un valor bajo implica una reversión más lenta.



- Término de volatilidad

$$\sigma dW_t^{\mathbb{Q}},$$

este término introduce aleatoriedad en el modelo. Aquí:

- $\sigma$ : representa la magnitud de la volatilidad local de  $\tilde{r}_t$ , es decir, cuán sensibles son las tasas de interés a corto plazo a las fluctuaciones aleatorias.
- $dW_t^{\mathbb{Q}}$ : es el incremento infinitesimal del movimiento browniano estándar bajo  $\mathbb{Q}$ , que introduce la componente estocástica en la evolución de  $\tilde{r}_t$ .

Ahora que ya se tiene la ecuación diferencial estocástica que modela la dinámica de la fuerza de interés, se puede construir la valoración de un bono cupón cero que depende de dicha dinámica.

### Definición 3.1. Bono Cupón Cero de Vasicek

Si la fuerza de interés estocástica se rige bajo el modelo de Vasicek

$$d\tilde{r}_t = (\mu - \alpha\tilde{r}_t)dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}, \quad (26)$$

el precio del bono cupón cero es

$$P(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T \tilde{r}_s ds} \mid \mathcal{F}_t \right] = e^{A(t, T) - B(t, T)\tilde{r}_t}, \quad (27)$$

1. La función  $B(t, T)$  se define como sigue

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}. \quad (28)$$

2. Para  $A(t, T)$  se obtiene

$$A(t, T) = \frac{[B(t, T) - (T - t)] \left( \alpha\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\alpha^2} - \frac{\sigma^2 [B(t, T)]^2}{4\alpha}. \quad (29)$$

## Parte II

## Finanzas Inciertas

### 4. TEORÍA INCIERTA

El propósito de esta sección es exhibir conceptos básicos de la Teoría Incierta, sin profundizar por fines de no hacer extenso el documento. Se presentan aquellos conceptos necesarios para entender la diferencia entre una medida de probabilidad y una medida incierta.

Estas definiciones son extraídas del material presentado en el libro Liu (2015), el cual ofrece una visión exhaustiva de la Teoría de la Incertidumbre, explorando sus fundamentos axiomatizados, aplicaciones en programación incierta y modelos de ecuaciones diferenciales inciertas.



### Medida Incierta

La **Medida Incierta** es un concepto en la teoría matemática de la incertidumbre, que define una medida basada en el **grado de creencia** de la ocurrencia de un evento, en lugar de su frecuencia. Este marco es particularmente útil en situaciones donde el modelo probabilístico tradicional no describe adecuadamente las incertidumbres subyacentes.

Una **medida incierta**  $\mathcal{M}$  es una herramienta matemática utilizada para cuantificar el grado de creencia en la ocurrencia de eventos, basada en una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{L}$  sobre un conjunto universal  $\Gamma$ .

Una función de conjunto  $\mathcal{M}$  se denomina **medida incierta** si satisface los axiomas de normalidad, dualidad y subaditividad.

- **Axioma de Normalidad:** la medida de todo el espacio es uno, es decir

$$\mathcal{M}(\Gamma) = 1,$$

esto asegura que la creencia completa no puede superar uno, ya que  $\Gamma$  es completamente creíble.

- **Axioma de Dualidad:** la suma de las medidas de un evento y su complemento es siempre uno

$$\mathcal{M}(A) + \mathcal{M}(A^c) = 1,$$

para cualquier evento  $A$ . Indica que la suma de la creencia en un evento y su complemento siempre es uno.

- **Axioma de Subaditividad:** para cualquier secuencia contable de eventos  $A_1, A_2, \dots$ , la medida de la unión es menor o igual que la suma de las medidas individuales

$$\mathcal{M} \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{M} \{ A_i \},$$

la creencia combinada de eventos no debe exceder la suma de las creencias individuales, lo que se demuestra con un argumento de comisiones negativas.

#### Observaciones:

- La medida incierta no es una frecuencia, sino una representación del grado de creencia, que puede cambiar con nueva información.
- El axioma de dualidad es una manifestación del principio de no contradicción y el tercero excluido en lógica clásica, asegurando que la suma de la creencia y la duda sobre un evento siempre suma uno.
- No existe una regla general para determinar la creencia sobre la unión de eventos a partir de sus creencias individuales, destacando la flexibilidad y la complejidad de la teoría de la medida incierta en contraste con la probabilidad clásica.

- La violación del axioma de subaditividad puede llevar a resultados paradójicos o contradictorios, evidenciando su importancia para la coherencia del sistema de medidas.
- Aunque las medidas de probabilidad cumplen con los axiomas básicos, no son casos especiales de medidas inciertas debido a diferencias en axiomas adicionales como el axioma de producto.

**Definición 4.1.** *Espacio de Incertidumbre.*

Un espacio de incertidumbre  $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$  es un conjunto no vacío  $\Gamma$ , una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{L}$  sobre  $\Gamma$ , y una medida incierta  $\mathcal{M}$ . Este trío define completamente un espacio de incertidumbre.

Para propósitos prácticos, el estudio de espacios de incertidumbre a veces se limita a espacios de incertidumbre completos.

**Definición 4.2.** *Espacio de Incertidumbre Completo.*

Un espacio de incertidumbre  $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$  se considera completo si para cualquier  $A_1, A_2 \in \mathcal{L}$  con  $\mathcal{M}(A_1) = \mathcal{M}(A_2)$  y cualquier subconjunto  $A$  con  $A_1 \subseteq A \subseteq A_2$ , se tiene  $A \in \mathcal{L}$  y

$$\mathcal{M}\{A\} = \mathcal{M}\{A_1\} = \mathcal{M}\{A_2\}.$$

Sea  $(\Gamma_k, \mathcal{L}_k, \mathcal{M}_k)$  espacios de incertidumbre para  $k = 1, 2, \dots$ . Se define

$$\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \dots ,$$

que es el conjunto de todas las tuplas ordenadas de la forma  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots)$ , donde  $\gamma_k \in \Gamma_k$  para  $k = 1, 2, \dots$ . Un rectángulo medible en  $\Gamma$  es un conjunto

$$\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \dots ,$$

donde  $\Lambda_k \in \mathcal{L}_k$  para  $k = 1, 2, \dots$ . La menor  $\sigma$ -álgebra que contiene todos los rectángulos medibles de  $\Gamma$  se llama la  $\sigma$ -álgebra producto, denotada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2 \times \dots ,$$

entonces, la medida incierta de producto  $\mathcal{M}$  sobre la  $\sigma$ -álgebra producto  $\mathcal{L}$  se define por el siguiente axioma de producto.

**Teorema 4.3.** *Axioma de Producto*

Sea  $(\Gamma_k, \mathcal{L}_k, \mathcal{M}_k)$  espacios de incertidumbre para  $k = 1, 2, \dots$ . La medida incierta de producto  $\mathcal{M}$  es una medida incierta que satisface

$$\mathcal{M} \left\{ \prod_{k=1}^{\infty} \Lambda_k \right\} = \bigwedge_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k \{ \Lambda_k \},$$

donde  $\Lambda_k$  son eventos arbitrariamente elegidos de  $\mathcal{L}_k$  para  $k = 1, 2, \dots$ , respectivamente.  $\wedge$  representa el mínimo de las medidas individuales.

Se asume que  $(\Gamma_k, \mathcal{L}_k, \mathcal{M}_k)$  son espacios de incertidumbre para  $k = 1, 2, \dots$ . Se define

$$\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \dots , \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2 \times \dots , \quad \mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \wedge \mathcal{M}_2 \wedge \dots$$

Entonces, la tripleta  $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$  se denomina *espacio de incertidumbre de producto*.

Ahora, ya conocida la media incierta, se puede comparar con la medida de probabilidad.

**Probabilidad vs Incertidumbre**

**Medida del producto de eventos.**

- Teoría de probabilidad (Kolmogorov): La probabilidad de un producto de eventos es el producto de las probabilidades individuales

$$\mathbb{P}\{A \times B\} = \mathbb{P}\{A\} \times \mathbb{P}\{B\}.$$

- Teoría de incertidumbre (Liu): la medida de incertidumbre de un producto de eventos es el mínimo de las medidas de incertidumbre individuales

$$\mathcal{M}\{A \times B\} = \mathcal{M}\{A\} \wedge \mathcal{M}\{B\}.$$

**Teorema del Producto.**

- Producto de Probabilidad: en un espacio de probabilidad  $(\Omega_k, \mathcal{A}_k, \mathbb{P}_k)$  para  $k = 1, 2, \dots$ , la medida de probabilidad producto se define como una medida que satisface la siguiente propiedad:

$$\mathbb{P} \left( \prod_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_k(A_k),$$

donde  $A_k$  son eventos arbitrarios seleccionados de  $\mathcal{A}_k$ , el sigma-álgebra asociado al espacio  $\Omega_k$ .

- Producto de Medidas Inciertas: en un espacio incierto  $(\Gamma_k, \mathcal{L}_k, \mathcal{M}_k)$  para  $k = 1, 2, \dots$ , la medida incierta producto sigue un principio análogo pero definido bajo el marco de la teoría de incertidumbre. Esta medida satisface la relación

$$\mathcal{M} \left( \prod_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \bigwedge_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k(\Lambda_k),$$

donde  $\Lambda_k$  son eventos arbitrarios pertenecientes a  $\mathcal{L}_k$ , la colección de conjuntos medibles asociados al espacio incierto  $\Gamma_k$ .



En lugar de usar productos (como en probabilidad), la teoría de incertidumbre emplea el operador mínimo  $\wedge$ , consistente con su definición de medida incierta.

La **teoría de probabilidad se interpreta en términos de frecuencia** (relacionada con eventos repetibles).

La **teoría de incertidumbre se interpreta como el grado de creencia** (subjettiva).

### Independencia

Al igual que en la Teoría de Probabilidad, se define el concepto de independencia.

#### Definición 4.4. Independencia.

Los eventos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  se consideran independientes si

$$\mathcal{M} \left\{ \bigcap_{i=1}^n A_i^* \right\} = \bigwedge_{i=1}^n \mathcal{M} \{ A_i^* \},$$

donde  $A_i^*$  son elegidos arbitrariamente de  $\{A_i, A_i^c, \Gamma\}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , y  $\Gamma$  es el evento seguro.  $\bigvee$  representa el máximo de las medidas individuales.

Especialmente, dos eventos  $A_1$  y  $A_2$  son independientes si y solo si

$$\{A_1^* \cap A_2^*\} = \mathcal{M}\{A_1^*\} \wedge \mathcal{M}\{A_2^*\},$$

donde  $A_i^*$  son elegidos arbitrariamente de  $\{A_i, A_i^c\}$  para  $i = 1, 2$ , y se cumplen las siguientes cuatro ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{A_1 \cap A_2\} &= \mathcal{M}\{A_1\} \wedge \mathcal{M}\{A_2\}, \\ \mathcal{M}\{A_1 \cap A_2^c\} &= \mathcal{M}\{A_1\} \wedge \mathcal{M}\{A_2^c\}, \\ \mathcal{M}\{A_1^c \cap A_2\} &= \mathcal{M}\{A_1^c\} \wedge \mathcal{M}\{A_2\}, \\ \mathcal{M}\{A_1^c \cap A_2^c\} &= \mathcal{M}\{A_1^c\} \wedge \mathcal{M}\{A_2^c\}. \end{aligned}$$

**Teorema 4.5.** Los eventos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son independientes si y solo si

$$\mathcal{M} \left\{ \bigcup_{i=1}^n A_i^* \right\} = \bigwedge_{i=1}^n \mathcal{M} \{ A_i^* \},$$

donde  $A_i^*$  son elegidos arbitrariamente de  $\{A_i, A_i^c, \emptyset\}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , y  $\emptyset$  es el evento imposible.

**Teorema 4.6.** Sea  $(\Gamma_k, \mathcal{L}_k, \mathcal{M}_k)$  espacios de incertidumbre para  $k = 1, 2, \dots, n$ . Entonces los eventos

$$\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_{k-1} \times \Lambda_k \times \Gamma_{k+1} \times \dots \times \Gamma_n$$

son siempre independientes en el espacio de incertidumbre de producto. Es decir, los eventos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son siempre independientes si provienen de espacios de incertidumbre diferentes.



### Variables Inciertas

En probabilidad existen variables aleatorias, en este marco, se definen las variables inciertas.

#### Definición 4.7. Variable Incierta

Una variable incierta  $\xi$  es una función del espacio de incertidumbre  $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$  a los números reales tal que para cualquier conjunto de Borel  $B$ , el conjunto  $\{\xi \in B\}$  es un evento, es decir,  $\{\gamma \in \Gamma : \xi(\gamma) \in B\} \in \mathcal{L}$ .

Una variable incierta  $\xi$  es:

- **No negativa** si  $\mathcal{M}\{\xi < 0\} = 0$ . Es decir, no existe creencia alguna (o esta es nula) de que  $\xi$  pueda adoptar valores estrictamente negativos.
- **Positiva** si  $\mathcal{M}\{\xi \leq 0\} = 0$ . Restringiendo aún más la medida incierta de una variable, el evento en que la variable incierta  $\xi$  toma un valor menor o igual a cero es considerado “imposible” o, más precisamente, tiene un grado de creencia nulo. Se está imponiendo que ni siquiera el caso extremo  $\xi = 0$  es creíble; es decir, la totalidad de la “masa” de creencia se concentra en los valores estrictamente positivos,  $\{\xi > 0\}$ . La consecuencia inmediata es que la totalidad del grado de creencia se concentra en el intervalo  $(0, +\infty)$ , la variable  $\xi$  es estrictamente positiva. Ya que ni la posibilidad de ser negativa ni la posibilidad de ser cero son admitidas.
- Decimos que dos variables inciertas  $\xi$  y  $\eta$  son **iguales** si  $\xi(\gamma) = \eta(\gamma)$  para casi todos  $\gamma \in \Gamma$  respecto a  $\mathcal{M}$ .
- Si  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  son variables inciertas y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función medible, entonces la variable incierta  $\xi$  definida por  $\xi(\gamma) = f(\xi_1(\gamma), \xi_2(\gamma), \dots, \xi_n(\gamma))$  para todo  $\gamma \in \Gamma$  es también una variable incierta.

**Definición 4.8.** Las variables inciertas  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  se consideran independientes si, para cualquier conjunto de Borel  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , se cumple

$$\mathcal{M} \left\{ \bigcap_{i=1}^n (\xi_i \in B_i) \right\} = \bigwedge_{i=1}^n \mathcal{M} \{ \xi_i \in B_i \},$$

esto indica que la medida incierta conjunta es el mínimo de las medidas inciertas individuales.

**Definición 4.9.** Las variables inciertas  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  son independientes si y sólo si para cualquier conjunto de Borel  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , se cumple

$$\mathcal{M} \left\{ \bigcup_{i=1}^n (\xi_i \in B_i) \right\} = \bigvee_{i=1}^n \mathcal{M} \{ \xi_i \in B_i \}.$$

### Distribuciones Inciertas

Una vez ya conocida la variable incierta, se puede construir una distribución incierta.

#### Definición 4.10. Distribución incierta.

La distribución incierta  $\Phi$  de una variable incierta  $\xi$  se define por

$$\Phi(x) = \mathcal{M}\{\xi \leq x\},$$

para cualquier número real  $x$ .

Dos variables inciertas  $\xi$  y  $\eta$  se dicen *distribuidas idénticamente* si tienen la misma distribución incierta, aunque esto no implica que  $\xi = \eta$ . Por ejemplo, si  $\xi$  y  $\eta$  pueden tomar valores con los mismos grados de creencia pero en diferentes contextos o configuraciones, aún así tendrán la misma distribución incierta.

#### Teorema 4.11. Teorema Peng-Iwamura.

Una función  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  es una distribución incierta si y solo si es una función monótona creciente tal que  $\Phi(x) = 0$  para  $x$  suficientemente pequeño y  $\Phi(x) = 1$  para  $x$  suficientemente grande.

#### Definición 4.12. Variable Incierta Normal.

Una variable incierta  $\xi$  se dice **normal** si posee una distribución incierta normal, dada por la función:

$$\Phi(x) = \left( 1 + \exp \left( -\frac{\pi(e-x)}{\sqrt{3}\sigma} \right) \right)^{-1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

denotada por  $\mathcal{N}(e, \sigma)$ , donde  $e$  y  $\sigma$  son números reales con  $\sigma > 0$ .

Sean  $\xi_1$  y  $\xi_2$  variables inciertas normales independientes con distribuciones  $\mathcal{N}(e_1, \sigma_1)$  y  $\mathcal{N}(e_2, \sigma_2)$ , respectivamente. Entonces:

1. Suma de variables inciertas normales: la suma  $\xi_1 + \xi_2$  es también una variable incierta normal, con parámetros

$$\mathcal{N}(e_1, \sigma_1) + \mathcal{N}(e_2, \sigma_2) = \mathcal{N}(e_1 + e_2, \sigma_1 + \sigma_2).$$

2. Producto por un escalar: el producto de una variable incierta normal  $\mathcal{N}(e, \sigma)$  y un escalar positivo  $k > 0$  es también una variable incierta normal, con parámetros modificados

$$k \cdot \mathcal{N}(e, \sigma) = \mathcal{N}(ke, k\sigma).$$

#### Definición 4.13. Variable Incierta Lognormal

Una variable incierta  $\xi$  se considera **lognormal** si es una variable normal  $\mathcal{N}(e, \sigma)$  transformada mediante el logaritmo, es decir, su distribución está definida como:

$$\Phi(x) = \left( 1 + \exp \left( \frac{\pi(e - \ln \{x\})}{\sqrt{3}\sigma} \right) \right)^{-1}, \quad x \geq 0,$$

denotada por  $\mathcal{LOGN}(e, \sigma)$ .

Sean  $\xi_1$  y  $\xi_2$  variables inciertas lognormales independientes con distribuciones  $\mathcal{LOGN}(e_1, \sigma_1)$  y  $\mathcal{LOGN}(e_2, \sigma_2)$ , respectivamente. Entonces:

1. Producto de variables inciertas lognormales: El producto  $\xi_1 \cdot \xi_2$  es también una variable incierta lognormal, con parámetros

$$\mathcal{LOGN}(e_1, \sigma_1) \cdot \mathcal{LOGN}(e_2, \sigma_2) = \mathcal{LOGN}(e_1 + e_2, \sigma_1 + \sigma_2).$$

2. Producto por un escalar: El producto de una variable incierta lognormal  $\mathcal{LOGN}(e, \sigma)$  y un escalar positivo  $k > 0$  es también una variable incierta lognormal, con parámetros modificados

$$k \cdot \mathcal{LOGN}(e, \sigma) = \mathcal{LOGN}(e + \ln \{k\}, \sigma).$$

Para cualquier variable incierta  $\xi$  con distribución  $\Phi$ :

$$\mathcal{M}\{\xi \leq x\} = \Phi(x), \quad \mathcal{M}\{\xi > x\} = 1 - \Phi(x).$$

Si  $\Phi$  es continua, también se cumplen las siguientes relaciones para  $\xi$ :

$$\mathcal{M}\{\xi < x\} = \Phi(x), \quad \mathcal{M}\{\xi \geq x\} = 1 - \Phi(x).$$

La **distribución incierta inversa**  $\Phi^{-1}$  de una variable incierta con distribución regular  $\Phi$  se define como la función inversa de  $\Phi$ , que existe en el intervalo abierto  $(0,1)$ .

Una función  $\Phi^{-1}$  es una distribución incierta inversa de una variable incierta  $\xi$  si y solo si para cualquier  $\alpha \in [0, 1]$ ,

$$\mathcal{M}\{\xi \leq \Phi^{-1}(\alpha)\} = \alpha,$$

esto implica que  $\Phi$  es la distribución incierta de  $\xi$  y  $\Phi^{-1}$  es su inversa.

Asumiendo que la función inversa  $\Phi^{-1}$  satisface la siguiente relación para todo  $\alpha \in [0, 1]$ :

$$M\{\xi \leq \Phi^{-1}(\alpha)\} = \alpha,$$



esto implica que si escribimos  $x = \Phi^{-1}(\alpha)$ , entonces  $\alpha = \Phi(x)$  y así:

$$M\{\xi \leq x\} = \Phi(x),$$

demostrando que  $\Phi$  es la distribución incierta de  $\xi$  y  $\Phi^{-1}$  es su distribución incierta inversa. Esta relación confirma que la distribución y su inversa están correctamente definidas y operan como se espera dentro del marco de la teoría de la incertidumbre.

**Definición 4.14.** Valor Esperado de una Variable Incierta

Para una variable incierta  $\xi$ , el valor esperado  $E[\xi]$  se define mediante la integral:

$$E[\xi] = \int_0^{+\infty} M\{\xi \geq x\} dx - \int_{-\infty}^0 M\{\xi \leq x\} dx,$$

suponiendo que al menos uno de los dos integrales es finito. Esta definición capta tanto la contribución de los valores positivos como la de los valores negativos de  $\xi$  bajo la medida incierta  $M$ .

El valor esperado bajo la teoría de incertidumbre difiere del concepto clásico en probabilidad, pues no presupone una distribución de probabilidad subyacente, sino que se basa directamente en la medida de incertidumbre asignada a los eventos definidos por la variable  $\xi$ . Este enfoque permite considerar situaciones donde la incertidumbre no se puede cuantificar claramente mediante probabilidades.

**Definición 4.15.** Si  $\xi$  es una variable incierta con distribución  $\Phi$ , el valor esperado se calcula como:

$$E[\xi] = \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(x)) dx - \int_{-\infty}^0 \Phi(x) dx.$$

De manera alternativa, el valor esperado se puede expresar utilizando la integral de la derivada de la distribución  $\Phi$ :

$$E[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} x d\Phi(x),$$

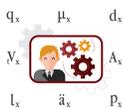
si  $\Phi(x)$  tiene una derivada  $\phi(x)$ , entonces:

$$E[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\phi(x) dx,$$

pero no es apropiado considerar  $\phi(x)$  como una función de densidad de probabilidad, dado que la **medida incierta no es aditiva**.

**Definición 4.16.** Para variables inciertas con una distribución regular  $\Phi$ , el valor esperado también se puede calcular como:

$$E[\xi] = \int_0^1 \Phi^{-1}(\alpha) d\alpha.$$



**Procesos Inciertos**

A continuación se presenta la contraparte de los procesos estocásticos (teoría de probabilidad) en su versión incierta.

Un **proceso incierto**  $X_t$  sobre un espacio de incertidumbre  $(T, \mathcal{L}, \mathcal{M})$  es una función medible desde  $T \times (\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$  a los números reales tal que para cualquier conjunto Borel  $B$  de números reales,  $\{X_t \in B\}$  es un evento en cada instante  $t$ . El proceso tiene incrementos independientes si:

- Los incrementos  $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$  son independientes para cualquier secuencia de tiempos  $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ .
- Tiene incrementos estacionarios si  $X_{s+t} - X_s$  son idénticamente distribuidos para todo  $s > 0$ .

Se dice que los procesos inciertos  $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}$  son independientes para cualquier entero positivo  $k$  y tiempos  $t_1, t_2, \dots, t_k$  si, para vectores inciertos

$$\xi = (X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}),$$

donde  $i = 1, 2, \dots, n$ , son independientes; es decir, para cualquier conjuntos Borel  $B_1, B_2, \dots, B_n$  de vectores reales  $k$ -dimensionales, tenemos

$$\mathcal{M} \left( \bigcap_{i=1}^n \{\xi \in B_i\} \right) = \bigwedge_{i=1}^n \mathcal{M}\{\xi \in B_i\}.$$

**Definición 4.17.** Proceso de Liu Canónico.

Un proceso incierto es un proceso de Liu Canónico  $C_t$  si cumple con las siguientes condiciones:

1.  $C_0 = 0$  y casi todas las trayectorias son continuas de Lipschitz.
2. Los incrementos  $C_{t+s} - C_t$  son estacionarios e independientes.
3.  $C_{t+s} - C_t$  es una variable incierta normal con distribución  $\mathcal{N}(0, t^2)$ :

$$\Phi_t(x) = \left( 1 + \exp \left( -\frac{\pi x}{\sqrt{3}t} \right) \right)^{-1},$$

con distribución incierta inversa

$$\Phi_t^{-1}(\alpha) = \frac{t\sqrt{3}}{\pi} \ln \left\{ \frac{\alpha}{1-\alpha} \right\}.$$

¿Algún parecido con el proceso de Wiener?

**Definición 4.18.** *Integral Incierta.*

Para un intervalo cerrado  $[a, b]$ , y un proceso incierto  $X_t$  con respecto a un proceso de Liu  $C_t$ , la integral incierta se define como:

$$\int_a^b X_t dC_t = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k X_{t_i} \cdot (C_{t_{i+1}} - C_{t_i}),$$

donde  $\Delta = \max_{1 \leq i \leq k} |t_{i+1} - t_i|$  y  $t_1 < t_2 < \dots < t_k$  son particiones del intervalo  $[a, b]$ .

**Definición 4.19.** *Ecuación Diferencial Incierta.*

Un proceso de Liu  $C_t$  se usa para definir una ecuación diferencial incierta de la forma:

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dC_t,$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones medibles que representan las dinámicas determinista y estocástica del sistema, respectivamente, y  $C_t$  es un proceso de Liu que describe la incertidumbre.

La ecuación diferencial incierta

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dC_t,$$

donde  $C_t$  es un proceso de Liu, es equivalente a la siguiente ecuación integral incierta:

$$X_s = X_0 + \int_0^s f(t, X_t)dt + \int_0^s g(t, X_t)dC_t,$$

donde  $X_s$  es un proceso de Liu con deriva  $f(t, X_t)$  y difusión  $g(t, X_t)$ .

**Teorema 4.20.** *Trayectoria  $\alpha$  de Yao y Chen.*

Consideremos una ecuación diferencial incierta definida por un proceso de Liu  $C_t$ . La trayectoria  $\alpha$  para  $\alpha \in (0, 1)$ , es la solución de la ecuación diferencial ordinaria correspondiente:

$$dX_t^\alpha = f(t, X_t^\alpha)dt + |g(t, X_t^\alpha)|\Phi^{-1}(\alpha)dt,$$

donde  $\Phi^{-1}(\alpha) = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \ln \frac{\alpha}{1-\alpha}$  es la función inversa de la distribución incierta normal estándar para el parámetro  $\alpha$ . Sea  $X_t$  la solución de la ecuación diferencial incierta y  $X_t^\alpha$  el camino  $\alpha$ . Entonces, para cualquier tiempo  $t$ , se cumple que:

$$\mathcal{M}\{X_t \leq X_t^\alpha, \forall t\} = \alpha, \quad \mathcal{M}\{X_t \geq X_t^\alpha, \forall t\} = 1 - \alpha.$$

De esta manera  $X_s$  tiene una función de incertidumbre inversa

$$\psi^{-1}(a) = X_s^a, \quad 0 < a < 1$$

## 5. FINANZAS INCIERTAS

### Acciones Inciertas

El modelo supone que el precio de las acciones sigue una ecuación diferencial incierta, y se describe junto con el precio del bono de la siguiente manera

$$\begin{cases} dX_t = \bar{i}X_t dt, \\ dY_t = eY_t dt + \sigma Y_t dC_t, \end{cases}$$

- $X_t$  : Precio del bono.
- $Y_t$  : Precio de la acción.
- $\bar{i}$  : Tasa de interés libre de riesgo.
- $e$ : Deriva logarítmica del precio de la acción.
- $\sigma$ : Difusión logarítmica.
- $C_t$  : Proceso de Liu canónico.

El precio del bono está dado por

$$X_t = X_0 e^{\bar{i}t}, \tag{30}$$

el precio de la acción sigue la expresión

$$Y_t = Y_0 e^{et + \sigma C_t}.$$

La distribución de incertidumbre inversa del precio de la acción está dada por

$$\Phi_t^{-1}(\alpha) = Y_0 \exp \left\{ et + \frac{\sigma t \sqrt{3}}{\pi} \ln \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \right\}.$$

### Modelo General de Acciones

El precio de las acciones  $Y_t$  está determinado por la siguiente ecuación diferencial incierta

$$dY_t = F(t, Y_t)dt + G(t, Y_t)dC_t,$$

donde  $F(t, Y_t)$  es una función que describe la deriva del precio de las acciones.  $G(t, Y_t)$  es una función que describe la difusión incierta en el precio de las acciones.

El  $\alpha$ -trayecto del precio de la acción  $Y_t^\alpha$  puede calcularse mediante métodos numéricos.

### Valoración del Bono Cupón Cero

**Definición 5.1.** *Valoración del Bono Cupón Cero Incierto*

Sea  $\bar{i}_t$  la tasa de interés incierta. El precio de un bono cupón cero con vencimiento en  $T$  está dado por

$$\tilde{P}(0, T) = E \left[ \exp \left( - \int_0^T \bar{i}_t dt \right) \right]. \tag{31}$$



Sea  $\tilde{i}_t^\alpha$  el  $\alpha$ -trayecto de la tasa de interés incierta  $\tilde{i}_t$ . Entonces, el precio de un bono cupón cero con vencimiento en  $T$  es

$$\tilde{P}(0, T) = \int_0^1 \exp\left(-\int_0^T \tilde{i}_t^\alpha dt\right) d\alpha. \quad (32)$$

### Fuerza de Interés Incierta

Los modelos de tasas de interés inciertas describen cómo las tasas reales evolucionan con el tiempo bajo incertidumbre, siguiendo ecuaciones diferenciales inciertas.

La tasa de interés incierta puede ser descrita por

$$d\tilde{i}_t = F(t, \tilde{i}_t)dt + G(t, \tilde{i}_t)dC_t, \quad (33)$$

donde  $F$  y  $G$  son funciones que modelan la dinámica de la tasa de interés.

### Modelo de Chen y Gao

**Definición 5.2.** Fuerza de Interés Incierta de Chen y Gao.

La fuerza de interés  $\tilde{i}_t$  evoluciona según la ecuación diferencial incierta

$$d\tilde{i}_t = (\mu - a\tilde{i}_t)dt + \sigma dC_t, \quad (34)$$

- $\mu, a, \sigma$  son constantes positivas.
- $C_t$  es un proceso de Liu canónico.
- El término  $\sigma dC_t$  captura la incertidumbre.

La fuerza de interés incierta que satisface dicha ecuación diferencial incierta es expresada por

$$\tilde{i}_t = \frac{\mu}{a} + e^{-at} \left(\tilde{i}_0 - \frac{\mu}{a}\right) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dC_s, \quad (35)$$

donde  $C_s$  es un proceso canónico de Liu.

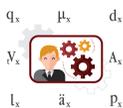
Este modelo es una contraparte del modelo de **Vasicek** en el ámbito de las ecuaciones diferenciales inciertas, y es utilizado frecuentemente para capturar la dinámica en entornos financieros donde la incertidumbre juega un papel crucial.

El valor esperado de la tasa incierta es

$$E(\tilde{i}_t) = \frac{\mu}{a} + e^{-at} \left(\tilde{i} - \frac{\mu}{a}\right), \quad (36)$$

su varianza

$$\text{Var}(\tilde{i}_t) = \frac{\sigma^2}{a^2} (1 - e^{-2at}). \quad (37)$$



### Bono Cupón Cero de Chen y Gao

En el artículo *Pricing Longevity Bonds Under the Uncertainty Theory Framework* **Gao y Liu (2019)**, se demuestra el precio de un bono cupón cero, cuya fuerza de interés se modela mediante el modelo de Chen y Gao definido anteriormente.

**Definición 5.3.** Bono Cupón Cero de Chen y Gao

El precio de un bono cupón cero que involucra una fuerza de interés incierta, cuya dinámica se rige bajo el modelo de Chen y Gao

$$d\tilde{i}_t = (\mu - a\tilde{i}_t)dt + \sigma dC_t, \quad (38)$$

es

$$\tilde{P}(t, T) = E \left[ e^{-\int_t^T \tilde{i}_s ds} \right] = A(t, T)B(t, T). \quad (39)$$

1.  $A(t, T)$  :

$$A(t, T) = \alpha \csc(\alpha), \quad (40)$$

donde  $\rho$  se define como

$$\alpha = \sqrt{3} \left[ \frac{\sigma(T-t)}{a} + \frac{\sigma}{a^2} (e^{-aT} - e^{-at}) \right]. \quad (41)$$

2.  $B(t, T)$  :

$$B(t, T) = e^{-\frac{\mu(T-t)}{2a} - \frac{1}{a}(\tilde{i}_0 - \frac{\mu}{a})(e^{-at} - e^{-aT})}. \quad (42)$$

## Parte III

## Modelos Actuariales

### 6. MODELOS ACTUARIALES PARA SEGUROS DE VIDA

#### Variables Principales

Un modelo actuarial típico incluye:

1. Componente biométrico: Relacionado con suposiciones sobre mortalidad o longevidad. En el contexto actuarial es la **fuerza de mortalidad**,  $\mu_t$ .
2. Componente financiero: Relacionado con suposiciones sobre tasas de interés. En el contexto actuarial es la **fuerza de interés**,  $\tilde{i}_t$ .

Cuando las evaluaciones se realizan en un contexto de tiempo continuo, ambos componentes requieren modelos en tiempo continuo.

Modelar los aspectos financieros en tiempo continuo es relativamente sencillo. Si se dispone de un modelo biométrico

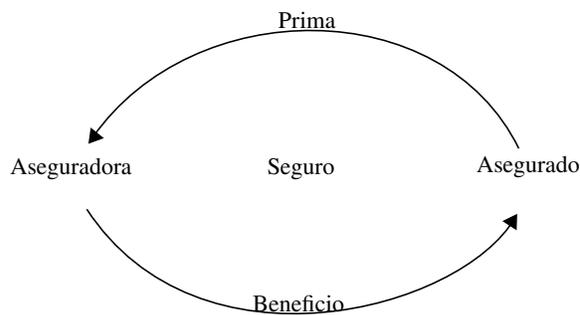
en tiempo continuo, las evaluaciones actuariales son directas. Para tiempos y edades enteros, basta con tabular funciones biométricas continuas.

Los seguros convencionales son formas tradicionales de seguros de vida que se han utilizado durante mucho tiempo, en algunos casos desde la invención del sistema de primas niveladas. Características principales:

- Término de la póliza: Es el período durante el cual el seguro está vigente y el asegurador asume el riesgo.
- Suma asegurada: Es el monto que será pagado al ocurrir, o poco después, de la muerte del asegurado. Generalmente es un monto constante durante el término de la póliza.

Una **póliza de seguro** es un contrato financiero que garantiza el pago de una indemnización (suma asegurada),  $b_t$  al asegurado o beneficiario si ocurre un evento específico (llamado siniestro) durante un período de tiempo definido (término de la póliza).

Una póliza de seguro es un acuerdo contractual entre dos partes principales: el tomador del seguro (*policyholder*) y la aseguradora (*insurer*). Este contrato define las obligaciones de ambas partes, estableciendo un intercambio económico y una transferencia de riesgos bajo términos específicos.



La prima (*premium*) es el pago estipulado que el tomador del seguro acuerda realizar a la aseguradora como contraprestación por la cobertura ofrecida. La prima puede ser única, periódica o ajustada en función del tipo de producto asegurador y las características del riesgo asegurado.

El seguro (*insurance*) representa la cobertura contractual provista por la aseguradora. Esta cobertura implica el compromiso de la aseguradora de pagar un beneficio (o una serie de beneficios) definidos al ocurrir un evento específico.

El beneficio (*benefit*) es la prestación económica que la aseguradora otorga al tomador del seguro o a un beneficiario designado. Este beneficio puede ser una suma asegurada fija,

una renta periódica o cualquier otra forma de compensación establecida en la póliza.

El evento asegurado es el desencadenante del beneficio, es un evento específico (por ejemplo, fallecimiento, invalidez, accidente, entre otros). Este evento debe estar claramente definido en los términos del contrato.

### Cálculo Actuarial

El **cálculo actuarial** se puede explicar como un marco matemático diseñado para evaluar de manera justa y precisa los compromisos financieros asociados a **productos de seguro y pensiones**. Este enfoque se centra en tres aspectos principales: determinar el valor justo de la póliza, calcular las primas justas que debe pagar el asegurado, y establecer las reservas matemáticas necesarias para que la aseguradora cumpla con sus obligaciones futuras.

El proceso sigue un flujo lógico que comienza con el cálculo del **valor presente actuarial**, el cual se convierte en la base para determinar la prima justa y las reservas matemáticas.

El **valor presente actuarial (VPA)** es el punto de partida del cálculo actuarial. Representa el valor esperado, descontado al presente, de todos los flujos de efectivo futuros relacionados con una póliza, ya sean pagos de beneficios (compromisos de la aseguradora) o pagos de primas (ingresos para la aseguradora). Este concepto captura tanto el riesgo del evento asegurado como el valor del dinero en el tiempo. El cálculo del valor presente actuarial implica:

1. Modelar la probabilidad de ocurrencia del evento asegurado (como la muerte en un seguro de vida) utilizando funciones de supervivencia o mortalidad.
2. Aplicar el descuento financiero adecuado para reflejar el valor del dinero en el tiempo.
3. Evaluar el valor esperado de los flujos de efectivo futuros.

Una vez calculado el valor presente de los beneficios futuros, el siguiente paso es determinar la **prima justa** que el asegurado debe pagar. La prima justa asegura que el contrato sea equilibrado, es decir, que el valor presente actuarial de los ingresos esperados de primas sea igual al valor presente actuarial de los beneficios esperados, a este equilibrio, es llamado el **principio de equivalencia actuarial**.

Finalmente, una vez que se establecen los compromisos futuros (beneficios) y los ingresos (primas), el cálculo actuarial se enfoca en determinar la **reserva matemática** que es el monto que la aseguradora debe mantener para garantizar que puede cumplir con sus obligaciones futuras en cualquier momento durante el término de la póliza.



## 7. SEGURO DOTAL PURO

Estas definiciones están basadas en el material presentado en el libro [Bowers et al. \(1997\)](#), que proporciona una base exhaustiva para los modelos matemáticos utilizados en la ciencia actuarial, abordando conceptos fundamentales como los seguros de vida, anualidades y cálculos de reservas técnicas.

### Modelo del Seguro

Un **seguro dotal puro a  $n$  años** proporciona un pago al final de los  $n$  años si, y sólo si, el asegurado **sobrevive** al menos  $n$  años desde la emisión de la póliza. Si el monto pagadero es una unidad, entonces

$$b_{T_x} = \begin{cases} 0 & T_x \leq n, \\ 1 & T_x > n, \end{cases} \quad (43)$$

Dado que se asume una de interés constante (fija) y determinista entonces

$$a^{-1}(t) = v^t = e^{-\bar{i}t} \quad t \geq 0. \quad (44)$$

Por lo tanto la variable aleatoria que denota el valor presente del pago del beneficio de un dotal puro es

$$Z_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} 0 & T_x \leq n, \\ v^n \cdot b_n & T_x > n, \end{cases} \quad (45)$$

donde  $T_x$  es la variable aleatoria de **tiempo hasta fallo** de un asegurado de edad  $x$ .

El único elemento de incertidumbre en el seguro dotal puro es si se producirá o no una reclamación. El tamaño y el momento del pago, si ocurre una reclamación, están predeterminados.

La expresión (45) puede escribirse como

$$Z_{x:\overline{n}|} = v^n \mathbb{1}_{\{T_x > n\}}, \quad (46)$$

donde  $\mathbb{1}_{\{T_x > n\}}$  es el indicador del evento de supervivencia hasta la edad  $x + n$ . Entonces

$$\mathbb{1}_{\{T_x > n\}} = 1,$$

si el asegurado sobrevive hasta la edad  $x + n$  y toma el valor de 0 en caso contrario. El valor actuarial presente del seguro dotal puro a  $n$  años tiene dos símbolos

$$A_{x:\overline{n}|} \text{ ó } {}_n E_x.$$

Calculando la esperanza matemática de  $Z_{x:\overline{n}|}$ :

$$A_{x:\overline{n}|} = \mathbb{E}[Z_{x:\overline{n}|}] = v^n \cdot \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T_x > n\}}] = v^n \cdot {}_n p_x, \quad (47)$$

donde  ${}_n p_x = \mathbb{P}[T_x > 0]$  es la función de supervivencia, la probabilidad que un asegurado de edad  $x$  sobreviva al menos  $n$  años.

Sintetizando el desarrollo, se obtiene la siguiente definición.



### Definición 7.1. Seguro Dotal Puro Continuo a $n$ años

Un **seguro dotal puro continuo a  $n$  años**, es aquel que proporciona un pago único de 1 unidad monetaria al final de  $n$  años, sujeto a la condición que el asegurado sobreviva al menos  $n$  años desde la emisión de la póliza. Su variable aleatoria de valor presente del pago del beneficio es

$$Z_{x:\overline{n}|} = v^n \mathbb{1}_{\{T_x > n\}}, \quad (48)$$

cuyo factor de descuento depende de una fuerza de interés determinista y constante  $\bar{i}$ :

$$v^n = e^{-\bar{i}n}. \quad (49)$$

El valor actuarial presente es

$${}_n E_x = A_{x:\overline{n}|} = \mathbb{E}[Z_{x:\overline{n}|}] = v^n \cdot {}_n p_x. \quad (50)$$

### Primas de Beneficio

Las primas constituyen los pagos realizados por los tomadores de la póliza para acceder a la cobertura ofrecida por la aseguradora. Existen varios tipos de primas, las cuales se clasifican dependiendo de los elementos considerados en su cálculo. En esta sección se hace uso sólo de la prima de beneficio.

La **prima neta**, también conocida como prima de riesgo, prima de beneficio o prima matemática, es aquella que está diseñada exclusivamente para cubrir los beneficios asegurados. Este cálculo no incluye ninguna consideración por los gastos operativos o administrativos de la aseguradora.

En el cálculo actuarial de primas, el **principio de equivalencia** es un fundamento técnico esencial que asegura el balance financiero entre los beneficios futuros y las primas cobradas. Este principio es clave para determinar las primas netas en productos de seguro, asegurando que los compromisos futuros de la aseguradora estén respaldados por los ingresos de las primas.

Según el principio de equivalencia, la prima se establece de tal manera que:

$$\text{VPA de los beneficios futuros (en } t = 0) = \text{VPA de las primas futuras (en } t = 0) \quad (51)$$

El principio de equivalencia establece que el valor presente esperado de las primas debe ser igual al valor presente esperado de los beneficios de una póliza de seguro.

### Modelo para la Reserva

Estas definiciones son extraídas en el material presentado en el libro de [Møller y Steffensen \(2007\)](#), el cual explora técnicas modernas de valoración de mercado aplicadas a los seguros

de vida y pensiones, destacando el uso de modelos financieros para la evaluación de pasivos y la gestión del riesgo.

Como se describió anteriormente, una reserva es el monto que una aseguradora necesita mantener en un momento dado para cumplir con las obligaciones futuras asociadas a las pólizas en vigor. Se determina considerando:

1. Flujos de efectivo futuros: incluyen pagos de beneficios (siniestros, vencimientos) y primas futuras.
2. Bases actuariales: conjunto de supuestos sobre tasas de interés, mortalidad, morbilidad y costos.

Se clasifican las reservas según su propósito y método de cálculo. Los principales tipos tratados son

1. Reserva Retrospectiva: se calcula acumulando las primas pagadas hasta el momento, menos los beneficios ya pagados y los costos asociados.
2. Reserva Prospectiva: representa el valor actual esperado de los flujos de efectivo futuros de la póliza, desde el momento actual hasta el vencimiento.
3. **Reserva de Mercado:** es una reserva prospectiva calculada bajo supuestos realistas o de tercer orden, considerando las tasas de interés libres de riesgo y los riesgos de mercado actuales.

El objetivo del estudio es **desarrollar una reserva de mercado** para un portafolio de seguros dotales puros.

Las bases actuariales son conjuntos de supuestos o parámetros utilizados para calcular valores actuariales como primas, reservas técnicas y otros componentes clave en seguros y pensiones. Estas bases son fundamentales porque determinan cómo se modelan los flujos de efectivo y los riesgos asociados con contratos de seguros y pensiones.

Existen varios tipos de bases actuariales, clasificadas según el propósito y el nivel de realismo que incorporan. Los principales tipos son:

1. **Base de Primer Orden** (conservadora): es una base extremadamente conservadora, diseñada para garantizar el principio de equivalencia actuarial. En esta base se fija una tasa de interés constante que satisfaga el principio de equivalencia. La función de descuento correspondiente es

$$a^{-1}(t) = v^t = e^{-\bar{i}^* t},$$

donde  $\bar{i}^*$  es la tasa que se usa en esta base.

2. Base de Segundo Orden: representa una aproximación más realista de los flujos de efectivo esperados, utilizada para reflejar mejor las condiciones actuales del mercado.

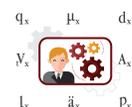
3. **Base de Tercer Orden** o Base Real: refleja las condiciones reales de mercado y se utiliza para valoraciones de mercado. Se basa en datos reales y fluctuaciones del mercado. En esta base, se intenta modificar la función de descuento que se usa en la base de primer orden, de tal manera que dicha modificación refleje el valor del mercado.

El análisis principal de este trabajo es ver la construcción de una reserva de un portafolio de seguros dotales puros usando una base actuarial de tercer orden. **¿Qué modificación se implementa para reflejar las condiciones del mercado? El uso de bonos cupón cero.** Esto se debe a que tanto el seguro dotal puro como el bono cupón cero comparten una estructura similar que los hace particularmente atractivos en términos de planificación financiera y gestión de riesgos:

1. Pago único garantizado al vencimiento:
  - Ambos instrumentos están diseñados para realizar un único pago en una fecha específica y conocida desde el inicio. En el caso del seguro dotal puro, este pago se realiza al asegurado al vencimiento de la póliza, siempre que sobreviva; mientras que, en el bono cupón cero, el emisor entrega el valor nominal del bono al vencimiento.
2. Ausencia de flujos intermedios:
  - Ninguno genera pagos periódicos durante su vigencia, eliminando el riesgo de reinversión asociado a los flujos intermedios. Esto simplifica la gestión del pasivo, ya que únicamente se necesita garantizar que los recursos estén disponibles en el momento del pago.
3. Facilidad en la gestión del pasivo:
  - Dado que el monto y la fecha de pago son ciertos, la aseguradora o el emisor solo deben concentrarse en fondear ingresos suficientes para cubrir el pasivo en el vencimiento. Esto permite enfocarse exclusivamente en la gestión del riesgo de la tasa de interés (para garantizar retornos adecuados) y el riesgo de mortalidad (en el caso del seguro dotal puro). Además el riesgo de mortalidad se puede reducir aumentando el número de asegurados en el portafolio.

### Reserva Prospectiva con Base de Primer Orden

Se utiliza el enfoque propuesto en *MøllerySteffensen* (2007) para construir el portafolio y reserva para los seguros dotales puros. Se considera un



portafolio compuesto por  $\ell_x$  asegurados, todos con la misma edad inicial  $x$  en tiempo 0. Se emiten pólizas idénticas de seguros dotales puros a  $n$  años (usando la definición 7.1) con una suma asegurada de 1 unidad monetaria. De esta manera se establece las siguientes suposiciones estándar:

1. Todos los asegurados del portafolio  $T_x^1, T_x^2, \dots, T_x^{\ell_x}$  tienen la misma ley de supervivencia

$${}_t p_x = \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x} = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds},$$

donde  $\mu_x$  es la fuerza de mortalidad

$$\mu_{x+t} := \lim_{dt \rightarrow 0^+} \frac{1}{dt} \mathbb{P}[t < T_x < t + dt | T_x > t].$$

2. La fuerza de mortalidad  $\mu$  es una función determinista.
3. Los contratos están financiados mediante una prima única  $\pi_0$  pagada al inicio.

Dado que no es posible predecir exactamente el número de asegurados que sobrevivirán hasta el tiempo  $n$ , se considera el comportamiento esperado. En un portafolio suficientemente grande, la **Ley de los Grandes Números**

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu, \quad \mu = \mathbb{E}[X_i], \quad n \rightarrow \infty,$$

asegura que el número real de supervivientes converge al número esperado.

- Se introduce el indicador

$$\mathbb{1}_{\{T_x^j > n\}}, \quad (52)$$

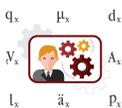
que indica si el asegurado  $j$ -ésimo sobrevive hasta el tiempo  $n$ .

- El número promedio de supervivientes en el portafolio es

$$\frac{1}{\ell_x} \sum_{j=1}^{\ell_x} \mathbb{1}_{\{T_x^j > n\}}. \quad (53)$$

- Por la Ley de los Grandes Números

$$\frac{1}{\ell_x} \sum_{j=1}^{\ell_x} \mathbb{1}_{\{T_x^j > n\}} \xrightarrow{\ell_x \rightarrow \infty} {}_n p_x = \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x}. \quad (54)$$



Esto implica que, para un portafolio suficientemente grande, el número de asegurados que sobreviven está dado aproximadamente por

$$\frac{1}{\ell_x} \sum_{j=1}^{\ell_x} \mathbb{1}_{\{T_x^j > n\}} \approx \ell_x \cdot {}_n p_x = \ell_{x+n}. \quad (55)$$

Cada asegurado paga una prima única  $\pi_0$  al tiempo  $t = 0$ . Los siguientes supuestos se aplican al análisis:

1. El número de sobrevivientes al tiempo  $n$  está dado por  $\ell_{x+n}$

$$\ell_{x+n} = \ell_x \cdot {}_n p_x.$$

2. Cada sobreviviente al tiempo  $n$  recibe una unidad de beneficio.

De lo anterior, el beneficio total pagado a los sobrevivientes al tiempo  $n$  es igual a  $\ell_{x+n}$ . El valor presente de este beneficio al tiempo 0 se denota por

$$a^{-1}(n) \cdot \ell_{x+n},$$

donde  $a^{-1}(n) = e^{-\int_0^n \bar{i}_s ds}$ . Por otro lado, dado que las primas  $\ell_x \cdot \pi_0$  se pagan en la emisión de las pólizas  $t = 0$ , su valor presente es simplemente igual a

$$\ell_x \cdot \pi_0.$$

Por lo tanto, la pérdida en emisión del asegurador es

$${}_0 \mathcal{L} = \ell_{x+n} \cdot a^{-1}(n) - \ell_x \cdot \pi_0. \quad (56)$$

Para garantizar que el contrato sea justo desde el punto de vista financiero, el principio de equivalencia requiere que la pérdida del asegurador sea igual a cero. Es decir

$${}_0 \mathcal{L} = 0 \rightarrow \ell_{x+n} a^{-1}(n) = \ell_x \cdot \pi_0,$$

resolviendo para la prima  $\pi_0$ , se obtiene la prima única justa al tiempo 0

$$\pi_0 = \frac{\ell_{x+n} \cdot a^{-1}(n)}{\ell_x} = {}_n p_x \cdot e^{-\int_0^n \bar{i}_s ds}. \quad (57)$$

Es importante recalcar esta prima se cumple si y solo si la función de descuento es determinista, en caso contrario las tasas o tasa de interés futuras no son conocidas en tiempo 0, lo que implicaría que no se conoce  $a^{-1}(t)$  en el momento de vender el contrato (tiempo de emisión). Por lo tanto no se puede establecer esta prima.

**Definición 7.2.** *Portafolio de Seguros Dótales Puros Continuos con base actuarial de primer orden.*

Un **portafolio de seguros dótales puros continuos** está compuesto por  $\ell_x$  asegurados, cada uno de ellos con la misma edad inicial ( $x$ ) en tiempo de la emisión de la póliza ( $t = 0$ ), bajo las siguientes condiciones:

1. El número de asegurados que sobreviven hasta un tiempo  $n$  está dado por

$$\ell_{x+n} = \ell_x \cdot {}_n p_x, \quad (58)$$

donde  ${}_n p_x = \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x} = e^{\int_0^n \mu_{x+s} ds}$ , y  $\mu$  es determinista.

2. Cada asegurado sobreviviente al tiempo  $n$  recibe un **beneficio unitario**.

El beneficio total pagado a los sobrevivientes al tiempo  $n$  es

$$\ell_{x+n} = \ell_x \cdot {}_n p_x. \quad (59)$$

Cada asegurado paga una prima única  $\pi_0$  al inicio del contrato ( $t = 0$ ), la cual satisface el **principio de equivalencia actuarial**

$$\pi_0 = {}_n p_x \cdot e^{-\int_0^n \bar{i}_s ds}. \quad (60)$$

La variable de pérdida del asegurador en la emisión está dada por

$${}_0 \mathcal{L} = \ell_{x+n} \cdot a^{-1}(n) - \ell_x \cdot \pi_0. \quad (61)$$

## 8. RESERVA DE MERCADO (BASE ACTUARIAL DE TERCER ORDEN)

Se modifica la reserva prospectiva con base de primer orden desarrollada anteriormente. Se busca crear una reserva con base de tercer orden, es decir, que refleje las condiciones “reales” del mercado. En libro [Møller y Steffensen \(2007\)](#), se demuestra que esto se logra vía una **cobertura con bonos cupón cero**. A continuación se describe dicha cobertura.

### Cobertura vía Cupón Cero

La estrategia busca replicar los pasivos del asegurador mediante la inversión en instrumentos financieros.

El siguiente desarrollo se asume una **fuerza de interés determinista**. Se considera un asegurador que invierte al tiempo  $t = 0$  en  $\ell_x \kappa$  unidades de un bono cupón cero con vencimiento en  $n$ . La **pérdida en emisión ajustada del asegurador**, considerando la cobertura mediante bonos cupón cero, está dada por

$${}_0 \hat{\mathcal{L}} = \ell_{x+n} a^{-1}(n) - \ell_x \cdot \pi_0 + \ell_x \kappa [P(0, n) - 1 \cdot a^{-1}(n)] \quad (62)$$

al reorganizar los términos en la ecuación anterior

$${}_0 \hat{\mathcal{L}} = (\ell_{x+n} - \ell_x \kappa) a^{-1}(n) + \ell_x [\kappa P(0, n) - \pi_0] \quad (63)$$

para que  ${}_0 \hat{\mathcal{L}} = 0$ , se deben cumplir dos condiciones:

1.  $\kappa = \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x} = {}_n p_x$ , es decir, el asegurador debe adquirir bonos en proporción al número esperado de sobrevivientes.
2.  $\pi_0 = {}_n p_x \cdot P(0, n)$ , lo que implica que la prima justa al tiempo  $t = 0$  es igual al precio del bono cupón cero multiplicado por la probabilidad de supervivencia hasta  $n$ .

Por lo tanto, la prima justa obtenida,

$$\pi_0 = {}_n p_x \cdot P(0, n),$$

corresponde al precio al tiempo 0 de un bono cupón cero con vencimiento  $n$ , ponderado por la probabilidad de supervivencia de los asegurados hasta ese tiempo, lo cual es intuitivo.

En un portafolio con  $\ell_x$  asegurados, el asegurador debe adquirir  $\ell_x \cdot {}_n p_x = \ell_{x+n}$  bonos cupón cero para igualar exactamente el número esperado de sobrevivientes. Al cumplir las condiciones anteriores, se logra replicar los pasivos del asegurador. Esto significa que el valor de los bonos adquiridos al tiempo  $t$  satisface

$$\ell_x \cdot {}_n p_x \cdot P(t, n) = \ell_{x+n} \cdot P(t, n),$$

de esta manera, el valor de los activos (bonos cupón cero) es igual al valor de los pasivos (beneficios garantizados) para cualquier desarrollo futuro de los precios de los bonos.

El valor de mercado de los pagos garantizados no depende de la estrategia de inversión específica de la compañía aseguradora. Esto se deriva del argumento de cobertura: cualquier desviación de los precios de los bonos respecto a su valor de mercado permitiría generar ganancias libres de riesgo (arbitraje). Por lo tanto:

- El valor de mercado de los pasivos es igual al de los activos replicantes.
- Cambios en el precio de los bonos afectan de manera simétrica tanto los activos como los pasivos.

Finalmente, el valor de mercado de los pagos futuros garantizados,  $V^g(t)$  es

$$V^g(t) = \ell_{x+t} \cdot {}_{T-t} p_{x+t} \cdot P(t, T). \quad (64)$$

La implementación del bono cupón cero  $P(t, n)$  en la pérdida en emisión (la pérdida en emisión ajustada), permite hacer la valoración mediante el enfoque de la base actuarial de tercer orden, pues  $P(t, n)$  puede ser observado en el mercado.

En el desarrollo anterior se estableció el convenio que la fuerza de interés,  $\bar{i}_t^*$ , que se utiliza en la función de descuento,



$a^{-1}(t)$ , es determinista, lo que implica que la prima usada para cada póliza debe ser forzosamente

$$\pi_0 = {}_T p_x \cdot e^{-\int_0^T \bar{i}_s^* ds}$$

Es de interés el caso donde las tasas de interés son **estocásticas**, lo que introduce mayor complejidad en el cálculo de la pérdida en emisión de la aseguradora. Para el mismo portafolio que se ha desarrollado previamente con base actuarial de primer orden, se establece que la fuerza de interés utilizada,  $\bar{i}_t$  es estocástica, es decir

$${}_0\mathcal{L} = \ell_{x+T} \cdot e^{-\int_0^T \bar{i}_s ds} - \ell_x \cdot \pi_0,$$

donde  $\bar{i}_s$  es un proceso estocástico.

Entonces, los cálculos relacionados con la cobertura del seguro dotal puro continuo se realizan utilizando la **tasa de interés del mercado**, que es un proceso estocástico. Este análisis se centra en cómo estas tasas afectan la acumulación de primas y la valoración de los pagos futuros garantizados. Aunque se ha demostrado en la sección previa que el riesgo del asegurador podría cubrirse perfectamente invirtiendo en bonos cupón cero con vencimiento  $T$ , en la práctica, **estos bonos podrían no estar disponibles**. Como alternativa, se considera la inversión de las primas en una **cuenta bancaria** que genera intereses a corto plazo (o instrumentos financieros equivalentes, como **swaps**). Este planteamiento considera la realidad del mercado, donde puede ser complicado acceder a bonos con características específicas.

Si las primas se invierten en una **cuenta de ahorro** (cuenta monetaria) desde el tiempo  $t = 0$ , su valor acumulado al tiempo  $t$  está dado por:

$$A_{\text{prima}}(t) = (\ell_x \cdot \pi_0) e^{\int_0^t \bar{i}_s ds}, \quad (65)$$

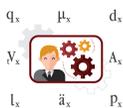
donde  $\bar{i}_s$  es un proceso estocástico.

### Cuenta Total sin Swap

En lugar de analizar la pérdida en emisión de la aseguradora

Obligaciones de la Aseguradora (Beneficio del Dotal Puro)-  
Activos Totales (Primas cobradas al Asegurado)

se hace análisis de la cuenta total de la aseguradora  $U(t)$ . Cuando la compañía no participa en contratos de *swaps*, la cuenta total  $U(t)$  es la diferencia entre las primas acumuladas y el valor de mercado de los pasivos al vencimiento  $T$ :



1. En el tiempo  $t$ : La cuenta total sin la implementación del swap es

$$\begin{aligned} U(t) &= A_{\text{prima}}(t) - V^g(t), \\ &= \ell_x \cdot \pi_0 \cdot e^{\int_0^t \bar{i}_s ds} - \ell_{x+t} \cdot {}_{T-t} p_{x+t} \cdot P(t, T), \\ &= \ell_{x+T} \cdot e^{\int_0^t (\bar{i}_s - \bar{i}_s^*) ds} - \ell_{x+T} \cdot P(t, T), \\ &= \ell_{x+T} \left[ e^{\int_0^t (\bar{i}_s - \bar{i}_s^*) ds} - P(t, T) \right]. \end{aligned} \quad (66)$$

2. En su vencimiento  $T$ :

$$\begin{aligned} U(t) &= A_{\text{prima}}(t) - V^g(t), \\ &= \ell_{x+T} \left( e^{\int_0^T (\bar{i}_s - \bar{i}_s^*) ds} - 1 \right). \end{aligned} \quad (67)$$

esta ecuación describe el valor terminal de la cuenta en una estrategia en la que las primas se invierten en una cuenta de ahorro o en bonos de muy corto plazo, sin participación en *swaps*.

Añadiendo la implementación del swap de interés, la cuenta total se define como sigue

$$U(t) = A_{\text{prima}}(t) + \Pi_{\text{swap}}(t) - V^g(t), \quad (68)$$

de esta manera, se consideran tanto los pagos realizados como los recibidos, así como el valor de mercado de los flujos futuros.

La razón principal para analizar esta cuenta, y no directamente la variable de pérdida  $\mathcal{L}$ , radica en:

1. Actúa como un indicador de la suficiencia de los activos frente a las obligaciones. Una cuenta  $U(t)$  no negativa indica que los activos disponibles (incluyendo los derivados financieros) son suficientes para cubrir las obligaciones garantizadas.
2. Permite evaluar cómo las estrategias de cobertura vía instrumentos financieros (como swaps de tasas de interés) afectan la capacidad de la aseguradora para cubrir sus obligaciones. En este caso, se compara la cuenta con swap y sin swap, para cuantificar en términos de ganancias, el impacto de implementar dicha cobertura.
3. A diferencia de la variable de pérdida  $\mathcal{L}$ , que se enfoca únicamente en la discrepancia entre las obligaciones futuras descontadas y las primas recolectadas,  $U(t)$  permite incorporar efectos dinámicos del mercado, como cambios en las tasas de interés y ajustes en la estrategia de cobertura.

La razón del análisis de las variables de pérdida en emisión con una base actuarial de primer orden ( $\mathcal{L}$ ) y de tercer orden ( $\hat{\mathcal{L}}$ ), es para identificar la correcta estructura de los pasivos contingentes (obligaciones/valores garantizados) y de los activos (primas) de la aseguradora.

## 9. COBERTURA VÍA SWAP

En esta sección se analiza el uso de **swaps de tasa de interés** como una estrategia de cobertura para gestionar las obligaciones financieras de una aseguradora en contratos de dotación pura continuos. A continuación se describe la cobertura vía swaps de tasa de interés presentada en [Møller y Steffensen \(2007\)](#).

### Swap

Un *swap* es un contrato financiero mediante el cual dos contrapartes acuerdan intercambiar flujos de pagos en el futuro, basados en diferentes estructuras de tasas. La tasa *swap*  $\kappa(t, T)$  se define como la tasa que iguala el valor presente de dos flujos de pagos

$$\kappa(t, T) = \frac{1 - P(t, T)}{\int_t^T P(t, \tau) d\tau}.$$

Cuando los precios de los flujos de pagos coinciden en  $t$ , los valores de mercado de los flujos intercambiados son equivalentes. Esto implica que dos partes pueden realizar un intercambio de flujos sin realizar pagos adicionales.

Un **receiver swap** es un contrato de *swap* en el cual una contraparte paga una tasa variable  $c = \bar{i}$  y recibe los cupones acumulados a una tasa fija  $c = \kappa$ . Esto ocurre cuando la contraparte recibe los pagos basados en la tasa fija  $\kappa$ .

Un **payer swap** el propietario del contrato recibe los cupones calculados con  $c = \bar{i}$  (tasa variable) y paga los cupones basados en  $c = \kappa$  (tasa fija). La contraparte paga la tasa fija.

### Relación entre Tasas de Swap y Tasas Forward

La tasa *swap* puede ser reescrita utilizando las tasas *forward* instantáneas  $f(t, \tau)$ , que representan las tasas de interés instantáneas implícitas para el período  $[t, \tau]$ :

$$\begin{aligned} 1 - P(t, T) &= 1 - e^{-\int_t^T f(t, \tau) d\tau}, \\ &= \int_t^T f(t, \tau) e^{-\int_t^\tau f(t, s) ds} d\tau, \\ &= \int_t^T f(t, \tau) P(t, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Al sustituir la expresión anterior en la ecuación de la tasa *swap*  $\kappa(t, T)$  se expresa como

$$\kappa(t, T) = \frac{\int_t^T f(t, \tau) P(t, \tau) d\tau}{\int_t^T P(t, \tau) d\tau},$$

esta expresión muestra que la tasa de *swap* está directamente relacionada con la curva de tasas *forward*, y describe cómo las tasas de *swap* pueden considerarse promedios ponderados de las tasas *forward* en el intervalo  $[t, T]$ .

Los precios de los bonos cupón cero  $P(t, T)$  pueden ser determinados recursivamente a partir de una curva de tasas de *swap*  $\kappa(t, \tau)$

$$\int_t^{T-h} P(t, \tau) d\tau + P(t, T)h,$$

para un pequeño  $h$ , se puede escribir la aproximación del precio de bono como

$$P(t, T) \approx \frac{1 - \kappa(t, T) \int_t^{T-h} P(t, \tau) d\tau}{1 + \kappa(t, T)h}.$$

Los precios de los bonos cupón cero también pueden expresarse en términos de la curva de tasas de *swap* como

$$P(t, T) = 1 - \kappa(t, T) \int_t^T e^{-\int_t^\tau \kappa(t, s) ds} d\tau. \quad (69)$$

### Swap de la Aseguradora

Se asume que la compañía entra en una posición de *receiver swap*, con  $N = \ell_x \cdot \pi_0(1 + \epsilon)$  contratos, donde  $\epsilon$  es un factor adicional para ajustar el tamaño del contrato *swap*. En este *swap*, la aseguradora

1. **Recibe una tasa fija**  $\kappa$ , denominada **tasa strike del swap**.
2. **Paga una tasa flotante**  $\bar{i}_t$ , correspondiente al mercado.

Este esquema asegura que los flujos de ingresos (tasa fija) se utilicen para cubrir las obligaciones futuras, mientras que los pagos flotantes representan un riesgo financiero.

El valor presente al tiempo  $t = 0$  de los flujos de un *swap* unitario está dado por

$$\int_0^T e^{-\int_0^\tau \bar{i}_s ds} (\kappa - \bar{i}_\tau) d\tau. \quad (70)$$





el valor inicial de la cuenta  $t = 0$  de la cuenta total es

$$\begin{aligned} U(0) &= \ell_x \cdot \pi_0 - \ell_x \cdot T p_x P(0, T), \\ &= \ell_{x+T} \left[ e^{-\int_0^T \bar{i}_s^* ds} - P(0, T) \right], \end{aligned} \quad (77)$$

al vencimiento  $t = T$ , la cuenta total es

$$\begin{aligned} U(T) &= \ell_{x+T} \kappa e^{-\int_0^T \bar{i}_s^* ds} \int_0^T e^{\int_\tau^T \bar{i}_s ds} d\tau \\ &\quad - \ell_{x+T} \left( 1 - e^{-\int_0^T \bar{i}_s^* ds} \right). \end{aligned} \quad (78)$$

La cuenta total  $U(t)$  es una herramienta esencial para monitorear la solvencia de una aseguradora. Su formulación permite un análisis del impacto de las primas *swaps* y el valor de los pasivos en el tiempo. Este modelo conecta directamente las matemáticas actuariales con la gestión del riesgo financiero mediante el uso de derivados financieros.

### Swaption

Un swaption es una opción financiera que da al titular el derecho, pero no la obligación, de entrar en un contrato de swap en una fecha futura predefinida  $T_0$ . En esta sección, se analiza de la cuenta swaption. En el trabajo de [MøllerySteffensen \(2007\)](#) se brinda el desarrollo del valor del mercado del swaption, empero no desarrolla la implementación del swaption para la cuenta de la aseguradora.

Un **receiver swaption** otorga al titular el derecho, pero no la obligación, de entrar en un **receiver swap** en una fecha futura determinada  $T_0$ . En este tipo de swap, el titular paga flujos flotantes basados en la tasa de interés de mercado y recibe flujos fijos al tipo  $\kappa$ . Un agente adquiere una receiver swaption para cubrirse contra caídas en las tasas de interés o especular sobre una baja futura en estas tasas, esto pues una disminución en las tasas reduciría los flujos de ingresos provenientes de inversiones o contratos de deuda. En caso de que la cuenta del swap  $\Pi_{\text{swap}}$  sea negativa en su vencimiento  $T$  ( $\Pi_{\text{swap}}(T) < 0$ ), es racional no ejercer la opción sobre dicho swap subyacente.

El valor presente en  $T_0$  de un receiver swap se calcula como la diferencia entre el valor presente de los flujos fijos a recibir y los flujos flotantes a pagar. Matemáticamente, se expresa como

$$\int_{T_0}^T (\kappa - \bar{i}_\tau) e^{-\int_{T_0}^\tau \bar{i}_s ds} d\tau,$$

el precio de un receiver swap en  $T_0$  es

$$P(T_0, T) - 1 - \kappa \int_{T_0}^T P(T_0, \tau) d\tau, \quad (79)$$

por lo tanto, el precio antes de la fecha de ejercicio  $T_0$  (es decir, en  $t < T_0$ ) es

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^{T_0} \bar{i}_s ds} \left( P(T_0, T) - 1 - \kappa \int_{T_0}^T P(T_0, \tau) d\tau \right)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right],$$

donde  $(\cdot)^+ = \max(\cdot, 0)$ , indica que sólo se considera el valor positivo, ya que el swaption no se ejerce si no resulta favorable.

Es de importancia notar que, aunque la aseguradora decida no ejercer el derecho, deberá cubrir la prima para adquirir el contrato swaption. Por lo cual, la aseguradora debe contemplar esta obligación.

La cuenta del swaption se define en dos etapas dependiendo del tiempo  $t$ , en relación con la fecha de ejercicio  $T_0$ :

- Antes del ejercicio: para  $t < T_0$ , la cuenta refleja el valor del contrato receiver swap para entrar al contrato swap. Se calcula como:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^{T_0} \bar{i}_s ds} \left( \kappa \int_{T_0}^T P(T_0, \tau) d\tau - [1 - P(T_0, T)] \right)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

- Después del ejercicio: para  $t \geq T_0$ , si el swaption es ejercido, la cuenta del swaption coincide con la cuenta de un receiver swap  $\Pi_{\text{swap}}(t = T_0)$ , la cual ya se definió anteriormente.

### Cuenta Swap Incierta

En las secciones anteriores se ha demostrado que se puede implementar una tasa de interés que participe en el mercado, haciendo uso de procesos estocásticos para la fuerza de interés. Ahora se pretende demostrar que es posible adaptar el modelo actuarial bajo el marco de procesos inciertos. Se utiliza la misma estructura de flujos de la cuenta swap desarrollada bajo una medida de probabilidad  $\mathbb{Q}$ ,  $\Pi_{\text{swap}}(t)$ . Para crear la cuenta swap incierta  $\tilde{\Pi}_{\text{swap}}(t)$ , sólo se establece que la fuerza de interés siga un proceso incierto, es decir, su dinámica se rige bajo el modelo de Chen y Gao

$$d\tilde{i}_t = (\mu - a\tilde{i}_t)dt + \sigma dC_t.$$

El valor presente en  $t$  de los flujos futuros que dependen de



una fuerza de interés incierta  $\tilde{i}$  es

$$\begin{aligned}
E \left[ \int_t^T e^{-\int_t^\tau \tilde{i}_s ds} (\kappa - \tilde{i}_\tau) d\tau \right] &= E \left[ \int_t^T e^{-\int_t^\tau \tilde{i}_s ds} \kappa d\tau \right] \\
&\quad - E \left[ \int_t^T e^{-\int_t^\tau \tilde{i}_s ds} \tilde{i}_\tau d\tau \right], \\
&= \kappa \int_t^T E \left[ e^{-\int_t^\tau \tilde{i}_s ds} \right] d\tau \\
&\quad - E \left[ \int_t^T d \left( e^{-\int_t^\tau \tilde{i}_s ds} \right) \right], \\
&= \kappa \int_t^T \tilde{P}(t, \tau) d\tau \\
&\quad - E \left[ 1 - e^{-\int_t^T \tilde{i}_s ds} \right], \\
&= \kappa \int_t^T A(t, \tau) B(t, \tau) d\tau \\
&\quad - [1 - \tilde{P}(t, T)], \\
&= \kappa \int_t^T A(t, \tau) B(t, \tau) d\tau \\
&\quad - [1 - A(t, T) B(t, T)], \tag{80}
\end{aligned}$$

definiendo lo siguiente:

1.  $A(t, \tau)$  :

$$A(t, \tau) = \alpha \csc(\alpha), \tag{81}$$

y  $\alpha$  se define como

$$\alpha = \sqrt{3} \left[ \frac{\sigma(\tau - t)}{a} + \frac{\sigma}{a^2} (e^{-a\tau} - e^{-at}) \right]. \tag{82}$$

2.  $B(t, \tau)$  :

$$B(t, \tau) = e^{-\frac{\mu(\tau-t)}{2a} - \frac{1}{a}(\tilde{i}_0 - \frac{\mu}{a})(e^{-at} - e^{-a\tau})}. \tag{83}$$

El valor acumulado a tiempo  $t$  de los flujos pasados es

$$\begin{aligned}
\int_0^t e^{\int_0^\tau \tilde{i}_s ds} (\kappa - \tilde{i}_\tau) d\tau &= \kappa \int_0^t e^{\int_0^\tau \tilde{i}_s ds} d\tau - \int_0^t e^{\int_0^\tau \tilde{i}_s ds} \tilde{i}_\tau d\tau, \\
&= \kappa \int_0^t e^{\int_0^\tau \tilde{i}_s ds} d\tau - \left[ e^{\int_0^t \tilde{i}_s ds} - 1 \right], \tag{84}
\end{aligned}$$

donde  $\int_\tau^t \tilde{i}_s ds$  se desarrolla como sigue

$$\begin{aligned}
\int_\tau^t \tilde{i}_s ds &= \int_\tau^t \left[ \frac{\mu}{a} + e^{-as} \left( \tilde{i}_0 - \frac{\mu}{a} \right) + \sigma \int_0^s e^{av-as} dC_v \right] ds, \\
&= \int_\tau^t \left[ \frac{\mu}{a} + e^{-as} \left( \tilde{i}_0 - \frac{\mu}{a} \right) \right] ds + \sigma \int_\tau^t \int_0^s e^{av-as} dC_v ds, \\
&= \frac{\mu}{2a} (t - \tau) + \left( \tilde{i}_0 - \frac{\mu}{a} \right) \left( \frac{e^{-a\tau} - e^{-at}}{a} \right) \\
&\quad - \frac{\sigma}{a} \int_\tau^t [e^{av-at} - 1] dC_v, \\
&= \frac{\mu}{2a} (t - \tau) + \left( \tilde{i}_0 - \frac{\mu}{a} \right) \left( \frac{e^{-a\tau} - e^{-at}}{a} \right) \\
&\quad - \frac{\sigma}{a} \left[ e^{-at} \int_\tau^t e^{av} dC_v + \int_\tau^t dC_v \right], \tag{85}
\end{aligned}$$

además, se observa que

$$\int_\tau^t e^{av} dC_v \sim \mathcal{N} \left( 0, \frac{e^{-at} - e^{-a\tau}}{a} \right), \tag{86}$$

y

$$\int_\tau^t dC_v \sim \mathcal{N}(0, t - \tau). \tag{87}$$

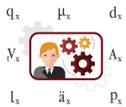
Por lo tanto, la cuenta del swap incierto en  $t$  es

$$\begin{aligned}
\tilde{\Pi}_{\text{swap}}(t) &= N\kappa \int_0^t e^{\int_0^\tau \tilde{i}_s ds} d\tau - N \left[ e^{\int_0^t \tilde{i}_s ds} - 1 \right] \\
&\quad + N\kappa \int_t^T A(t, \tau) B(t, \tau) d\tau - N [1 - A(t, T) B(t, T)], \\
&= N\kappa \left[ \int_0^t e^{\int_0^\tau \tilde{i}_s ds} d\tau + \int_t^T A(t, \tau) B(t, \tau) d\tau \right] \\
&\quad - N \left[ e^{\int_0^t \tilde{i}_s ds} - A(t, T) B(t, T) \right]. \tag{88}
\end{aligned}$$

### Cuenta Total Incierta

Al igual que en su homólogo probabilista, la cuenta total de la aseguradora bajo el marco incierto es

$$\tilde{U}(t) = \tilde{A}_{\text{prima}}(t) + \tilde{\Pi}_{\text{swap}}(t) - \tilde{V}^g(t), \tag{89}$$



donde

$$\begin{cases} \bar{A}_{\text{prima}}(t) = (\ell_x \cdot \pi_0) \cdot e^{\int_0^t \bar{i}_s ds}, \\ \pi_0 = T p_x \cdot e^{-\int_0^T \bar{i}_s^* ds}, \\ d\bar{i}_t = (\mu - a\bar{i}_t)dt + \sigma C_t, \\ \bar{V}^g(t) = \ell_{x+t} \cdot T_{-t} p_{x+t} \cdot \bar{P}(t, T), \\ \bar{P}(t, T) = E \left[ e^{-\int_t^T \bar{i}_s ds} \right] = A(t, T)B(t, T), \end{cases} \quad (90)$$

recordando que  $\bar{i}_t^*$  es la fuerza de interés de la base actuarial de primer orden. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \bar{U}(t) &= (\ell_x \cdot \pi_0) \cdot e^{\int_0^t \bar{i}_s ds} \\ &+ N \kappa \left[ \int_0^t e^{\int_\tau^t \bar{i}_s ds} d\tau + \int_t^T A(t, \tau)B(t, \tau) d\tau \right] \\ &- N \left[ e^{\int_0^t \bar{i}_s ds} - A(t, T)B(t, T) \right] \\ &- \ell_{x+t} \cdot T_{-t} p_{x+t} \cdot A(t, T)B(t, T), \end{aligned} \quad (91)$$

estableciendo que  $N = \ell_x \cdot \pi_0$ , entonces

$$\begin{aligned} \bar{U}(t) &= (\ell_x \cdot \pi_0) \cdot e^{\int_0^t \bar{i}_s ds} \\ &+ \ell_x \cdot \pi_0 \cdot \kappa \left[ \int_0^t e^{\int_\tau^t \bar{i}_s ds} d\tau + \int_t^T \bar{P}(t, \tau) d\tau \right] \\ &- \ell_x \cdot \pi_0 \left[ e^{\int_0^t \bar{i}_s ds} - \bar{P}(t, T) \right] \\ &- \ell_{x+t} \cdot T_{-t} p_{x+t} \cdot \bar{P}(t, T), \\ &= \kappa \cdot \ell_{x+T} \cdot e^{-\int_0^T \bar{i}_s^* ds} \left[ \int_0^t e^{\int_\tau^t \bar{i}_s ds} d\tau + \int_t^T \bar{P}(t, \tau) d\tau \right] \\ &- \ell_{x+T} \cdot \bar{P}(t, T) \left[ 1 - e^{-\int_0^T \bar{i}_s^* ds} \right]. \end{aligned} \quad (92)$$

La cuenta total en su vencimiento ( $T$ ) es

$$\begin{aligned} \bar{U}(T) &= \ell_{x+T} \kappa e^{-\int_0^T \bar{i}_s^* ds} \int_0^T e^{\int_\tau^T \bar{i}_s ds} d\tau \\ &- \ell_{x+T} \left[ 1 - e^{-\int_0^T \bar{i}_s^* ds} \right] \end{aligned} \quad (93)$$

### Cuenta Total sin Swap Incierto

La cuenta total sin la implementación del swap incierto es

$$\begin{aligned} \bar{U}(t) &= \bar{A}_{\text{prima}}(t) - \bar{V}^g(t) \\ &= \ell_x \cdot \pi_0 \cdot e^{\int_0^t \bar{i}_s ds} - \ell_{x+t} \cdot T_{-t} p_{x+t} \cdot \bar{P}(t, T), \\ &= \ell_{x+T} \cdot e^{\int_0^t (\bar{i}_s - \bar{i}_s^*) ds} - \ell_{x+T} \cdot \bar{P}(t, T), \\ &= \ell_{x+T} \left[ e^{\int_0^t (\bar{i}_s - \bar{i}_s^*) ds} - \bar{P}(t, T) \right]. \end{aligned} \quad (94)$$

en su vencimiento ( $T$ ) es

$$\begin{aligned} \bar{U}(T) &= \bar{A}_{\text{prima}}(T) - \bar{V}^g(T), \\ &= \ell_{x+T} \left[ e^{\int_0^T (\bar{i}_s - \bar{i}_s^*) ds} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (95)$$

El desarrollo presentado en esta sección evidencia que el modelo actuarial de interés es capaz de incorporar procesos inciertos para la fuerza de interés. De este modo, se introduce una nueva alternativa dentro del modelo de reserva de mercado: **la reserva de mercado incierta**. Para implementarla, basta con sustituir el modelo (3.1) por el modelo (5.3) en el modelo actuarial de la cuenta total de la aseguradora (78).

### Ejemplo Numérico

Ahora que se ha formulado el modelo de la reserva de mercado para un seguro dotal puro bajo dos marcos distintos: uno estocástico, basado en la medida de probabilidad, y otro incierto, fundamentado en la teoría incierta de Liu. Se procede a su implementación numérica con el fin de ilustrar su comportamiento práctico.

El propósito de esta implementación no es desarrollar ni analizar métodos avanzados de simulación ni técnicas de programación, sino evidenciar que el uso de un instrumento de cobertura como el swap permite reducir la ocurrencia de eventos extremos en la cuenta total de la aseguradora. Se busca mostrar al lector que este tipo de cobertura puede aplicarse con éxito desde dos perspectivas distintas: una probabilística y otra incierta, dependiendo de cómo se modele la aleatoriedad de la tasa de interés.

El análisis se realiza sobre un seguro dotal puro pagadero a vencimiento. No se considera mortalidad ni cancelación, permitiendo centrar el estudio exclusivamente en la componente financiera del modelo. Se exploran dos horizontes temporales representativos:  $T = 5$  años y  $T = 15$  años.

En el marco estocástico, se utiliza el modelo de Vasicek (3.1) para modelar la tasa de interés. En el marco incierto, se emplea el modelo de Chen y Gao (5.3). Para cada enfoque,



se simulan trayectorias de la tasa y se calcula el valor de la cuenta total de la aseguradora en su vencimiento (78). El interés principal es observar cómo varía la distribución de esta cuenta al incluir instrumentos de cobertura.

No se profundiza en los detalles técnicos de la implementación ni en los aspectos computacionales del modelo, pues este no es el objetivo del trabajo. En lugar de ello, la atención se centra en la presentación de los resultados obtenidos, con el fin de respaldar la utilidad de los swaps como mecanismos de cobertura, tanto en la modelación estocástica como en la incierta.

En la sección siguiente se muestran los resultados numéricos y gráficos que permiten comparar cada enfoque y la efectividad de las estrategias de cobertura implementadas.

### Cuenta Estocástica v.s Cuenta Incierta

Para evaluar el impacto del uso del swap como instrumento de cobertura, se calcula la *cuenta total* de la aseguradora en su vencimiento bajo cada modelo y horizonte temporal.

Se analizan dos enfoques para la modelación de la tasa de interés: el estocástico ( $U(T)$ ), mediante el proceso de Vasicek, y el incierto ( $\tilde{U}(T)$ ), mediante el proceso de Liu. En cada caso, se presentan los resultados con y sin la inclusión del swap, para dos horizontes temporales:  $T = 5$  años (visualizado en la figura 1) y  $T = 15$  años (visualizado en la figura 2 años).

En las tablas 1 y 2 se muestran las estadísticas descriptivas obtenidas a partir de 10,000 simulaciones para una suma asegurada de 100,000 unidades monetarias: media, desviación estándar, mínimo y máximo de la cuenta total en cada configuración.

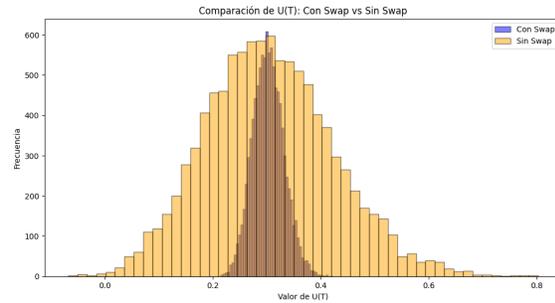
A continuación, se presentan los resultados de la simulación bajo el modelo de Vasicek y el modelo de Chen y Gao, comparando el valor final de la cuenta total  $U(T)$  v.s  $\tilde{U}(T)$  **con Swap** y **sin Swap**, en 2 horizontes temporales distintos:  $T = 5$  y  $T = 15$ .

Parámetros Iniciales:

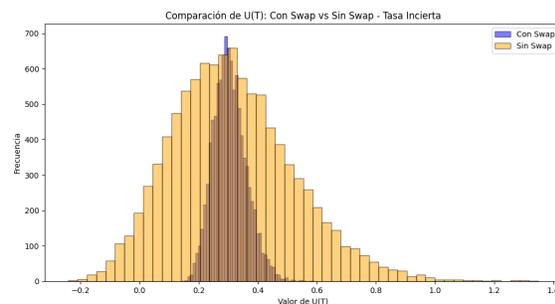
- $\alpha = a = 0.2$  (Velocidad de reversión)
- $\mu = 0.04$  (Nivel de reversión)
- $\sigma = 0.02$  (Volatilidad)
- $\bar{i}_0 = \bar{i}_0 = 0.03$  (Tasa inicial)
- $\bar{i}^* = 0.04$  (Tasa de base actuarial de primer orden  $\bar{i}^*$ , constante)
- $l_{x+T} = 1$  (Suposición de supervivencia, por simplicidad)
- Número de simulaciones = 10,000



Figura 1 Estableciendo un horizonte temporal de  $T = 5$

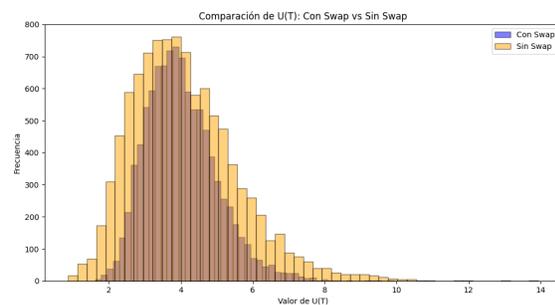


Usando tasa estocástica.

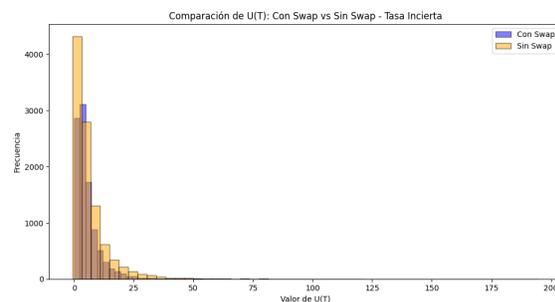


Usando tasa incierta.

Figura 2 Estableciendo un horizonte temporal de  $T = 15$



Usando tasa estocástica



Usando tasa incierta

■ **Tabla 1** Resultados de la cuenta con swap (suma asegurada \$100 000).

	Con Swap
$U(5)$	Media: 30 235.18, Desviación Est.: 2 863.98, Mínimo: 21 473.73, Máximo: 42 125.28
$\tilde{U}(5)$	Media: 30 484.61, Desviación Est.: 5 631.45, Mínimo: 14 448.61, Máximo: 59 092.27
$U(15)$	Media: 401 025.70, Desviación Est.: 97 900.41, Mínimo: 161 653.09, Máximo: 992 647.01
$\tilde{U}(15)$	Media: 557 517.91, Desviación Est.: 583 343.98, Mínimo: -4 084.00, Máximo: 12 129 140.76

■ **Tabla 2** Resultados de la cuenta sin swap (suma asegurada \$100 000).

	Sin Swap
$U(5)$	Media: 30 478.57, Desviación Est.: 11 882.26, Mínimo: -6 839.99, Máximo: 80 363.30
$\tilde{U}(5)$	Media: 31 515.68, Desviación Est.: 20 657.41, Mínimo: -24 213.79, Máximo: 135 016.88
$U(15)$	Media: 409 603.79, Desviación Est.: 147 298.76, Mínimo: 86 299.27, Máximo: 1 394 686.67
$\tilde{U}(15)$	Media: 634 055.22, Desviación Est.: 844 179.85, Mínimo: -77 528.32, Máximo: 19 480 083.43

Con una suma asegurada de 100,000 unidades monetarias. Se observa lo siguiente.

- La **cuenta con swap** presenta una dispersión considerablemente menor, lo cual indica una menor exposición al riesgo de tasas de interés extremas (muy bajas o muy altas). Esto se traduce en:
  - Mayor estabilidad en los resultados financieros de la aseguradora.
  - Reducción del riesgo de pérdida significativa en escenarios desfavorables.
  - Resultados más predecibles, lo cual favorece la planificación financiera y la solvencia. Sin embargo, al limitar la sensibilidad a tasas de interés elevadas, la compañía renuncia a obtener beneficios extraordinarios en escenarios donde las tasas del mercado son significativamente altas.
- La **cuenta sin swap** muestra un rango de resultados más amplio: logra valores mayores en escenarios de tasas altas, pero también es más vulnerable a tasas muy bajas. Muestra una mayor variabilidad, reflejada en:

- Valores extremos más amplios, tanto en pérdidas como en ganancias.
- Mayor volatilidad, lo que implica riesgo más elevado, especialmente en contextos de tasas muy bajas, donde se observan saldos negativos de la cuenta.

- A medida que aumenta el horizonte temporal  $T$ , las diferencias entre ambos modelos se amplifican:

- La variabilidad sin cobertura crece rápidamente.
- La cobertura mediante swaps se vuelve más efectiva en limitar el riesgo financiero en el largo plazo.

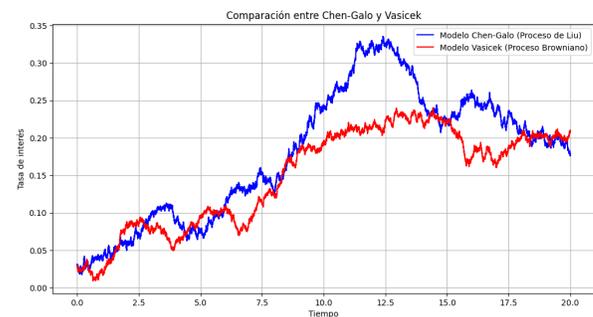


Figura 3 Trayectoria de tasa estocástica vs. tasa incierta

## 10. CONCLUSIÓN

Este estudio ha demostrado que la incorporación de un instrumento derivado como el swap resulta eficaz para mitigar la exposición de la reserva de mercado de un seguro dotal puro ante la incertidumbre en la tasa de interés. A partir de la implementación de un modelo bajo el enfoque estocástico (modelo de Vasicek) y su contraparte bajo el enfoque incierto (modelo de Chen y Gao), se compararon cuantitativamente los efectos de utilizar o no dicho instrumento de cobertura.

Los resultados obtenidos confirman que, en ambos marcos teóricos, el uso del swap reduce significativamente la dispersión de la cuenta total del asegurador. Este comportamiento fue especialmente evidente en horizontes largos, donde la volatilidad acumulada de las tasas de interés genera mayor incertidumbre sobre el valor terminal de la reserva. En este sentido, el swap actúa como un estabilizador, proporcionando robustez financiera al diseño de reservas técnicas.

Además, se observó que el marco incierto ofrece una alternativa viable al probabilístico para modelar la aleatoriedad. La medida incierta, al basarse en grados de creencia, permite construir modelos más flexibles en entornos con ambigüedad o información limitada, lo cual representa una valiosa herramienta para el actuario contemporáneo.



## Propuestas de mejora

Este trabajo abre diversas líneas de investigación que pueden enriquecer y extender los resultados presentados:

- **Calibración con datos reales:** La presente investigación se ha limitado a simulaciones hipotéticas para ilustrar el funcionamiento de los modelos. Una extensión natural sería calibrar tanto el modelo estocástico como el incierto con datos de mercado reales, lo cual permitiría validar empíricamente la efectividad del swap como cobertura.
- **Modelos multifactoriales:** Se podría considerar el uso de modelos multifactoriales para la tasa de interés, al igual que involucrar modelos de saltos y de volatilidad estocástica.
- **Exploración de medidas alternativas:** La medida incierta representa solo una de las posibles alternativas a la probabilidad. Futuras investigaciones podrían explorar el uso de medidas borrosas o de posibilidad, lo que abriría nuevas vías para modelar la aleatoriedad desde perspectivas no clásicas.
- **Teoría de finanzas cuánticas:** Finalmente, se sugiere considerar la integración de marcos de finanzas cuánticas para modelar la tasa de interés.

En conjunto, los hallazgos de este trabajo no sólo sustentan la validez del uso del swap como mecanismo de cobertura robusto en modelos actuariales, sino que también invitan a repensar la modelización del riesgo desde marcos matemáticos más amplios que los tradicionalmente empleados.

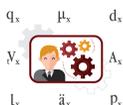
## REFERENCIAS

- Björk, T., 2020 *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press, fourth edición.
- Bowers, N. L., H. U. Gerber, J. C. Hickman, D. A. Jones, y C. J. Nesbitt, 1997 *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries, second edición.
- Filipović, D., 2009 *Term-Structure Models: A Graduate Course*. Springer Finance, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Gao, J. y H. Liu, 2019 Pricing longevity bonds under the uncertainty theory framework. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence* **33**: 1959020.
- Liu, B., 2015 *Uncertainty Theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, fourth edición.
- Møller, T. y M. Steffensen, 2007 *Market-Valuation Methods in Life and Pension Insurance*. Cambridge University Press.
- Vaaler, L. J. F., S. K. Harper, y J. W. Daniel, 2019 *Mathematical Interest Theory*, volumen 57 de *AMS/MAA Textbooks*. American Mathematical Society, third edición.



**David Sánchez Herrera** recién egresado de la licenciatura en Actuaría en la Universidad Anáhuac Xalapa (2021-2025). A lo largo de su formación ha obtenido diversos diplomas y certificaciones profesionales, entre los que destacan: la Certificación Profesional en Ciencia de Datos de Harvard University Online (2024), el Diploma Profesional en Finanzas Cuantitativas del Massachusetts Institute of Technology

Online (2024), la Especialización en Machine Learning de Stanford University Online (2025), la Especialización en Ingeniería Financiera y Gestión de Riesgos de Columbia University Online (2024), y la Certificación de Nivel 1 en Teoría de la Probabilidad de Wolfram U (2023). Además, ha cursado satisfactoriamente diplomados en matemáticas, probabilidad y Excel. Sumado a su sólida formación y dominio teórico, David maneja con destreza R, Python y Excel avanzado (incluyendo macros y VBA), lo que le permite implementar eficazmente teorías de modelos financieros y actuariales complejos y sofisticados. Además, durante su licenciatura elaboró una tesina desarrollando de manera muy concisa las matemáticas estocásticas del modelo de Heston de volatilidad estocástica para la valoración de opciones financieras mediante cálculo estocástico. Su afición e interés consiste en investigar modelos actuariales, de finanzas matemáticas y de finanzas cuánticas (mecánica cuántica aplicada), con el propósito de aplicarlos de manera conjunta.





# PROFESORES TRABAJANDO

## Guía del tatuador para usar símbolos matemáticos

Mario A. García Meza

DOI:



COLEGIO  
NACIONAL  
DE ACTUARIOS

# Guía del tatuador para usar símbolos matemáticos

Mario A. García Meza<sup>\*,1</sup>

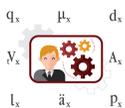
\*Universidad Juárez del Estado de Durango

**RESUMEN** Este artículo presenta una guía para tatuadores y entusiastas que desean plasmar símbolos matemáticos correctamente y con significado. Destaca la identidad de Euler, considerada la ecuación más bella por reunir cinco números fundamentales. También describe la sucesión de Fibonacci y su relación con la proporción áurea, presente en la naturaleza. El conjunto de Mandelbrot, con su estructura fractal infinita y compleja, es otra fuente visual potente, así como los patrones caóticos como el efecto mariposa. Incluimos ideas sobre matrices y transformaciones lineales, mostrando su potencial artístico y simbólico. Por último, menciona ecuaciones significativas para economía y física, como la de Black-Scholes y el teorema generalizado de Stokes, que condensan conceptos profundos en fórmulas concisas. Recomendamos consultar a un matemático antes de tatuarse, pues aunque existe una conexión entre arte y matemáticas, los tatuajes no sólo deben ser estéticos, sino también correctos y significativos.

## Palabras clave

Belleza matemática, Fractales, Razón áurea, Ecuación de Black y Scholes.

Derechos reservados © 2025 por el Colegio Nacional de Actuarios  
Última actualización del manuscrito: 4 de julio de 2025  
Artículo invitado por José Daniel López Barrientos. La visión y comentarios contenidos en este documento corresponden exclusivamente a su autor y, por tanto, son ajenos a cualquier entidad pública o privada, incluyendo aquella para la que actualmente colabora. El CONAC no recomienda ni respalda el uso de la información proporcionada en este estudio. El CONAC no ofrece ninguna garantía, expresa o implícita, ni representación de ningún tipo y no asume ninguna responsabilidad en relación con el uso o mal uso de este trabajo.



## 1. INTRODUCCIÓN

La realidad: los símbolos matemáticos se ven increíbles en nuestro cuerpo como tatuajes.

La única razón por la que no los usamos más seguido es porque ¡qué pena tatuarnos algo que no sea correcto! Es como cuando el tatuaje en Chino resulta en palabras que no nos tatuáramos en nuestro idioma. De esos casos, ejemplos abundan.

En agosto me hice una cita para hacerme un retoque en mi tatuaje, y platicando con mi tatuador, le mencioné un poco sobre lo que hago y vi cómo se le iluminaron los ojos de inspiración. Guardó esto como nota de lo que hará: *Números binarios - representaciones matemáticas*.

De inmediato pensé dos cosas:

1. Qué bien que entendió lo que quiero para mi tatuaje.
2. Pero... ¿él qué entiende por “representaciones matemáticas”?

Y como una gran parte de las personas en el mundo sienten ñañas cuando les hablas de matemáticas, me temo que simplemente irá a Pinterest y me arriesgo a acabar con el equivalente matemático a tatuarme “caldo de pollo” en chino por todo mi pecho.

Esta es una guía para ayudar a los tatuadores no-matemáticos a hacer tatuajes inspirados en las matemáticas y para personas que desean hacerse un tatuaje matemático y no quieren terminar haciendo el ridículo en las *pool party* de los congresos de matemáticas.

Las matemáticas son extremadamente bellas por sí mismas. Comentan *Zeki et al. (2014)* que apreciar la belleza matemática activa las mismas regiones en el cerebro que apreciar un gran arte o una pieza musical. Estoy seguro de que son muchas más personas las que desean plasmar esa belleza en el cuerpo en la forma de un tatuaje.

En las siguientes secciones presentaré algunas de las representaciones que a mi parecer se prestan de manera natural para una representación en forma de tatuaje, ya sea porque son símbolos que por sí mismos se ven atractivos y estéticos o porque lo que representan es muy profundo. Lo más común es que se cumplan esas dos características.

## 2. LA ECUACIÓN MAS BELLA DEL MUNDO

Hay dos razones para tatuarse algo matemático: por el significado y el efecto visual.

Hay expresiones que cargan mucho significado, pero que no se ven en esencia complejas. Por ejemplo:

<sup>1</sup>Correo electrónico: [mario.agm@ujed.mx](mailto:mario.agm@ujed.mx)

$$e^{\pi i} + 1 = 0 \quad (1)$$

Es considerada una de las ecuaciones más bellas que existen. Se llama la identidad de Euler, en honor a uno de los matemáticos más brillantes que han existido en este planeta. Se considera bella porque unifica cinco símbolos matemáticos fundamentales en una sola ecuación [Geiger \(2013\)](#).

- Los números 1 y 0 son la base de todos los números. Son la base del sistema binario y son la identidad de la multiplicación y la suma, respectivamente.
- El número  $\pi$ . Tal vez lo conoces porque te obligaron a aprender que es 3.141592... se trata de la relación entre la circunferencia de un círculo y su diámetro. En palabras sencillas, si tomas el diámetro de una rueda con un hilo, ese hilo tendrá que pasar poco más de 3 veces para rodear esa misma rueda, sin importar su tamaño. Es una proporción muy bella e interesante. También es interesante por ser de esos números que se conocen como irracionales y tiene otras propiedades muy interesantes.
- El número  $e$ , también conocido como el número Euler (si estás en matemáticas más de dos minutos, vas a escuchar ese nombre muy seguido), es la base de los logaritmos naturales. Formalmente,  $e$  es el límite expresado como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , que es la expresión que surge al calcular el interés compuesto. Una de las propiedades más interesantes de  $e$  y la que lo define es que es su propia derivada. Es decir,  $\frac{d}{dt} e^t = e^t$  nos dice que entre más grande sea  $e^t$ , mayor será su tasa de crecimiento. Es ahí cuando se le llama a algo *crecimiento exponencial*.
- El número  $i$ , conocido como el número imaginario y a los números que incluyen  $i$  se les conoce como números complejos<sup>3</sup>. Normalmente no deberíamos ser capaces de sacar la raíz cuadrada a un número negativo. Pero los matemáticos son muy creativos y simplemente le agregaron una dimensión al plano de tal modo que ya no tenemos una línea de números, sino un plano cartesiano con arriba, abajo, izquierda y derecha. Cuando hacemos esto, ya no estamos en el plano real, sino en el plano complejo. Veremos un poco más de esto en la sección de representaciones geométricas.

De todos estos símbolos se han escrito libros enteros. No exagero.

La belleza de la ecuación (1) está en que, en el momento en el que agregamos  $i$  en esta relación, estamos creando un campo vectorial que hace rotar la velocidad en 90 grados para cada

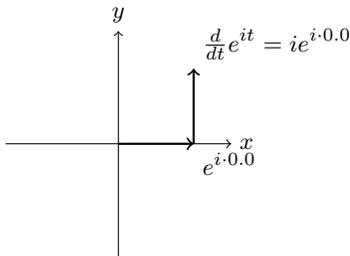
<sup>3</sup> El nombre es un poco engañoso. Ya sea que digamos que en realidad, todos los números son imaginarios o que realmente son números que sí existen y que tienen muchísimas aplicaciones en el mundo físico.



posición en la que nos coloquemos en el plano. Como vimos,  $\frac{d}{dt}e^t = e^t$ , es decir, la tasa de crecimiento de  $e^t$  es la misma que su magnitud. Entonces,

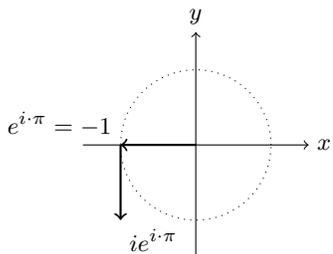
$$\frac{d}{dt}e^{it} = i \cdot e^{it}$$

La figura 1 ilustra este concepto considerando que  $e^{i \cdot 0} = 1$ .



**Figura 1** Para cada posición de  $e^{it}$ , su derivada incluye una rotación de  $90^\circ$ .

Hay solamente una trayectoria comenzando en la posición  $(1, 0)$  en la que la velocidad siempre coincide con el vector a una rotación de  $90^\circ$ : un círculo de radio 1 que va a una velocidad de una unidad por segundo (ve el libro de Nahin (2006)). ¿Cuál es la distancia que has recorrido en el círculo después de  $\pi$  segundos?

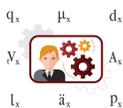


**Figura 2** Para cada posición de  $e^{it}$ , su derivada incluye una rotación de  $90^\circ$ .

La figura 2 muestra cómo después de una rotación por la mitad del círculo, hemos recorrido  $\pi$  y caemos en la posición  $(-1, 0)$  de nuestro plano cartesiano. Es decir,  $e^{i \cdot \pi} = -1$ .

Pasar ese  $-1$  del lado izquierdo de la ecuación es más un tema de estética, para asegurarnos de que los números 0 y 1 aparezcan.

Esta identidad resulta fascinante y establece el estándar de belleza para todo en las matemáticas. ¡Y la ecuación (1), junto con su representación geométrica (como en las figuras 1 y 2), serían un hermoso tatuaje!



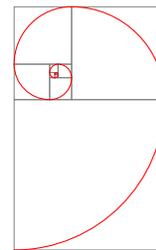
### 3. LA SUCESIÓN DE FIBONACCI

Probablemente hayas escuchado hablar de la *proporción áurea* y la sucesión de Fibonacci.

Construyamos una sucesión de números donde el siguiente número sea la suma de los dos anteriores:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

Esta sucesión apareció por primera vez en los años 200 a.c., en el trabajo del matemático indio Pingala sobre enumerar patrones de poesía en Sánscrito (ve el libro de Singh (1985) para obtener más detalles). El nombre viene del matemático italiano Leonardo de Pisa, conocido como Fibonacci (ve el libro de Sigler (2002) para obtener más detalles). Apila cuadros con las áreas de esta sucesión, y obtendrás una bella espiral que tal vez reconozcas:



**Figura 3** La espiral de Fibonacci.

El patrón de la espiral en la figura 3 es uno que podemos encontrar en múltiples instancias en la naturaleza. La razón de esta aparición recurrente en todas partes es que es una de las formas de auto-organización más simples que existen. Para un girasol es óptimo ajustar tantas semillas como pueda en el espacio que tiene disponible y una de las reglas más simples que logran ajustar muchas semillas en un espacio compacto es con una proporción de Fibonacci (lee el artículo de Takaki et al. (2003)). Pero aquí también surge un número especial, como los que vimos en la sección anterior.

Divide cualquier número de la sucesión de Fibonacci entre el número anterior y tendrás un número cercano a  $\phi = 1.618033$ . Este número se lee como *fi*, también es irracional<sup>4</sup> y es conocido como la proporción áurea. Esta proporción se conoce desde hace mucho tiempo. La razón por la que se suele considerar estético es porque el ojo humano es capaz de interpretar las imágenes que vienen en esta proporción más rápido que cualquier otra (echa un ojo al artículo de Bejan y Lorente (2010)).

El número  $\phi$  se define como

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618033988749 \dots$$

<sup>4</sup> No se puede expresar como la división de dos números enteros.

Como fuente de inspiración de un tatuaje, la espiral es la selección más popular. Como alternativas, se pueden incorporar elementos de la naturaleza donde se encuentra esta sucesión. Por ejemplo:

- Margaritas<sup>5</sup>.
- Piñas.
- Conchas.
- Formaciones de fenómenos naturales como tormentas o ciclones.

#### 4. EL CONJUNTO DE MANDELBROT

Hay una representación más que me parece indispensable que un buen tatuador que planea poner su tinta en un matemático debe de conocer: el conjunto de Mandelbrot. El conjunto de Mandelbrot es el fractal más famoso en las matemáticas. Un fractal es un patrón que se repite de manera infinita en diferentes escalas. Eso quiere decir que si haces *zoom* a un elemento del conjunto, verás como ese mismo conjunto se repite.

En la descripción de la identidad de Euler vimos que los números *imaginarios* expanden el plano de los números a un plano complejo. En un plano complejo de dos dimensiones, podemos dibujar el conjunto de números que cumplan con ciertas condiciones. Estas condiciones resultan en diferentes imágenes que podemos plasmar en un tatuaje.

Nos interesa el conjunto de valores de  $c$  en el plano complejo en el que la órbita del punto crítico  $z = 0$  bajo la iteración del mapeo

$$z \mapsto z^2 + c, \quad (2)$$

permanezca acotada.

Los números complejos que permanecen acotados mientras la función itera sobre ellos se comporta de manera caótica<sup>6</sup> en las orillas del conjunto. Eso hace que se generen formaciones parecidas a un caballito de mar que se repite cuando hacemos *zoom* en ellas.

En otras palabras, es nuevamente una sucesión como la que vimos de Fibonacci, pero en esta ocasión las reglas son un poco más complejas<sup>7</sup>. Por ejemplo, para  $c = 1$ , la sucesión que describe la ecuación (2) sería 0, 1, 2, 5, 26. Como esta sucesión tiende al infinito, 1 no es un elemento del conjunto de Mandelbrot. Por otro lado,  $c = -1$ , la sucesión es 0, -1, 0, -1, 0, ..., que sí es acotado y, por lo tanto, -1 sí pertenece al conjunto.

La figura 2 es la visualización del conjunto de Mandelbrot.

La figura 2 parece una mancha de prueba de Rorschach, pero si hacemos *zoom* en las orillas llegaremos a la *zona de caballito de mar* y encontraremos un comportamiento fractal que se presta para trabajos de tatuaje que parece en la figura 5.

<sup>5</sup> Las flores.

<sup>6</sup> En el sentido matemático de la palabra.

<sup>7</sup> Valga el juego de palabras.

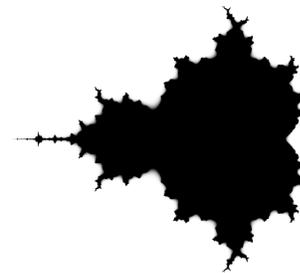


Figura 4 ¿Una mancha de Rorschach?

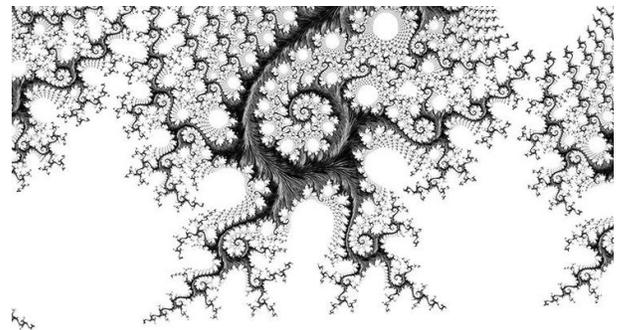


Figura 5 El conjunto de Mandelbrot muestra cómo una ecuación sencilla puede producir patrones caóticos muy complejos.

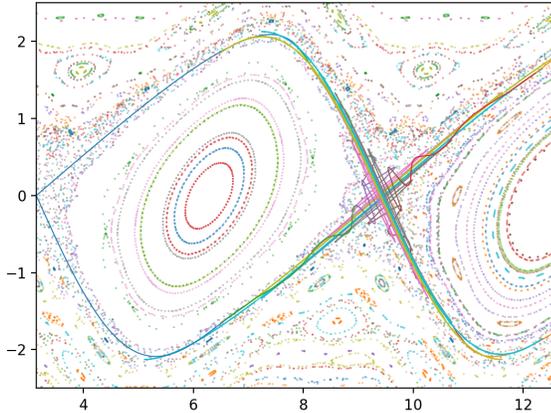
Aquí es importante que un tatuador profesional ponga mucho cuidado, porque podría caer en la tentación de copiar únicamente el comportamiento caótico sin prestar mucha atención a lo fractal. Lo que hace especial a este tipo de imágenes es que tiene ambos comportamientos al mismo tiempo.

##### 4.1. Espera, ¿Dijiste “caos”?

En matemáticas, el caos se manifiesta cuando un sistema se comporta de manera impredecible, a pesar de que proviene de sistemas deterministas que son altamente sensibles a las condiciones iniciales.

**El famoso efecto mariposa.** Hay ciertas funciones que tienen este tipo de características y que nos ayudan a modelar cosas como el clima. Pueden generar gráficos de bastante atractivo estético, como el que muestra la figura 6.



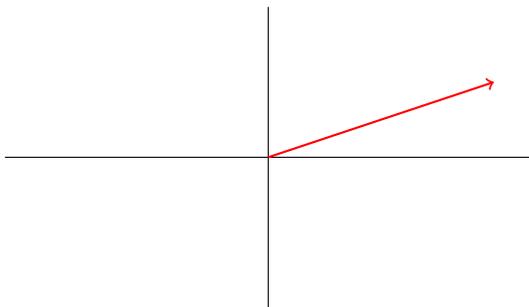


**Figura 6** Una visualización del mapa de Chirikov (mapa estándar), un ejemplo clásico de un sistema caótico en la dinámica Hamiltoniana.

## 5. MATRICES Y TRANSFORMACIONES EN EL ESPACIO LINEAL

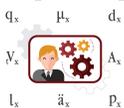
El álgebra matricial es probablemente uno de los elementos de las matemáticas más subvalorados como elementos estéticos.

A mi parecer, las matrices por sí mismas son elementos que se ven muy bien en un tatuaje, pero si nos aventuramos un poco en ellas, nos podemos dar cuenta que detrás del álgebra lineal hay un mundo visual muy complejo que requiere de mucha imaginación. Considera por ejemplo el vector  $(3, 1)$  en la figura 7.



**Figura 7** El vector  $(3,1)$ .

Ya de por sí es fascinante que los matemáticos pueden hacer esto con únicamente dos números, pero es que además las matrices funcionan como transformaciones en un espacio lineal. Lo que eso quiere decir es que las matrices se pueden usar



como indicaciones para hacer que un vector se modifique y se traslade de un lugar a otro. La forma en que hacen eso es que la matriz transforma por completo el espacio lineal: lo puede expandir, contraer y mover en todas las direcciones.

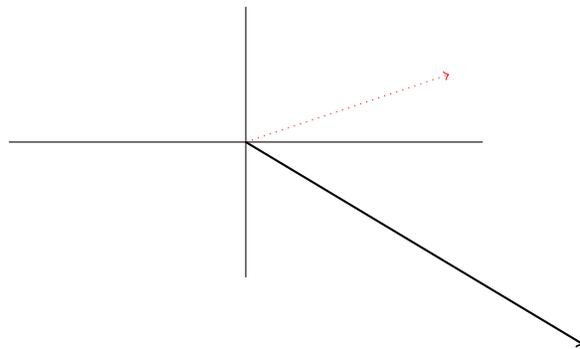
Por ejemplo, la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Hace una transformación al espacio lineal donde vive el vector  $(3, 1)$ . La operación sería algo así:

$$3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

En otras palabras, una matriz cambió la posición del vector de  $(3, 1)$  a  $(5, -3)$ . En realidad la matriz (3) actúa como una función que puede transformar cualquier vector en un espacio de dos dimensiones. La figura 8 nos muestra cómo se ve la transformación que acabamos de hacer al vector, con un giro y una extensión en el espacio vectorial. Esta es la misma transformación que haría a cualquier vector en el mismo espacio.



**Figura 8** El vector  $(3,1)$ .

Las transformaciones lineales son muy útiles porque son la base de, por ejemplo, los modelos de inteligencia artificial generativa o los gráficos tridimensionales que vemos en las películas y los videojuegos.

Un gran tatuaje de álgebra lineal podría mostrar los números alineados en una cuadrícula, como en la ecuación (4), pero para darle un gran toque, se pueden incluir las transformaciones correspondientes. No tienen que ser transformaciones específicas y no tienen que tener un significado particular, y para no complicarte la existencia, no es necesario que uses números

específicos en la matriz. Puedes hacer una matriz como la de la ecuación (4) y asignar una imagen con su transformación lineal en conjunto. Sin embargo, si estás usando números específicos en una matriz, si sería bueno que la representación gráfica coincida.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (4)$$

## 6. LAS TRES ECUACIONES MÁS AESTHETIC DE LAS MATEMÁTICAS

Como economista, hay ecuaciones que me haría en un tatuaje, tanto por su significado como por cómo se ven. Por ejemplo, en lo personal un modelo de crecimiento económico neoclásico dice una historia muy interesante sobre la naturaleza de la economía y del comportamiento humano en una sola línea que incluye símbolos que se verían muy bien en un tatuaje (echa un ojo a los artículos de Ramsey (1928); Koopmans (1965)):

$$U(0) = \int_0^{\infty} e^{-\rho-n)t} \left( \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right) L_t dt \quad (5)$$

La expresión (5) es una ecuación diferencial. Las ecuaciones diferenciales nos hablan de *movimiento*. Describen el comportamiento de algo en función de su entorno y son muy prácticas en física. Los economistas nos acostumbramos a usar ecuaciones diferenciales también para describir el comportamiento de la economía, en ocasiones con resultados sorprendentemente cercanos a la realidad. Siempre tenemos que estar verificando lo que para en la realidad usando técnicas de estadística y econometría.

### 6.1. Econometría y Mínimos cuadrados

Dentro de la econometría, la ecuación que me parece más significativa, es la que representa la resolución de la regresión lineal por mínimos cuadrados.

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{y} \quad (6)$$

La ecuación (6) no se ve tan intimidante como otras, pero tiene un gran significado. Es el estimador que minimiza los errores de la línea de regresión con respecto a las observaciones al cuadrado. Está escrito en el lenguaje del álgebra lineal, lo que hace la ecuación más compacta, pero es un estimador que aplica sin importar el número de regresores en la ecuación.

### 6.2. La ecuación de Black y Scholes

Hay una ecuación en derivadas parciales que no puede faltar, y es la base de todas las finanzas. En el año 1900, un matemático francés escribió su tesis de doctorado con una descripción matemática del movimiento de las acciones en la bolsa de valores (mira la tesis de Bachelier (1900)). Su trabajo acabó siendo una descripción del movimiento Browniano que más tarde serviría para encontrar la forma de valorar el contrato de una opción en la bolsa de valores (mira los artículos de Merton (1973); Black y Scholes (1973)). La ecuación se llama Black-Scholes-Merton, en honor a los autores de los artículos donde se describe la fórmula.

Es increíble cómo a pesar del comportamiento aleatorio de las acciones en la bolsa, es posible encontrar principios fundamentales de su comportamiento y plasmarlos en unas pocas líneas con un gran significado.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \quad (7)$$

Si tuviera que tatuar la ecuación (7), lo haría acompañado de una simulación del movimiento Browniano, como la mostrada en la figura 9.

### 6.3. El teorema generalizado de Stokes

¿Qué tienen en común las matemáticas y la poesía?

Ambos tienen la capacidad de traer mucho significado usando muy pocas “palabras”. Considera la siguiente expresión de la geometría diferencial:

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega$$

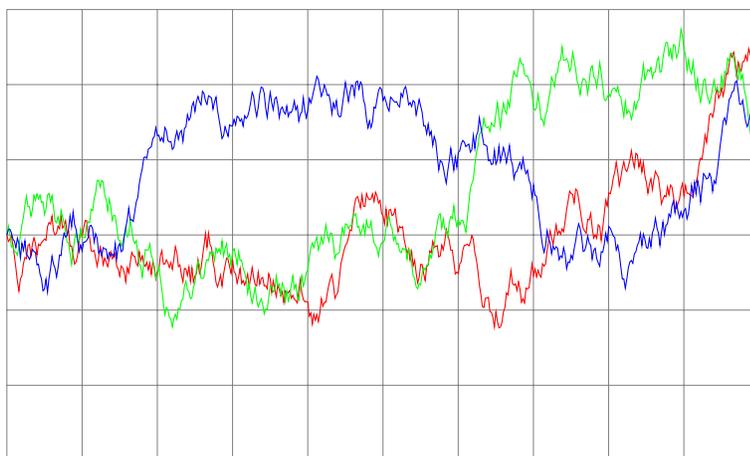
Es una representación del teorema generalizado de Stokes, que en español dicta:

**Teorema 6.1.** *La integral de la forma diferencial de  $\omega$  sobre la frontera de un espacio  $\Omega$  es igual a la integral de su derivada exterior  $d\omega$  sobre la totalidad de ese espacio.*

Y aquí viene el detalle impactante: con solo seis símbolos estamos unificando cuatro teoremas principales del cálculo multivariable. Basta con elegir diferentes tipos de espacios y de formas diferenciales y este teorema se transforma en

- Teorema fundamental del cálculo. Según Hardy (1908), la integral de la derivada de una función en un intervalo es la diferencia de la función evaluada en los extremos de ese intervalo.
- Teorema de Green. De acuerdo con Green (1828), la circulación de un campo vectorial a lo largo de una curva cerrada en el plano es igual a la integral de su rotor sobre la región que esta curva encierra.





**Figura 9** El movimiento Browniano es ideal para describir el movimiento de los precios de las acciones en la bolsa de valores.

- Teorema clásico de Stokes. Basta con leer a **Maxwell (1873)** para ver que la circulación de un campo vectorial a lo largo de una curva cerrada en el espacio es igual al flujo de su rotor a través de la superficie delimitada por dicha curva.
- Teorema de Gauss de la divergencia. Checa lo que dice **Ostrogradsky (1831)**: “El flujo de un campo vectorial que sale de una superficie cerrada es igual a la integral de su divergencia en el volumen contenido dentro de esa superficie”.

¿A poco no es fascinante cómo podemos generalizar tanto conocimiento en una ecuación tan aparentemente inofensiva?  
¡Definitivamente consideraría tatuarmelo en el brazo izquierdo!

## 7. CONSULTA A TU MATEMÁTICO DE CONFIANZA

Hay una conexión innegable entre las matemáticas y el arte. Leonardo Da Vinci es conocido por obras como la Mona Lisa, pero una de sus más grandes aportaciones a este mundo fueron sus técnicas. Muchas de las cuales provienen de las matemáticas. La forma en que se aseguraba de dar una sensación de profundidad a sus pinturas y el cuidado en los detalles de sus cálculos son sólo una muestra.

Simplemente no se puede hacer nada de lo que llamamos arte en la actualidad si no es bajo la intervención de las matemáticas. La máquina que un tatuador usa para inyectar la tinta bajo la piel para que los macrófagos retengan la tinta en su lugar (mira lo que escribió **Strandt et al. (2020)**), naturalmente hace sus cálculos usando matemáticas. El software que usamos diariamente para



diseñar nuestro arte funciona gracias a cálculos matemáticos. Por lo tanto, un tatuaje matemático tiene mucho sentido y le da más capas de profundidad a la belleza que ya es inherente a la disciplina.

El único consejo en este caso es que, si deseas hacerte un tatuaje matemático, le preguntes a tu matemático de confianza para estar seguros de que la representación es correcta. ¡De ahí queda sólo poner manos a la obra y disfrutar y lucir tu tatuaje matemático!

## REFERENCIAS

- Bachelier, L., 1900 *Théorie de la spéculation*. Disertación Doctoral, University of Paris, Doctoral thesis.
- Bejan, A. y S. Lorente, 2010 The constructal law of design and evolution in nature. *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences* **365**: 1335–1347.
- Black, F. y M. Scholes, 1973 The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy* **81**: 637–654.
- Geiger, G., 2013 Math is so very cool. Clark University Blogs .
- Green, G., 1828 *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*. Printed for the Author, by T. Wheelhouse, Nottingham, UK.
- Hardy, G. H., 1908 *A Course of Pure Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, Digitized by Internet Archive.
- Koopmans, T. C., 1965 On the concept of optimal economic growth. En *The Econometric Approach to Development Planning*, capítulo 4, pp. 225–287, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

Maxwell, J. C., 1873 *A Treatise on Electricity and Magnetism*, volumen 1. Clarendon Press, Oxford, UK.

Merton, R. C., 1973 Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science* **4**: 141–183.

Nahin, P. J., 2006 *Dr. Euler's Fabulous Formula: Cures Many Mathematical Ills*. Princeton University Press.

Ostrogradsky, M., 1831 Mémoire sur le calcul des variations des intégrales multiples. *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg* **1**: 39–53.

Ramsey, F. P., 1928 A mathematical theory of saving. *The Economic Journal* **38**: 543–559.

Sigler, L. E., 2002 *Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, Springer.

Singh, P., 1985 The so-called Fibonacci numbers in ancient and medieval India. *Historia Mathematica* **12**: 229–244.

Strandt, H., O. Voluzan, T. Niedermair, U. Ritter, J. Thalhammer, *et al.*, 2020 Macrophages and Fibroblasts differentially contribute to tattoo stability. *Dermatology* **237**: 296–302.

Takaki, R., Y. Ogiso, M. Hayashi, y A. Katsu, 2003 Simulations of sunflower spirals and Fibonacci numbers. *Forma* **18**: 295–305.

Zeki, S., J. P. Romaya, D. Benincasa, y M. F. Atiyah, 2014 The experience of mathematical beauty and its neural correlates. *Frontiers in Human Neuroscience* **8**: 68.



mía.

**Mario A. García Meza** es Doctor en Ciencias Económicas por el Instituto Politécnico Nacional. Asimismo, tiene la distinción de ser Miembro del Sistema Nacional de Investigadoras Investigadores de nivel 1, y es Profesor-Investigador en la Universidad Juárez del Estado de Durango. Es el editor en jefe, y máximo responsable del sitio web [marionomics.com](http://marionomics.com), en donde enseña a sus suscriptores los fundamentos para escribir su primer artículo en econo-





# PROFESORES TRABAJANDO

## The day when risk theory prevented a *Civil War*

José Daniel López Barrientos



# The day when risk theory prevented a *Civil War*

José Daniel López-Barrientos<sup>\*,1</sup>

\*Universidad Anáhuac México

**ABSTRACT** The present piece *is not* a research paper on actuarial sciences, nor intends to be one. It represents the written form of a workshop that the author gives to his students from a first course on Risk Theory when teaching the topic of compound-type random variables under the assumptions of the model of collective risks. All the statistical hypotheses made here were specifically conceived for this presentation and should be carefully analyzed in any real-world application.

## Key words

Model of collective risks, Wright model, Marvel Cinematic Universe, Detective Comics Extended Universe.

## 1. INTRODUCTION/WARNING

The purpose of this paper is to present an exercise on the model of collective risks as introduced in Chapter 17 from the book by Promislow (2015) (see also Chapter 12 in the

book by Bowers *et al.* (1997)). Concretely, we assume the usual hypotheses on the model and aim for the Poisson-compound-Gamma random variable of aggregate claims, as referred to in the books by Klugman *et al.* (2019) and Stoltzfus and Dalton (2010).

This document is addressed to an actuarial audience that enjoys superhero films and comic books. Therefore, we strongly recommend the reader to watch *Man of Steel*, by Roven *et al.* (2013); *The Avengers*, by Feige (2012); and *Captain America: Civil War*, by Feige (2016) before reading this paper. Moreover, we caution the reader that we will extensively utilize the resolutions of the movies mentioned above. For this reason, consider this paragraph a *spoiler alert*.

The remainder of the paper is divided as follows. The next section presents a hypothetical argument between

All rights reserved © 2025 by the Mexican Colegio Nacional de Actuarios  
Last update of the manuscript: Tuesday 17<sup>th</sup> June, 2025  
This article is published by the Mexican Colegio Nacional de Actuarios (CONAC) and contains information from a variety of sources. It is a work intended for informational purposes only and should not be construed as professional or financial advice. The vision and comments contained in this document correspond exclusively to its author and, therefore, are unrelated to any public or private entity, including the one for which he currently collaborates. CONAC does not recommend or endorse the use of the information provided in this study. CONAC makes no warranty, express or implied, or representation of any kind and assumes no liability in connection with the use or misuse of this work.

<sup>1</sup>E-mail of the corresponding author: [daniel.lopez@anahuac.mx](mailto:daniel.lopez@anahuac.mx)



two superheroes about the monetary costs of their actions. Then, in section 3, we discuss the typical rationale given for the disagreements that cause the superheroes to clash with one another, and we also devise an (expensive) alternative for their conflict. Section 4 provides yet another (actuarial) possibility, along with its numeric implementation. Finally, section 5 gives our conclusions and poses a question regarding a typical extension of the material presented here. Appendices A and B give details on the Gamma and Negative Binomial distributions, respectively. If the reader intends to see the assumptions of the model of collective risks, its implementation on a spreadsheet program, and the computation of its expectation and distribution function, we would recommend they go straight to sections 4 and 5.

## 2. A MULTIVERSAL DEBATE

“Time. Space. Reality. It is more than a linear path. It’s a prism of endless possibility. Where a single choice can branch out into infinite realities, creating alternate worlds from the ones you know. Each is a reflection of what could have been. Some heroes will rise, others will fall. And nothing will be the same. I am the Watcher. I am your guide through these vast new realities. Follow me and dare to face the unknown, and ponder the question... What if?”. Uatu, the Watcher in the *What if?* series by Bradley (2021). See figure 1.



Figure 1 The Watcher, as depicted by (Byrne 2005, p.46).

What if there was a crossover universe such that, in the aftermath of the events shown in *Man of Steel* and *The Avengers*, Superman asked Tony Stark if it was necessary to have six Avengers fighting the *Chitauri* army in the

third act of the movie? (After all, Kal-El defeated several Kryptonians single-handedly in his film.) Tony, being an expert debater, would then argue that they needed only two Avengers, while the remaining four would limit the destruction of the city to a few blocks<sup>2</sup>. See figure 2.

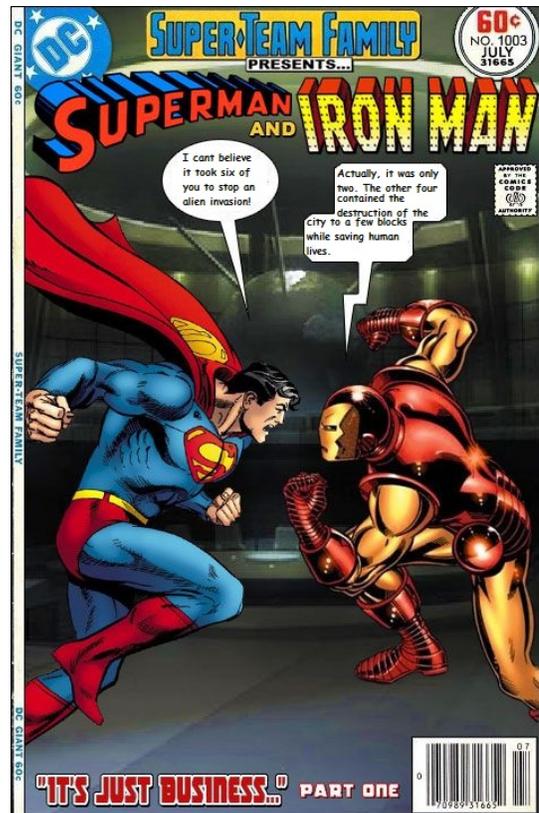
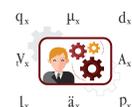


Figure 2 Steel meets Iron in an interesting debate. Modified version of the fanart by Pearsall (2015).

After saying this, Mr. Stark would inquire the Last Son of Krypton about the devastation he caused to the city of Metropolis in *Man of Steel*. Indeed, according to Zakarin (2013), about 129,000 people lost their lives, 250,000 people went missing, and a million people got injured during Superman’s heroic deeds. In the aforementioned article, the author explicitly compares the impact on Metropolis to that of *Fat Man* on Nagasaki, Japan during the bombing

<sup>2</sup> A careful analysis of the sequence under scrutiny yields that there were always two Avengers fighting the alien army on top of the skyscrapers, but they alternated this task with those of containing the wrecking of the city and saving human lives.



of August 9, 1945. Monetarily, Clark Kent's *superheroic actions* exceed USD750 billion only in physical damage<sup>3</sup>, and the overall cost of the catastrophe endured by the city of Metropolis exceeds two trillion USD.

### 3. SOKOVIA ACCORDS II

According to Rosza *et al.* (2016), *Captain America: Civil War* explores the internal conflict that arises among the Avengers when the United Nations proposes a system of accountability to address the potential collateral damage caused by their actions. This initiative leads to the signing of the so-called *Sokovia Accords* by the world's governments. The resulting *status quo* creates a deep rift within the team: Captain America argues that superheroes must remain free to act without governmental control, while Iron Man firmly supports regulation and oversight. In the comic book version by Millar *et al.* (2007), the storyline centers on the U.S. government's enactment of a *Superhero Registration Act*, which requires super-powered individuals to operate under official regulation, much like members of law enforcement. See figure 3.



**Figure 3** The disagreement among the heroes due to a political action leads to a confrontation. Source material original from the works of Feige (2016) (above), and Millar *et al.* (2007) (below).

In both its representations (film and comic book), Marvel's *Civil War* is, by no means, the only example of an event where an institutional prohibition spawns a conflict between paladins of justice. The works by Moore *et al.* (1986); Miller *et al.* (1986); Walker (2004); Gordon

<sup>3</sup> Other comparisons offered by Zakarin (2013) are the estimated costs of the physical damages caused by The Avengers to Manhattan, and by the events of 9/11 to the United States of America. That is, USD160 billion, and USD55 billion, respectively.



*et al.* (2009) and Roven and Snyder (2016) are other well-known cases of the same situation. See figures 4-5.



**Figure 4** The *Watchmen* series is so influential, it continues to affect pop culture even nowadays. These images are original from the works by Moore *et al.* (1986) (above) and Gordon *et al.* (2009) (below).



**Figure 5** The film *Batman v Superman: Dawn of Justice* is heavily inspired (among others) by the comic book series *Batman: The Dark Knight Returns*. These images are original from the works by Miller *et al.* (1986) (left) and Roven and Snyder (2016) (right).

Say the governments of the world agree to have the superheroes registered using what we could dub as *the Sokovia accords II*. In view of the previous discussion, we could expect to have a face-off between factions of heroes.

### An (expensive) alternative

The governments of the world would, of course, look to prevent losing human lives. But they would also try to save money! A possibility to avoid the confrontation among our champions could arise from the following crossover conversation between Batman (BM) and Iron Man (IM). (See figure 6.)

- BM- Hey, Tony! Would you be willing to cover the expenses for the first USD350 billion per event?  
 IM- Sure, Bruce! But only if you agree to pay for the casualties from USD350 billion to one trillion dollars. What do you say?  
 BM- Sounds good. Do you think the governments of the world would agree to cover the costs in excess of one trillion?



**Figure 6** Batman and Iron Man talking about things. Image obtained from [9gag.com](http://9gag.com).

The answer to the final question displayed in the last paragraph depends, of course, on the probability that the governments of the world end up putting money of their own. However, a drawback of the proposed solution is that it would turn the (exciting) battles displayed in figures 2, 3 and 5 into the (not-so-exciting) battle displayed in figure 7.



**Figure 7** Not even the wealthiest noblest heroes should go against their own wealth. Image obtained from [hummorgeeky.com](http://hummorgeeky.com)

Imagine that an actuary overhears the talk between BM and IM. You will surely agree that our heroes could turn to an insurance company to take on their respective risks. The following section delves into the details of the computation of the expected costs for all three of our protagonists<sup>4</sup>: Tony Stark, Bruce Wayne, and the governments of the world, and their respective probabilities of ending up paying more than those numbers.

## 4. THE WRIGHT ALTERNATIVE

Let  $N$  be a random variable with support on the set  $\{0, 1, \dots\}$ . We will use  $N$  to describe *how many* casualties are linked to the superheroic actions of our clients, and call it a *frequency random variable*. On the other hand, define  $X_i$  as the non-negative random variable that mea-

<sup>4</sup> A more appropriate term would be *agents*, and in the case that they signed insurance contracts, they would become *policyholders*.



sures *how much* the  $i$ -th claim costs, for  $i = 1, 2, \dots$ . Moreover, we assume the following hypotheses (see Chapter 17 in the book by [Promislow \(2015\)](#), and Chapter 12 in the book by [Bowers et al. \(1997\)](#)).

- H1.** The sequence of severity random variables  $(X_i : i = 1, 2, \dots)$  is independent of the frequency random variable  $N$ .
- H2.** The random variables follow a common distribution law, say  $F_X$ . We say that  $X$  is a *severity random variable*.
- H3.** The random variables  $X_i$  and  $X_j$  are pairwise independent for  $i, j = 1, 2, \dots$  and  $i \neq j$ .

Define now the random variable of aggregate claims  $S$  as

$$S := \begin{cases} 0 & \text{if } N = 0, \\ X_1 + \dots + X_N & \text{if } N > 0. \end{cases} \quad (1)$$

### The theorem of total probability

In the context of our assumptions, it is not hard to prove that

$$\mathbb{E}S = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}N. \quad (2)$$

Indeed, using the theorem of nested expectation (see, for instance, formula (2.2.10) in the book by [Bowers et al. \(1997\)](#)), we see that:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}S &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(S|N)] \\ &= 0 \cdot \mathbb{P}(N = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \sum_{k=1}^n X_k | N = n \right] \mathbb{P}(N = n) \\ &= 0 + \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \sum_{k=0}^n X_k \right] \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^n \mathbb{E}X_k \right] \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^n \mathbb{E}X \right] \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n \mathbb{E}X \mathbb{P}(N = n) \\ &= \mathbb{E}X \sum_{n=0}^{\infty} n \mathbb{P}(N = n) = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}N. \end{aligned}$$

The second equality is just an application of (1) and the theorem of total probability; the third equality above holds because of the independence between  $N$  and the sequence of severity random variables  $(X_i : i = 1, 2, \dots)$  referred to in **H1**. The fifth equality is true because the severity random variables follow the common distribution of the random variable  $X$  (recall assumption **H2**).



As for the variance of the random variable of aggregate claims, note that

$$\mathbf{var}S = \mathbb{E}S^2 - (\mathbb{E}S)^2. \quad (3)$$

Now, an application of the theorem of total probability and (1) yield

$$\begin{aligned} \mathbb{E}S^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[ S^2 | N = n \right] \mathbb{P}(N = n) \\ &= 0 \cdot \mathbb{P}(N = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[ S^2 | N = n \right] \mathbb{P}(N = n). \end{aligned}$$

Now, since

$$\mathbb{E} \left[ S^2 | N = n \right] = \mathbf{var}(S|N = n) + [\mathbb{E}(S|N = n)]^2,$$

we can write

$$\begin{aligned} \mathbb{E}S^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \mathbf{var}(S|N = n) + [\mathbb{E}(S|N = n)]^2 \right) \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \mathbf{var} \left( \sum_{k=1}^n X_k \right) + \left[ \mathbb{E} \left( \sum_{k=1}^n X_k \right) \right]^2 \right) \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^n \mathbf{var}X_k + \left[ \sum_{k=1}^n \mathbb{E}X_k \right]^2 \right) \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( n \mathbf{var}X + (n \mathbb{E}X)^2 \right) \mathbb{P}(N = n) \\ &= \mathbf{var}X \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}(N = n) + (\mathbb{E}X)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \mathbb{P}(N = n) \\ &= \mathbf{var}X \cdot \mathbb{E}N + (\mathbb{E}X)^2 \mathbb{E}N^2. \end{aligned} \quad (4)$$

The second equality above follows from **H1**; the third, from **H3**; and the fourth, from **H2**. Substituting (2) and (4) into (3) gives us

$$\begin{aligned} \mathbf{var}S &= \mathbf{var}X \cdot \mathbb{E}N + (\mathbb{E}X)^2 \cdot \mathbb{E}N^2 - (\mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}N)^2 \\ &= \mathbf{var}X \cdot \mathbb{E}N + (\mathbb{E}X)^2 (\mathbb{E}N^2 - (\mathbb{E}N)^2) \\ &= \mathbf{var}X \cdot \mathbb{E}N + (\mathbb{E}X)^2 \mathbf{var}N. \end{aligned} \quad (5)$$

We can use the theorem of total probability again to find the cumulative distribution function of the random variable of aggregate claims:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S \leq s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S \leq s | N = n) \mathbb{P}(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P} \left[ \sum_{k=0}^n X_k \leq s \right] \mathbb{P}(N = n) \end{aligned} \quad (6)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} F_X^{*n}(s) \mathbb{P}(N = n), \quad (7)$$

where, if  $n > 0$ , we let  $F_X^{*n}(\cdot)$  denote the cumulative distribution function of the  $n$ -th convolution of the independent and identically random variables  $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ; otherwise,  $F_X^{*n}(\cdot) = 0$ . As was the case with (2), (6) holds by **H1**. On the other hand, (7) is true because of **H2** and **H3**.

A very popular choice for modeling the random variable of aggregate claims under assumptions **H1-H3** is the model introduced by Wright (1990), where the frequency random variable follows a Poisson distribution, and the severity is a Gamma-like random variable<sup>5</sup>. (For more on the Gamma distribution, see Appendix A and appendix A.3 in the book by Klugman et al. (2019).)

### Spreadcheating

For illustrative purposes, but in line with the figures given by Zakarin (2013), let us assume that the Poisson parameter for the frequency distribution of the group of heroes is  $\lambda = 7$ , while the shape and scale parameters for their severity distribution are  $\alpha = 18$  and  $\theta = 6$ . Since  $\mathbb{E}N = \lambda = \text{var}N$ , and by (2) and (16), this results in an expected loss of

$$\mathbb{E}S = 18 \times 6 \times 7 = 756. \quad (8)$$

Turning to (5) and (17), also see that

$$\text{var}S = (18 \times 6^2) \cdot 7 + (18 \times 6)^2 \cdot 7 = 86,184. \quad (9)$$

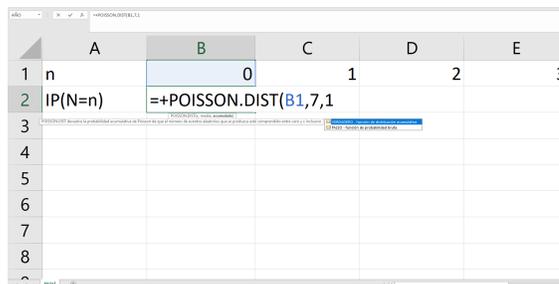
We will use the conversation between IM and BM to split the expected loss displayed in (8) into the three agents mentioned before: Iron Man, Batman, and the government of the world. To do this, we open our favorite spreadsheet program and use the first two rows from the worksheet to record the frequency mass function. See figures 8-10.

The Poisson random variable has an infinite support. One way to work with such a class of distributions is to truncate the support whenever the cumulative distribution function approaches the unit within a certain tolerance level. Figure 9 illustrates this idea to the tolerance level customized in our spreadsheet package.

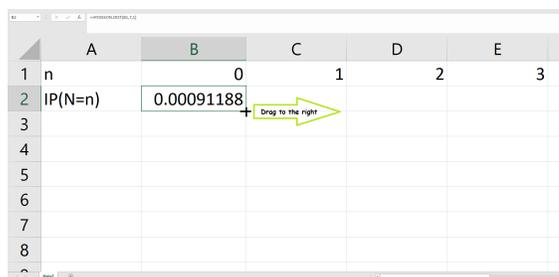
We now use the first column to keep track of the values in the support of the random variable of aggregate claims. Each unit represents one billion dollars<sup>6</sup>. To know where

<sup>5</sup> According to Stoltzfus and Dalton (2010), in a Gamma-like model, the standard deviation is proportional to the mean. See page II-67 in their book.

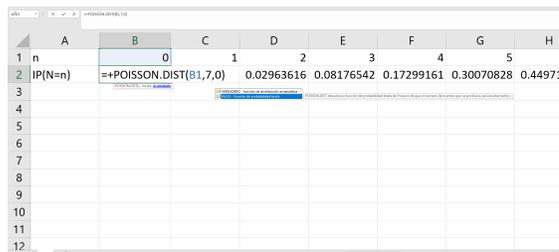
<sup>6</sup> Note that this stepsize is gargantuan. It is not common at all to use numbers of this sort as stepsizes. However, we do it here to dramatize the illustration. In a real-life application, it is more common to use smaller stepsizes. However, the main point here is the fact that the sums (resp. integrals) of the mass (resp. cumulative distribution) functions add-up to one.



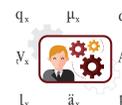
**Figure 8** Actually, the prompt `POISSON.DIST(B1,7,1)` does not yield the Poisson mass function at  $B1 = 0$  with mean  $\lambda = 7$ , but the cumulative distribution function at  $B1 = 0$  with mean  $\lambda = 7$  is given by the syntax `POISSON.DIST(B1,7,0)`. We will revise this situation later.



**Figure 9** Drag the formula from cell B2 until you get a result of 1. Depending on the customized precision of your spreadsheet program, this will happen at  $x = 11$  or  $x = 27$ .



**Figure 10** Change the final argument in the prompt from figure 8 so that the formula `POISSON.DIST(B1,7,0)` is displayed in all the cells from the second row.



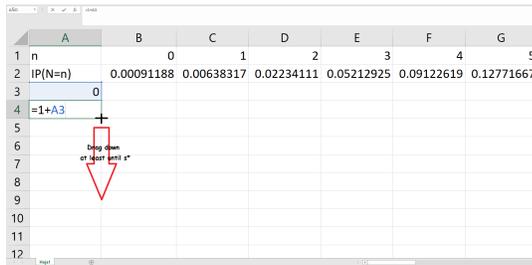
to truncate the (infinite) support of the random variable of aggregate claims, we turn to Chebyshev's inequality (see Chapter II.4.4 in the book by [Mood et al. \(1974\)](#)):

$$\mathbb{P}\left(|S - \mathbb{E}S| \leq k\sqrt{\text{var}S}\right) \leq \frac{1}{k^2} \text{ for } k > 0.$$

Then we know the truncation point  $s^*$  must be at least equal to

$$\begin{aligned} \mathbb{E}S + k\sqrt{\text{var}S} &= 756 + k\sqrt{86,184} \\ &\approx 756 + 293.5711157k \end{aligned} \quad (10)$$

to bound the error in our estimation of  $\mathbb{P}(S \leq s^*)$  by  $1/k^2$ . Since we will not tolerate an error larger than  $1/100$ , we set  $k = 10$  in (10) and obtain  $s^* > 3691.711157$ . See figure 11.

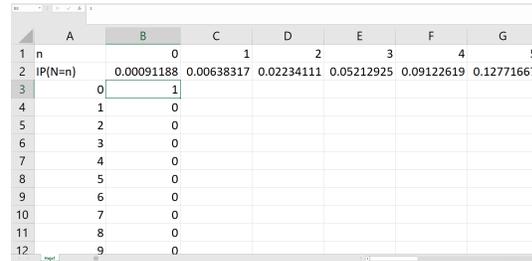
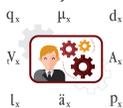


**Figure 11** We use the first column to record the values in the support of the random variable of aggregate claims  $S$ .

We will use the remainder of the columns to keep track of the *conditional probability* of the random variable  $[S|N = n]$ , where  $n$  appears at the first row of the spreadsheet. With this in mind, column B will display conditional probabilities of the random variable  $[S|N = 0]$ , column C will show conditional probabilities of the random variable  $[S|N = 1]$ , column D will show conditional probabilities of the random variable  $[S|N = 2]$ , and so on, until column AC, where we will place the conditional probability of the random variable  $[S|N = 27]$ .

We start by recording the *mass* function of the random variable  $[S|N = 0]$ . Note that, in the present context, it is impossible for  $S$  to be greater than zero if  $N = 0$ . Then, we type a one, and many zeroes in column B. See figure 12 (the symbol  $\chi_A(s)$  stands for an indicator function of the set  $A$  evaluated at  $s$ ).

To compute the conditional *density* function of the random variable  $[S|N = 1]$ , we note that, by assumption **H1**, this is just the density function of the random variable of

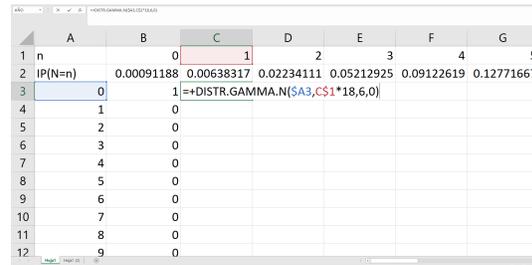


**Figure 12** The conditional mass function of the random variable  $[S|N = 0]$  is given by  $\mathbb{P}(S = s|N = 0) = \chi_0(s)$ .

aggregate claims  $S$ . However, we note that, by theorem [A.2](#), it is also a Gamma random variable with shape parameter equal to  $n \times \alpha = 1 \times 18$ , and shape parameter of 6. Thus, we input the prompt

$$=\text{DISTR.GAMMA.N}(\$A3, C\$1*18, 6, 0)$$

into cell C3 and drag the result all the way down (at least up to  $s^* = 3692$ ). See figure 13.

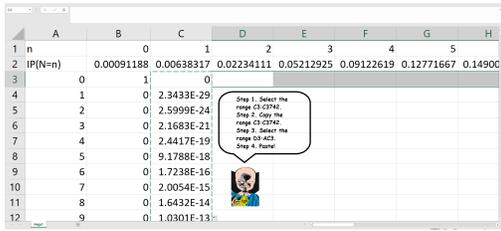


**Figure 13** Observe we are no longer recording a *mass* function, but a *density* function. Moreover, we are fixing the column in the first argument of the prompt; and the row, in the second. Our purpose is to drag this formula down, but also to the right.

To generate the rest of the conditional density functions, we select the range with the conditional density function of the random variable  $[S|N = 1]$  (*i.e.* in our case, range C3:C3742<sup>7</sup>), copy it, and paste it in the range D3:AC3. See figure 14.

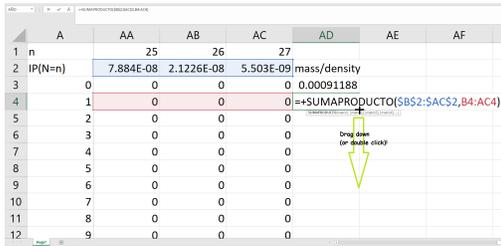
Yet another application of the theorem of total probability gives us the density function of the random variable of aggregate claims, along with the point of mass

<sup>7</sup> Note that we selected an endpoint of the support of the random variable of  $3739 > 3691.71157 = s^*$ . Indeed, the 3742nd row corresponds to a value of 3739 in the support of  $S$ .



**Figure 14** Uatu the Watcher (as depicted by Byrne (2005)) tells us how to compute the conditional density functions for the random variables  $[S|N = n]$ , with  $n = 2, \dots, 27$ .

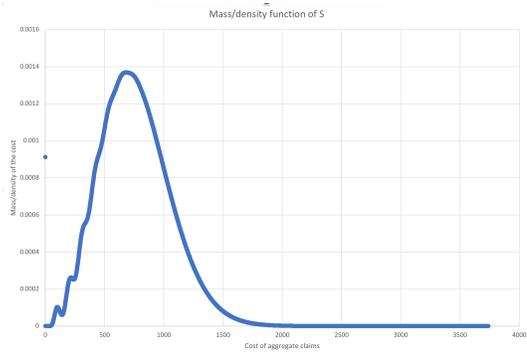
at  $s = 0$ . (For example, (7) gives us the cumulative distribution function of the random variable of aggregate claims evaluated at  $s$ .) Figure 15 shows how to obtain  $f_S(1) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{[S|N=n]}(1)P(N = n)$ . This number represents the *density* of the random variable  $S$  evaluated at 1. The entry in cell AD3 represents the *probability* that  $P(S = 0)$ .



**Figure 15** The blue range represents the mass function of the random variable for the frequency  $N$ , while the red range represents the mass function of the conditional random variable  $[S|N = 0]$ , and the density function of the conditional random variable  $[S|N = n]$  for  $n = 1, \dots$  Note, however, that only the entry in the cell AD3 represents a probability, the remainder of the entries in column AD stand for densities.

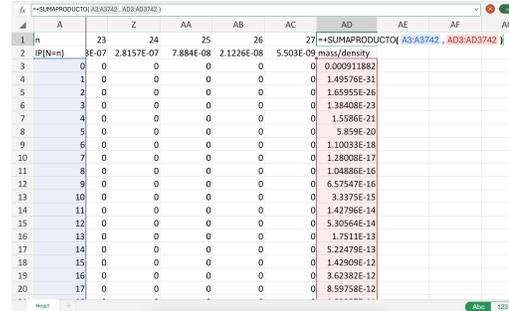
Column AD represents the mass/density of the mixed-random variable of aggregate claims  $S$ . Figure 16 is its geometric depiction.

As a means of verification, now we use the entries of range AD3:AD3742 to approximate the mean of the random variable of aggregate claims  $S$  from (8). To do this, we compute the product of the values in the support



**Figure 16** Note that the point of mass at  $s = 0$  is isolated from the rest of the points.

of  $S$ , with the mass/densities from column AD3:AD3742<sup>8</sup>. We use the cell AD1 to this end. See figure 17.



**Figure 17** Our approximation should be very close to  $E[S] = 756$ .

Now, we approximate the expected losses of each agent. To do Iron Man's, we use column AE to keep track of his losses as a function of the support of the random variable  $S$ . Since his *limit of responsibility* is 350 billion dollars, we use the original support of the random variable of aggregate claims and input the prompt

$$=IF(A3<=350, A3, 350)$$

<sup>8</sup> This is an approximation of the expectation from (8): we are doing

$$0 \times P(S = 0) + \sum_{s=1}^{\infty} s f_S(s),$$

when we should be doing

$$E[S] = 0 \times P(S = 0) + \int_0^{\infty} s f_S(s) ds.$$

The reason for this is that the sum in the former expression is a Riemann approximation (with unitary stepsize) to the integral in the latter.



in cell AE3 and press “Return”. Then we double-click in the right-hand-side corner of the cell AE3. See figure 18.

	A	AA	AB	AC	AD	AE	AF
1	n	25	26	27			
2	IP(N=n)	7.884E-08	2.123E-08	5.503E-09	mass/density	IM	
3	0	0	0	0	0.000911882	=IF(A3<=350,A3,350)	
4	1	0	0	0	1.49576E-31		
5	2	0	0	0	1.65955E-26		
6	3	0	0	0	1.38408E-23		
7	4	0	0	0	1.5586E-21		
8	5	0	0	0	5.859E-20		
9	6	0	0	0	1.10033E-18		
10	7	0	0	0	1.28008E-17		
11	8	0	0	0	1.04886E-16		
12	9	0	0	0	6.57547E-16		

**Figure 18** We place the support of the random variable of Iron Man’s expenses in column AE.

Next, proceed as in the computation shown in figure 17. This will generate the expected loss of Iron Man<sup>9</sup>. See figure 19.

	A	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH
1	n	26	27					
2	IP(N=n)	2.123E-08	5.503E-09	mass/density	IM			
3	0	0	0	0.000911882	0			
4	1	0	0	1.49576E-31	1			
5	2	0	0	1.65955E-26	2			
6	3	0	0	1.38408E-23	3			
7	4	0	0	1.5586E-21	4			
8	5	0	0	5.859E-20	5			
9	6	0	0	1.10033E-18	6			
10	7	0	0	1.28008E-17	7			
11	8	0	0	1.04886E-16	8			
12	9	0	0	6.57547E-16	9			

**Figure 19** The result should be close to 343.2994774. Do you think Iron Man will choose to pay this much instead of risking paying up to 350 billion USD?

To calculate Batman’s expected loss, we start by considering the support of the share of the risk he is taking on. To this end, use column AF and record the support by prompting

$$=IF(A3<=350,0,IF(A3<=1000,A3-350,650))$$

in cell AF3 and press “Return”. Then we double-click in the right-hand-side corner of the cell AF3. See figure 20.

We compute Batman’s expected loss by approximating the corresponding Riemann sum using the prompt displayed in figure 21.

We complete our analysis by computing the expected loss of the governments of the world. We use an analogous approach to the ones we used in figures 18-19

<sup>9</sup> Recall that this approach works only because we are approximating a Riemann sum.



	A	AC	AD	AE	AF	AG	AH
1	n	27		343.29948			
2	IP(N=n)	5.503E-09	mass/density	IM	BATMAN		
3	0	0	0.000911882	0	=IF(A3<=350,0,IF(A3<=1000,A3-350,650))		
4	1	0	1.49576E-31	1			
5	2	0	1.65955E-26	2			
6	3	0	1.38408E-23	3			
7	4	0	1.5586E-21	4			
8	5	0	5.859E-20	5			
9	6	0	1.10033E-18	6			
10	7	0	1.28008E-17	7			
11	8	0	1.04886E-16	8			
12	9	0	6.57547E-16	9			

**Figure 20** We place the support of the random variable of Batman’s expenses in column AF. One way to see why we typed in that particular prompt is: what is the payment issued by the Dark Knight when the overall expenses are below 350 billion?, and what if the overall expenses are between 350 billion and one trillion? What happens after one trillion dollars?

	A	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI
1	n	27		343.29948				
2	IP(N=n)	5.503E-09	mass/density	IM	BATMAN			
3	0	0	0.000911882	0	0			
4	1	0	1.49576E-31	1	0			
5	2	0	1.65955E-26	2	0			
6	3	0	1.38408E-23	3	0			
7	4	0	1.5586E-21	4	0			
8	5	0	5.859E-20	5	0			
9	6	0	1.10033E-18	6	0			
10	7	0	1.28008E-17	7	0			
11	8	0	1.04886E-16	8	0			
12	9	0	6.57547E-16	9	0			

**Figure 21** The result should be close to 374.8962607. Do you think Batman will choose to pay this much instead of risking covering the expenses that exceed 350 billion, and up to one trillion?

and 20-21. Figure 22 displays our results. Do you think the governments of the world would agree to pay 37.80425635 billion instead of risking covering the expenses that surpass one trillion dollars?

### Is it expensive?

The last subsection concluded with three questions:

- Do you think Iron Man will agree to pay 343.2994774 instead of risking paying up to 350 billion USD?
- Do you think Batman will agree to pay 374.8962607 billion instead of risking covering the expenses that exceed 350 billion, and up to one trillion USD?
- Do you think the governments of the world will agree to pay 37.80425635 billion instead of risking covering the expenses that surpass one trillion dollars?

	A	AC	AD	AE	AF	AG	AH
1	n	27		343.29948	374.89626	37.804256	
2	IP(N=n)	5.503E-09	mass/density	IM	BATMAN	The World	
3	0	0	0.000911882	0	0	=IF(A3>1000,A3-1000,0)	
4	1	0	1.49576E-31	1	0	0	
5	2	0	1.65955E-26	2	0	0	
6	3	0	1.38408E-23	3	0	0	
7	4	0	1.5586E-21	4	0	0	
8	5	0	5.859E-20	5	0	0	
9	6	0	1.10033E-18	6	0	0	
10	7	0	1.28008E-17	7	0	0	
11	8	0	1.04886E-16	8	0	0	
12	9	0	6.57547E-16	9	0	0	

**Figure 22** This is the summary of two steps: the computations of the support of the risk share taken on by the governments of the world, and the Riemann sum corresponding to the expected loss of such a random variable. Note the use of the prompts =IF(A3>1000, A3-1000, 0) and =SUMPRODUCT(AG3:AG3742, AD3:AD3742) in cells AG3 (and below), and AG1, respectively. Can you guess what is the sum of the numbers from the entries in range AE1:AG1? (Hint: recall figure 17.)

Attempting to answer to these questions without any more information is a futile exercise. Indeed, except for the first number (which seems rather large in comparison to what it is supposed to cover), these expected losses do not provide a context to assess whether they are expensive or not.

To try to give proper answers to the questions, we compute the probabilities that the agents end up spending more than the expected losses should they avoid paying these amounts. For Iron Man, calculate the *sum*<sup>10</sup> of the probabilities from 344 billion USD and on in the support of the original random variable of aggregate claims. That is, the sum of the entries in the range AD347:AD3742. The result is 93.17%. This means that the probability that Tony Stark spends less than a risk premium of 343.2994774 billion is of barely 6.83%. Will he agree then to pay *only* this risk premium? Our guess is: no! In his own words, he is a genius, billionaire, playboy, philanthropist. Besides, he is *the* Iron Man... if there is a 6.83%-chance of losing less than 343.2994774 billion, why not take it?

As for Mr. Wayne, we proceed analogously and compute the probability that he ends up losing more than a risk premium of 374.8962607 billion. To this end, we add up<sup>11</sup> all the probabilities from 350+374.8962607 billion USD to obtain that the probability that Bruce Wayne

spends more than 374.8962607 billion USD equals 51.55%. That is, the sum of the entries in the range AD728:AD3742 is 51.55%. (To see this, note that the first 350 billion would be covered by Tony Stark, and it should be Batman the one who pays the claims above this amount, and up to one trillion dollars.) Will the *greatest world detective* agree to pay this much? We think he would! After all, we are talking about the one superhero who devised contingency plans in case a member of the *Justice League of America* went rogue (an event that occurred only in the events narrated by Kirby *et al.* (2005); Waid *et al.* (2001); Snyder *et al.* (2014) and Zdarsky and Jiménez (2022) –of course, in the main continuity comics- during the last 85 years). What are the odds of that?!

The governments of the world would definitely pay the risk premium of 37.8 billion USD. That is, although the probability that they end up spending more than this much is of only 16.74% (the sum of the probabilities corresponding to 1000+37.8 billion USD in the support of the original random variable of aggregate claims), a government would not risk a catastrophe with a margin larger than 1%.

## 5. CONCLUDING REMARKS

This paper gives us a glimpse on how to use two tools from the theory of risks to prevent a *civil war* among the superheroes. Namely, the expectation of the random variable of aggregate claims and the cumulative distribution function. This is, of course, an overstatement for two reasons: there are no superheroes in real life, and the actuarial techniques involved in the pricing of an insurance plan only start where we conclude our manuscript. Moreover, we have oversimplified many of the assumptions and methods used in a real problem. For example, our stepsizes are huge, there is no statistical verification of the distribution of the involved random variables, and we substitute Riemann integrals for simple sums. However, we believe this paper represents a good practice for students of actuarial sciences, for we profit from a context familiar to many of our pupils to teach them the basics of some important topics in the risk and probability theories.

To complete the presentation in the same fashion as the used to started it, we will leave the reader with a final question. In the example developed here, the random variable we used to model the frequency followed the Poisson law. What if the Poisson parameter from the frequency random variable is *radiated* with a Gamma distribution? See figure 23, and appendices A and B.



<sup>10</sup> Or more properly, the *Riemann integral*.

<sup>11</sup> Or more adequately, "we compute the Riemann integral of".



**Figure 23** What if the Poisson parameter follows a Gamma distribution? Image source: The TV series produced by Johnson (1978).

### A. THE GAMMA RANDOM VARIABLE

Define the *Gamma function* as:  $\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$  for  $\alpha > 0$ . The integration-by-parts formula yields

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1) \cdot \Gamma(\alpha - 1) \quad (11)$$

for  $\alpha > 1$ , and  $\Gamma(1) = 1$ . Indeed, let  $u = x^{\alpha-1}$  and  $dv = e^{-x} dx$ . Computing, respectively the derivative and anti-derivative of these expressions, and substituting them into  $\int_0^\infty u dv = uv|_0^\infty - \int_0^\infty v du$  yields

$$\Gamma(\alpha) = -x^{\alpha-1} e^{-x} \Big|_0^\infty + (\alpha - 1) \int_0^\infty x^{\alpha-2} e^{-x} dx.$$

Since the last integral equals  $\Gamma(\alpha - 1)$ , this gives (11). Note that, when  $\alpha$  belongs to the set of integer numbers, (11) becomes the recursive definition of factorial.

Now let  $\alpha > 0$  and  $\theta > 0$ . A change of variable leaves us with:

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x/\theta} dx = \theta^\alpha \Gamma(\alpha). \quad (12)$$

*Proof.* To see this, let  $y := x/\theta$ . Then  $dy = \frac{1}{\theta} dx$ . The substitution of these expressions into the left-hand side of (12) yields

$$\int_0^\infty (\theta y)^{\alpha-1} e^{-y} \theta dy = \theta^\alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-y} dy = \theta^\alpha \Gamma(\alpha).$$

The last equality holds by (11). □



Define the *Gamma density function*<sup>12</sup>

$$f_X(x) := \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta}. \quad (13)$$

for  $x > 0$ , with  $\alpha > 0$  and  $\theta > 0$ . Note that  $f_X$  is a density function:

- The function  $f_X(x)$  is positive for all  $x > 0$ .

*Proof.* To see the result, it suffices to see that the two rightmost factors in the definition (13) are both positive for all  $x > 0$ , while  $\theta^\alpha \Gamma(\alpha) > 0$ . □

- The integral  $\int_0^\infty f_X(x) dx$  equals the unit.

*Proof.* This is an immediate consequence of (12). Indeed, it suffices to note that (13) consists of the integrand in the left-hand side of (12), and the expression in the right-hand side of (12). □

As an illustration, we provide table 1 with the first ten values of  $f_X(x)$  for  $x > 0$  with  $\alpha = 10.5$ ,  $\theta = 2.5$  and a stepsize of 0.1.

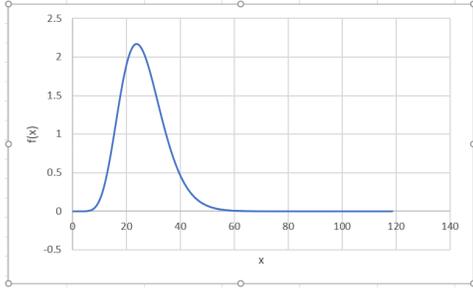
$x$	$f_X(x)$
0.1	$7.5044 \times 10^{-19}$
0.2	$5.2207 \times 10^{-16}$
0.3	$2.3617 \times 10^{-14}$
0.4	$3.4896 \times 10^{-13}$
0.5	$2.7928 \times 10^{-12}$
0.6	$1.5167 \times 10^{-11}$
0.7	$6.3026 \times 10^{-10}$
0.9	$6.3336 \times 10^{-10}$
1	$1.6557 \times 10^{-09}$

■ **Table 1** The first ten values of  $x$  and  $f_X(x)$  for  $x > 0$  with  $\alpha = 10.5$ ,  $\theta = 2.5$  and a stepsize of 0.1.

Figure 24 is a representation of the first  $\pm 1000$  ordered pairs obtained above with  $\alpha = 10.5$  and  $\theta = 2.5$ .

We recommend that the reader fix the *scale parameter*  $\theta$  and change the *shape parameter*  $\alpha$ . What if one does it the other way around? Precisely in this context, if we fix  $\theta$

<sup>12</sup> Note that there is a difference between the *Gamma function*, and the *Gamma density function*.



**Figure 24** Dispersion plot of  $x$  vs.  $f_X(x)$ .

at any given level and let  $\alpha \rightarrow \infty$ . The resulting density would look a lot like the Gaussian bell (see, for instance the chapter written by López-Barrientos *et al.* (2022)).

Let  $c > 0$  be a given constant and  $f_X(x)$  be the Gamma density function defined in (13) with known shape parameter  $\alpha > 0$ , and scale parameter  $\theta > 0$ . The theorem of change of variable (see section V.5 in the book by Mood *et al.* (1974)) can help us find the density function of the random variable  $Y := cX$ .

**Theorem A.1.** *Let  $X$  be a Gamma random variable with shape parameter  $\alpha > 0$  and scale  $\theta$ . The random variable  $Y := cX$  has a Gamma distribution with shape parameter  $\alpha > 0$  and scale parameter  $c\theta$ .*

*Proof.* For  $y > 0$ ,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} \left(\frac{y}{c}\right)^{\alpha-1} e^{-y/(c\theta)} \cdot \left| \frac{d}{dy} \frac{y}{c} \right| \\ &= \frac{1}{(c\theta)^\alpha \Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-y/(c\theta)}. \end{aligned}$$

This is the density function of a Gamma random variable with shape parameter  $\alpha$  and scale parameter  $c\theta$ .  $\square$

Let  $f_X(x)$  be the Gamma density function defined in (13) with known shape parameter  $\alpha > 0$ , and scale parameter  $\theta > 0$ . The moment generating function of the Gamma random variable  $X$  is given by

$$M_X(t) = (1 - \theta t)^{-\alpha}. \quad (14)$$

*Proof.* We make

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathbb{E} \left[ e^{tX} \right] = \int_0^\infty e^{tx} f_X(x) dx \\ &= \int_0^\infty e^{tx} \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\theta} dx \end{aligned}$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x(\frac{1}{\theta} - t)} dx. \quad (15)$$

Analogously to the proof of (12), we let  $y := x \left(\frac{1}{\theta} - t\right)$ , so that  $dy = \left(\frac{1}{\theta} - t\right) dx$ . Substituting these two expressions into (15) yields

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_0^\infty \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} \left(\frac{y}{\frac{1}{\theta} - t}\right)^{\alpha-1} e^{-y} \frac{1}{\frac{1}{\theta} - t} dy \\ &= \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{\frac{1}{\theta} - t}\right)^\alpha \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy \\ &= \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{\frac{1}{\theta} - t}\right)^\alpha \Gamma(\alpha) \\ &= \frac{1}{\theta^\alpha} \left(\frac{1}{\frac{1}{\theta} - t}\right)^\alpha \\ &= \frac{1}{\theta^\alpha} \left(\frac{\theta}{1 - \theta t}\right)^\alpha \\ &= (1 - \theta t)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

This completes the proof.  $\square$

From (14), it is not hard to see that

$$\mathbb{E}X = \alpha\theta, \quad (16)$$

$$\text{var}X = \alpha\theta^2. \quad (17)$$

**Theorem A.2.** *If  $X_i$  is Gamma-distributed with parameters of shape  $\alpha_i > 0$ , and of scale  $\theta > 0$  for  $i = 1, \dots, n$ , then*

$$X_1 + \dots + X_n$$

*is Gamma-distributed with parameters of shape  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$ , and scale  $\theta > 0$ .*

*Proof.* Since, for  $i = 1, \dots, n$ ,  $X_i$  is Gamma-distributed with parameters of shape  $\alpha_i > 0$ , and scale  $\theta > 0$  then  $M_{X_i}(t) = (1 - \theta t)^{-\alpha_i}$ . Using the moment generating function technique from chapter V.4 in the book by Mood *et al.* (1974), we obtain

$$\begin{aligned} M_{X_1 + \dots + X_n}(t) &= (1 - \theta t)^{-\alpha_1} \dots (1 - \theta t)^{-\alpha_n} \\ &= (1 - \theta t)^{-(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)}. \end{aligned}$$

This matches the moment generating function of a Gamma distribution with parameters of shape  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$ , and scale  $\theta > 0$ .  $\square$



From theorem A.2, we know that the distribution of the sum of  $c > 0$  independent and identically Gamma-distributed random variables with parameters of shape  $\alpha > 0$ , and scale  $\theta > 0$  is Gamma with parameters of shape  $c\alpha$ , and scale  $\theta > 0$ . Note that this does not contradict theorem A.1, because  $cX \neq X_1 + \dots + X_c$ , even if  $X_i \sim \Gamma(\alpha, \theta)$  for  $i = 1, \dots, c$ .

## B. THE NEGATIVE BINOMIAL RANDOM VARIABLE

This bonus section illustrates the derivation of the Negative Binomial random variable from the Poisson random variable. It presents an example used in the author's class on Risk Theory. Appendix B.2 in the book by Klugman *et al.* (2019) presents a different (but swift) approach to this and other random variables of the so-called class  $(a, b, 0)$ .

A swan lays a Poisson number of eggs with parameter  $\Lambda$ , where  $\Lambda$  is a Gamma random variable with mean  $\alpha/\beta$  and variance  $\alpha/\beta^2$ . A cygnet hatches out of each egg with probability  $p$ , regardless of the other eggs.

The mean of the number of eggs laid by the swan is  $\frac{\alpha}{\beta}$ .

*Proof.* Let  $N$  be the number of eggs laid by the swan. An application of the theorem of the nested expectation results in  $\mathbb{E}N = \mathbb{E}[\mathbb{E}(N|\Lambda)] = \mathbb{E}\Lambda = \frac{\alpha}{\beta}$ .  $\square$

The variance of the number of eggs laid by the swan is  $\frac{\alpha(\beta+1)}{\beta^2}$ .

*Proof.* An invocation of the theorem of nested variance yields (see, for instance, formula (2.2.11) in the book by Bowers *et al.* (1997)):

$$\begin{aligned} \text{var}N &= \mathbb{E}[\text{var}(N|\Lambda)] + \text{var}[\mathbb{E}(N|\Lambda)] \\ &= \mathbb{E}\Lambda + \text{var}\Lambda \\ &= \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta^2} \\ &= \frac{\alpha(\beta+1)}{\beta^2}. \end{aligned}$$

$\square$

The mass function of the number of eggs is Negative Binomial with parameters  $\alpha$  and  $\frac{1}{\beta+1}$ .

*Proof.* Considering that Gamma density function with parameters of shape  $\alpha$  and scale  $\frac{1}{\beta}$  is given by

$$f_{\Lambda}(\lambda) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda\beta} \lambda^{\alpha-1}.$$



The theorem of total probability yields

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N = n) &= \int_0^{\infty} \mathbb{P}(N = n|\Lambda = \lambda) f_{\Lambda}(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda\beta} \lambda^{\alpha-1} d\lambda \\ &= \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)n!} \int_0^{\infty} \lambda^{n+\alpha-1} e^{-\lambda(1+\beta)} d\lambda. \end{aligned}$$

The change of variable  $z := \lambda(1 + \beta)$  (with  $dz = (1 + \beta)d\lambda$ ) yields:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N = n) &= \frac{\beta^{\alpha}}{n!\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \left(\frac{z}{1+\beta}\right)^{n+\alpha-1} e^{-z} \frac{dz}{1+\beta} \\ &= \frac{\beta^{\alpha}}{n!\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{n+\alpha} \int_0^{\infty} z^{n+\alpha-1} e^{-z} dz \\ &= \frac{\beta^{\alpha}}{n!\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{n+\alpha} \Gamma(n+\alpha) \\ &= \frac{(\alpha+n-1) \cdots \alpha}{n!} \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^{\alpha} \left(\frac{1}{\beta+1}\right)^n \end{aligned}$$

for  $n = 0, 1, \dots$   $\square$

The expected number of cygnets that hatch out of the eggs, given that the swan laid  $N$  eggs is  $pN$ .

*Proof.* Let  $K$  be the number of cygnets that hatch out of the eggs. We need to compute  $\mathbb{E}(K|N)$ . Since  $[K|N]$  is a Binomial random variable with parameters  $N$  and  $p$ , then  $\mathbb{E}[K|N] = pN$ .  $\square$

The expected number of cygnets that hatch out of the eggs is  $\frac{\alpha}{\beta}$ .

*Proof.* Let  $K$  be the number of cygnets that hatch out of the eggs. A new application of the theorem of the nested expectation yields  $\mathbb{E}[\mathbb{E}(K|N)] = p\mathbb{E}N = p\frac{\alpha}{\beta}$ .  $\square$

## REFERENCES

- Bowers, N. L., H. U. Gerber, J. C. Hickman, D. A. Jones, and C. J. Nesbitt, 1997 *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries, IL.
- Bradley, A., 2021 *What if?*. Marvel Studios, Burbank, CA.
- Byrne, J., 2005 Uatu the Watcher. In *Official handbook of the Marvel Universe: Fantastic Four*, edited by J. Christiansen, S. McQuaid, A. Flamini, M. Hoskin, B. Lentz, R. Byrd, M. O'English, and S. Vandal, volume 11, Marvel Comics, NY.

Feige, K., 2012 *The Avengers*. Marvel Studios, Burbank, CA.

Feige, K., 2016 *Captain America: Civil War*. Marvel Studios, Burbank, CA.

Gordon, L., L. Levin, and D. Snyder, 2009 *Watchmen*. Warner Bros. Pictures, Burbank, CA.

Johnson, K., 1978 *The Incredible Hulk*. Universal Television, CA.

Kirby, J., G. Rucka, J. Saiz, C. Richards, and B. Wiacek, 2005 *The OMAC Project*. DC Comics, CA.

Klugman, S. A., H. Panjer, and G. E. Willmot, 2019 *Loss Models. From Data to Decisions*. John Wiley and Sons, UK.

López-Barrientos, J. D., E. Lemus-Rodríguez, and E. Silva, 2022 Un uso convulso de la fórmula de convolución (con una moraleja normal). In *Investigación Estocástica y Estadística en la Educación*, edited by G. D. Salgado-Suárez, F. S. Tajonar-Sanabria, H. J. Reyes-Cervantes, V. H. Vázquez-Guevara, B. Juárez-Hernández, H. A. Cruz-Suárez, and F. Velasco-Luna, chapter 3, pp. 37–52, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Millar, M., S. McNiven, D. Vines, C. Eliopoulos, and M. Hollowell, 2007 *Civil War*. Marvel Comics, NY.

Miller, F., K. Janson, J. Costanza, and L. Varley, 1986 *Batman: The Dark Knight Returns*. DC Comics, CA.

Mood, A., F. Grayville, and D. Boes, 1974 *Introduction to the theory of statistics*. McGraw-Hill, CA.

Moore, A., D. Gibbons, and J. Higgins, 1986 *Watchmen*. DC Comics, CA.

Pearsall, R., 2015 It's just business. Part One. Super-Team Family: the Lost Issues. 1, Available [here](#).

Promislow, D. S., 2015 *Fundamentals of Actuarial Mathematics*. John Wiley and Sons, UK.

Rosza, M., A. Tinubu, and S. M. Fetters, 2016 *Captain America: Civil War*. Rotten Tomatoes. Available [here](#).

Roven, C., C. Nolan, E. Thomas, and D. Snyder, 2013 *Man of Steel*. Warner Bros. Pictures, Burbank, CA.

Roven, C. and D. Snyder, 2016 *Batman v Superman: Dawn of Justice*. Warner Bros. Pictures, Burbank, CA.

Snyder, S., G. Capullo, D. Miki, S. Wands, F. Plascencia, et al., 2014 *Batman: Endgame*. DC Comics, CA.

Stoltzfus, J. and A. Dalton, 2010 *Stochastic Modeling-Theory and Reality from an Actuarial Perspective*. Association Actuarielle Internationale, Ottawa.

Waid, M., H. Porter, S. Scott, D. Geraci, M. Propst, et al., 2001 *Justice League of America: Tower of Babel*. DC Comics, CA.

Walker, J., 2004 *The Incredibles*. Pixar Animation Studios, CA.

Wright, T., 1990 A stochastic method for claims reserving

in general insurance. *Journal of the Institute of Actuaries*. 117: 677–731, Available [here](#).

Zakarin, J., 2013 The insane destruction that the final "Man Of Steel" battle would do to NYC, by the numbers. BuzzFeed. **June**, Available [here](#).

Zdarsky, C. and J. Jiménez, 2022 *Batman: Failsafe*. DC Comics, CA.



**José Daniel López-Barrientos** graduated with a Bachelor's degree in Actuarial Science from Universidad Anáhuac México in December 2003. He holds a Master's and a PhD in Science, both in Mathematics, from the Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. He completed two postdoctoral fellowships: one at the HEC in Montreal, and another at the Faculty of Applied Mathematics at St. Petersburg State University. He has taught at several Mexican and international universities, at the Bachelor's, Master's, and Doctoral levels, and has been a speaker at various national and international research forums in Mathematics and Actuarial Sciences. He currently works as a Professor-Researcher at the Faculty of Actuarial Sciences at Universidad Anáhuac Mexico. He is a National Researcher of the second level, chairs the Permanent Committee on Actuarial Research and Development of the Colegio Nacional de Actuarios since 2014, and serves as Editor-in-Chief of the Colegio Nacional de Actuarios' applied actuarial research journal "Actuarios Trabajando" since 2020. Daniel is a two-time winner of the "Fundadores" Award of the Asociación Mexicana de Actuarios.





Tu conocimiento puede  
inspirar a la próxima  
generación de actuarios.  
Súmate como expositor.

ANÁHUAC  
MÉXICO

# JORNADAS DE ACTUARIZACIÓN



Vale por horas de  
Educación Continua  
del CONAC

Facultad de  
Ciencias Actuariales



COLEGIO  
NACIONAL  
DE ACTUARIOS

Informes:  
Dr. Daniel López Barrientos  
daniel.lopez@anahuac.mx  
[anahuac.mx/mexico](https://anahuac.mx/mexico)



# JORNADAS DE ACTUARIZACIÓN

## Calendario

**16 JUL**

12:00 horas

**Simulación y aplicaciones  
de la ecuación replicadora  
temporal para dos jugadores  
y dos estrategias**

Lic. Mario Sánchez Domínguez  
Candidato a Maestro por la  
Universidad Nacional Autónoma  
de México

**20 AGO**

10:00 horas

Pendiente

Dr. Enrique Lemus Rodríguez  
Director de la licenciatura en  
Actuaría de la Universidad del  
Verbo Encarnado

**17 SEP**

Pendiente

**La flecha del tiempo en  
mercados financieros**

Dr. Pablo Padilla Longoria  
Profesor-Investigador en la  
Universidad Nacional Autónoma  
de México

**15 OCT\***

Pendiente | U. Anáhuac

**Por un gremio unido,  
visionario, comprometido,  
integral y profesional**

Presidentes

- Colegio Nacional de Actuarios
- Asociación Mexicana de Actuarios
- Asociación Mexicana de Actuarios Consultores

**19 NOV\***

Pendiente | U. Anáhuac

Pendiente

Dra. Claudia Feria Cuevas  
Presidente de la Asociación  
Mexicana de Actuarios  
Consultores

**10 DIC\***

Pendiente | U. Anáhuac

Pendiente

Act. Ricardo Ibarra Lara  
Presidente de la Asociación  
Mexicana de Actuarios

**21 ENE\***

Pendiente | U. Anáhuac

Pendiente

Mtro. Mauricio Arredondo  
Fernández Cano  
Presidente del Colegio Nacional  
de Actuarios

**Únete en  
Zoom**

Zoom ID: 5352715147

**Consulta las  
actualizaciones  
aquí**

### Informes:

**Dr. Daniel López Barrientos**

Presidente del Comité de Investigación y docencia  
investigacion@conacmexico.org.mx

\*Fecha tentativa

Vale por horas de Educación  
Continua del CONAC

# POSGRADOS, CURSOS Y TALLERES



# Doctorado en Ciencias Actuariales



## Sobre el doctorado

Es un programa orientado a la investigación. Su objetivo es formar investigadores expertos en el estudio científico de la incertidumbre y el riesgo. Cuenta con ocho materias obligatorias y cuatro materias electivas; tres de corte profesional y una de carácter multidisciplinar.

El doctorado cuenta con dos líneas de investigación: **Teoría del Riesgo y Estadística Aplicada**. El estudiante inicia su proyecto de tesis desde el primer semestre y tiene la posibilidad de elegir cursos electivos que abonen a su formación con temas vinculados a su propia investigación doctoral.

Conoce la oferta  
completa de posgrados  
Anáhuac

Facultad de  
Ciencias Actuariales



Anáhuac  
México

**Coordinación académica:**  
Dr. Carlos Cuevas Covarrubias  
ccuevas@anahuac.mx  
Tel.: 55 5627 0210 ext. 7114

**Informes:**  
Centro de Atención de Posgrado y Educación Continua  
Tels.: 55 56 27 02 10 ext. 7100 y 55 53 28 80 87  
posgrado@anahuac.mx  
anahuac.mx/mexico/posgrados/

# Maestría en Ciencia de Riesgo

¡Aún puedes iniciar tu  
proceso de admisión este 2025!

## Modalidad:

Híbrida y de  
tiempo parcial

## Duración:

6 trimestres

## Horarios:

Lunes a Viernes  
7:00 - 10:00h  
o 18:00-21:00h

Sábados de  
9:00-12:00h



Conoce más detalles del programa y  
pregunta por las próximas sesiones  
informativas

**Inicio de clases: enero 2026**

**Fecha límite de inscripciones: 5 de septiembre de 2025**

Transforma la gestión de riesgos y fortalece tu carrera estudiando la:

# Maestría en Riesgo

Fecha de inicio: julio 2025

Adquiere las habilidades necesarias para tomar decisiones informadas y estratégicas en un entorno dinámico.

¡Inscríbete hoy y prepárate para liderar en el mundo de la administración de riesgos!

Conoce más

Facultad de  
Ciencias Actuariales

Informes:  
Mtra. Martha Reyes Villa  
martha.reyes@anahuac.mx  
[anahuac.mx/mexico](http://anahuac.mx/mexico)

**¡YA**  
te viste?

# Maestría en Estadística

## Objetivo del programa

Formar especialistas con profundo conocimiento de la teoría estadística, capaces de explotar con eficiencia los recursos computacionales para el análisis de la información, que apoyen los procesos de toma de decisiones y que propongan soluciones efectivas a los problemas derivados de la incertidumbre y el riesgo, en contextos académicos y profesionales.



Trasciende con visión

## Modalidad

Presencial

## Duración

Dos años en formato trimestral

## Horario

Entre lunes y jueves por la noche, o sábado por la mañana

### Coordinación académica:

Dr. Eliud Silva  
jose.silva@anahuac.mx

### Informes:

Centro de Atención de Posgrado y Educación Continua  
Tels.: 55 56 27 02 10 ext. 7100 y 55 53 28 80 87  
posgrado@anahuac.mx  
anahuac.mx/mexico/posgrados/

¿YA te viste?

Conoce la oferta de Posgrados Anáhuac



COLEGIO  
NACIONAL  
DE ACTUARIOS

MÉXICO