



CONAC

ACTUARIOS TRABAJANDO

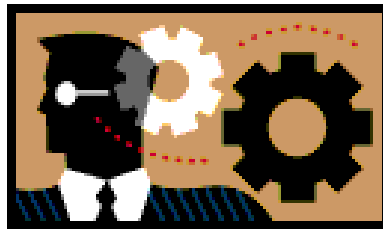
REVISTA MEXICANA DE INVESTIGACION ACTUARIAL APLICADA

$$q_x$$

$$\mu_x$$

$$d_x$$

$${}_tV_x$$



$$A_x$$

$$l_x$$

$$\ddot{a}_x$$

$$p_x$$

AÑO 8 NUM. 7

Julio 2015

ACTUARIOS TRABAJANDO

REVISTA MEXICANA DE INVESTIGACION ACTUARIAL APLICADA

COORDINADOR:

Act. Hernán Jesús Toriz Díaz

REVISORES ASOCIADOS:

Enrique de Alba

Ma. de los Ángeles Yáñez

Luis Enrique Nieto Barajas

Jesús Alfonso Zúñiga San Martín

Diego Hernández

Sofía Romano

Rodica Simón Sauri

Crisóforo Suárez Tinoco

Gabriel Núñez Antonio

Carlos Lozano Nathal

Daniel López Barrientos

CONTENIDO

<p>Un análisis y comparación del riesgo en los tranches de CDO utilizando modelos de cópulas</p> <p><i>José Manuel Athié Natividad</i></p>	<p>4</p>
---	-----------------

Un análisis y comparación del riesgo en los tranches de CDO utilizando modelos de cópulas. (parte I de II)

José Manuel Athié Natividad.
Swiss Re
athie87@hotmail.com. (55) 5595-4241

Resumen

En este artículo se analizan las características de riesgo de distintos tipos de tranches de CDO's. La herramienta principal utilizada en el análisis es la simulación Monte Carlo de las cópulas Gaussiana y Doble-t, considerando una serie de supuestos para un pool de bonos.

En los resultados se observa que la distribución de pérdidas del tranche senior tiene una volatilidad mayor comparado con el tranche equity. También se muestra cómo algunas medidas de riesgo comúnmente utilizadas como el VaR pueden no ser adecuadas para medir el riesgo presente en tranches de CDO's, particularmente para los tranches senior.

Palabras clave: CDO, riesgo, VaR, copula, tranches, estructurado, crédito

Nota: el presente artículo es un extracto del documento original. Para obtener una copia del documento original envíe un correo electrónico a la dirección del autor.

(1) Introducción

El objetivo de este artículo es analizar y comparar las características de riesgo de distintos tipos de tranches¹ de obligaciones de deuda colateralizadas (CDO's por sus siglas en inglés) utilizando simulación Monte Carlo de cópulas de un factor. La idea es comparar el riesgo relativo de los distintos tipos de tranches, así como llegar a conclusiones generales con respecto a la distribución de pérdidas de éstos, particularmente sobre

¹ En este artículo utilizaré el anglosajón "tranche" para referirme a los tramos que componen a los CDO's con el fin de ser consistente con el lenguaje utilizado en la mayoría de las instituciones financieras.

la volatilidad en los resultados esperados y el comportamiento en la cola de la distribución.

Mostraré que los *tranches senior* en los CDO's no son tan seguros como se percibe en el mercado, y que incluso podrían considerarse como inversiones más riesgosas que las correspondientes a los *tranches equity*. Así mismo, mostraré que medir el riesgo y estimar requerimientos de capital utilizando el VaR u otras medidas de riesgo tradicionales puede no ser adecuado dado el extremo sesgo que existe en las distribuciones de pérdidas de los CDO's. Finalmente, mostraré cómo las calificaciones crediticias pueden ser engañosas cuando se usan como fuente única para evaluar el riesgo en los CDO's.

Este artículo está organizado de la siguiente forma: la Sección I presenta un resumen de artículos sobre riesgo en los CDO's que son motivación para la hipótesis de este artículo. La Sección II presenta una introducción a los CDO's. En la Sección III se discuten los modelos a utilizar para el análisis, así como una breve explicación del proceso de simulación y la información utilizada. En la Sección IV se presentan y discuten los resultados y finalmente se concluye en la Sección V.

Las Secciones I a III se presentan en esta primera entrega, mientras que las Secciones IV y V (resultados y conclusiones) se presentan en la siguiente edición de esta publicación.

Sección I – Textos sobre el riesgo en CDO's

La mayor parte de la investigación realizada en el ramo de las finanzas estructuradas está relacionada con el *pricing* (valuación), mientras que el análisis de los riesgos en los CDO's no ha recibido gran atención hasta

ahora. Este artículo lo baso principalmente en los argumentos mostrados en (Coval, Jurek, & Stafford, 2009), así como parcialmente en las conclusiones de otros artículos como (Hull & White, 2010) y (Giaccherini & Pepe, 2008).

En (Coval, Jurek, & Stafford, 2009) los autores presentan un argumento que liga la incorrecta valuación de los *tranches senior* y *equity* con la excesiva confianza de los inversionistas en las calificaciones crediticias. Entre otras conclusiones, argumentan que los *tranches equity* no son tan “tóxicos” como se cree, dado que el riesgo presente en éstos es principalmente del tipo idiosincrático (diversificable). Por otro lado, argumentan que los *tranches senior* de los CDO's tienen un riesgo sistémico mayor al de los *tranches equity* y al de los bonos sencillos con igual calificación. Al basarse en las calificaciones crediticias para la valuación, los inversionistas tienden a subestimar los riesgos presentes en los *tranches senior* por lo que tienen un precio demasiado elevado, mientras que los *tranches equity* tienden a ser subvaluados.

Coval et al. aplican un modelo económico para probar que la incorrecta valuación de los *tranches* en los CDO's se debe a que comúnmente se ignoran los estados de la economía en los cuales suceden los *defaults* de los bonos. Los autores enfocan su análisis en comparar los precios de CDO's que se negocian en el mercado con otros instrumentos financieros que tienen flujos muy similares para probar que los poseedores de *tranches senior* no son compensados suficientemente por el alto riesgo sistémico que asumen (los llaman “Bonos Económicos Catastróficos”). Sin embargo, los autores no investigan a fondo las características de riesgo de cada tipo

de *tranche*, ni tampoco analizan la distribución de probabilidad ni medidas de riesgo de los CDO's.

En (Hull & White, 2010) los autores analizan un *pool* hipotético de hipotecas residenciales para comprobar si las calificaciones crediticias de los *tranches* senior eran adecuadas antes de la crisis en el 2008. Una de sus principales conclusiones es que las calificaciones crediticias de los *tranches* senior pueden ser altamente volátiles dependiendo, particularmente, de los supuestos de correlación.

En (Giaccherini & Pepe, 2008) los autores analizan distintos estimados de capital de riesgo para CDO's. En particular, comparan los estimados de capital de riesgo basados en calificaciones crediticias con otras metodologías basadas en riesgo. Concluyen que las calificaciones crediticias, que se enfocan únicamente en la probabilidad de *default*, no son la herramienta adecuada para la determinación del capital.

Los artículos mencionados analizan de alguna forma el riesgo en los CDO's. Sin embargo, ninguno de estos tiene como objetivo principal el análisis y la comparación de las características de riesgo en distintos tipos de *tranche* en los CDO's. Preguntas tales como: qué *tranche* es relativamente más riesgoso, qué tan sensibles son las calificaciones crediticias a parámetros incorrectos o cómo son la distribución de pérdidas y las medidas de riesgo de cada *tranche*, son solo parcialmente discutidas. En este artículo intentaré dar respuestas a estas y otras preguntas relacionadas con las características de riesgo de los *tranches* de los CDO's.

Sección II – Obligaciones de deuda colateralizadas (CDO's)

Las obligaciones de deuda colateralizadas (CDO's por sus siglas en inglés) son derivados de crédito. Son creados al conjuntar en un *pool* instrumentos de características similares, y cuyos flujos de efectivo son redistribuidos en una serie de instrumentos derivados llamados *tranches*. Detrás de todo CDO existe una sociedad vehículo (special-purpose entity o SPE), que es creada específicamente para cada CDO y es la entidad que emite los instrumentos derivados (*tranches*) hacia los inversionistas. Cuando es aplicable, el SPE también administra los activos subyacentes al CDO.

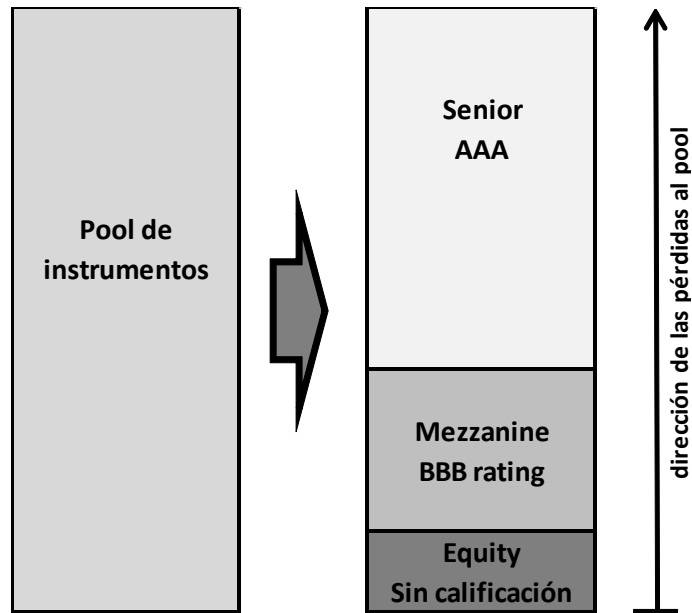
Los CDO's son estructurados de acuerdo a un esquema de subordinación, donde cada *tranche* sufre una reducción de principal cuando las pérdidas en el portafolio de créditos sobrepasan la prioridad del *tranche* (L_i), que es expresada como un porcentaje del principal total del *pool*. Cada *tranche* pierde el total de su principal cuando las pérdidas al portafolio sobrepasan el límite del *tranche* (H_i).² Los primeros *tranches* en sufrir pérdidas en un CDO son conocidos como *equity*, mientras que los últimos son conocidos como *senior*. Los *tranches* en el medio se conocen como *mezzanine*.

Tranching o construcción de tramos (“trameo”)

De acuerdo a lo expuesto en (Barnett-Hart, 2009), el número promedio de *tranches* en los CDO's es de 7.4, y la estructura más común contiene tres *tranches* con calificación AAA (*senior*), un *tranche* A y uno BBB (*mezzanine*), y un *tranche* sin calificación (*equity*). A pesar de que las estructuras pueden variar significativamente, normalmente siempre existe un *tranche* senior, uno *mezzanine* y un *equity*. Considerando lo anterior, en

² (Giaccherini & Pepe, 2008)

este artículo enfoco mi análisis en una estructura compuesta de un *tranche* senior AAA, uno *mezzanine* con calificación BBB y un *tranche equity*.



Un *tranche* se define por una prioridad L_i y un límite H_i , donde i se refiere a un *tranche* en específico. Dado un *pool* de instrumentos, se puede expresar la variable aleatoria de las pérdidas al *pool* en un determinado periodo como X . Bajo esta notación, la pérdida al *tranche* i está dada por:

Ecuación 1

$$\min(H_i - L_i, \max(X - L_i, 0))$$

Sin pérdida de generalidad, en este artículo hago los siguientes supuestos: no tomo en consideración el tiempo al que suceden los defaults ni tampoco el valor del dinero en el tiempo. Así mismo, considero un periodo de 5 años para el CDO y todas las probabilidades de default, las medidas de riesgo y las pérdidas están expresadas de acuerdo con este periodo.

Sección III – Modelos, información y medidas de riesgo

Los modelos

Se han propuesto muchos modelos para evaluar el riesgo de crédito en portafolios (i.e. modelar la correlación entre los componentes del portafolio), pero la mayoría de ellos pueden ser clasificados en tres grupos: (1) modelos de intensidad, (2) modelos estructurales y (3) modelos de cópulas.

En los modelos de intensidad, el *default* de cada instrumento es modelado como un proceso Poisson con intensidad de *default* estocástica, donde dichas intensidades están correlacionadas entre los distintos instrumentos en el portafolio. En (Duffie & Gârleanu, 2001) y (Duffie & Singleton, 1999) se muestran modelos de intensidad simples. En (Jarrow & Yu, 2001) se muestra un modelo alternativo que analiza las relaciones de contraparte entre las distintas corporaciones.

Los modelos estructurales son una representación microeconómica de la estructura de capital de la compañía, donde una compañía entra en *default* cuando sus activos caen por debajo de un determinado punto, proporcional a su deuda. Este tipo de modelos fue propuesto por (Merton, 1974), y una alternativa enfocada en portafolios puede encontrarse en (Zeng & Zhang, 2001).

Los modelos de intensidad y estructurales consumen muchos recursos computacionales y de tiempo para la valuación de CDO's. Principalmente por esta razón, en la práctica se han utilizado más los modelos de cópulas.

Una copula es un tipo de función de distribución usada para describir la dependencia entre variables aleatorias. Dadas las distribuciones marginales de la probabilidad de *default* de los instrumentos individuales, la

distribución conjunta puede ser generada usando una función de cópula. Las cópulas son muy flexibles y son el tipo de modelo más popular en los mercados de CDO's dada su eficiencia computacional, simplicidad y relativa precisión. En este artículo utilizo modelos de cópulas para realizar el análisis.

Análogo al modelo de Black-Scholes-Merton para el análisis de opciones, el estándar de mercado para el análisis de CDO's sintéticos es la cópula Gaussiana, que fue propuesta originalmente en (Li, 2000).

El método más común para la valuación de CDO's es mediante el uso de modelos de cópulas de un solo factor³. En este modelo, hay un factor común a todos los deudores (factor sistémico), y se denota generalmente por una M , así como un factor específico para cada deudor (factor idiosincrático) que se denota por una Z_i , $i= 1, \dots, n$, donde M, Z_1, \dots, Z_n son independientes. En este modelo, el deudor i entra en *default* si⁴

Ecuación 2

$$\sqrt{\rho}M + \sqrt{1 - \rho}Z_i < K$$

Para algún K , donde ρ^5 es un parámetro de correlación de los tiempos de *default* entre cualesquiera dos deudores.

En el caso de la cópula Gaussiana, M y Z_i tienen una distribución normal estándar y, dada una probabilidad de *default* Q (que no necesita ser igual para todos los deudores), K corresponde al percentil Q de la siguiente expresión:

³ Este modelo puede ser extendido a factores múltiples. Sin embargo, como se discute en (Finger, 2004), hay dos principales retos para ir más allá de los modelos de factor simple, en específico (1) el desarrollar métodos numéricos que permitan el mismo nivel de precisión y velocidad en el cálculo y (2) educar al mercado para la utilización de mejor información de correlación, dado que la gran mayoría está muy acostumbrada al marco actual.

⁴ Como se muestra en (Hull & White, 2010).

⁵ El parámetro ρ puede ser generalizado para ser específico a cada instrumento/crédito.

Ecuación 3

$$\sqrt{\rho}M + \sqrt{1 - \rho}Z_i$$

La Ecuación 3 tiene una distribución normal estándar y por lo tanto:

Ecuación 4

$$K = \Phi^{-1}(Q)$$

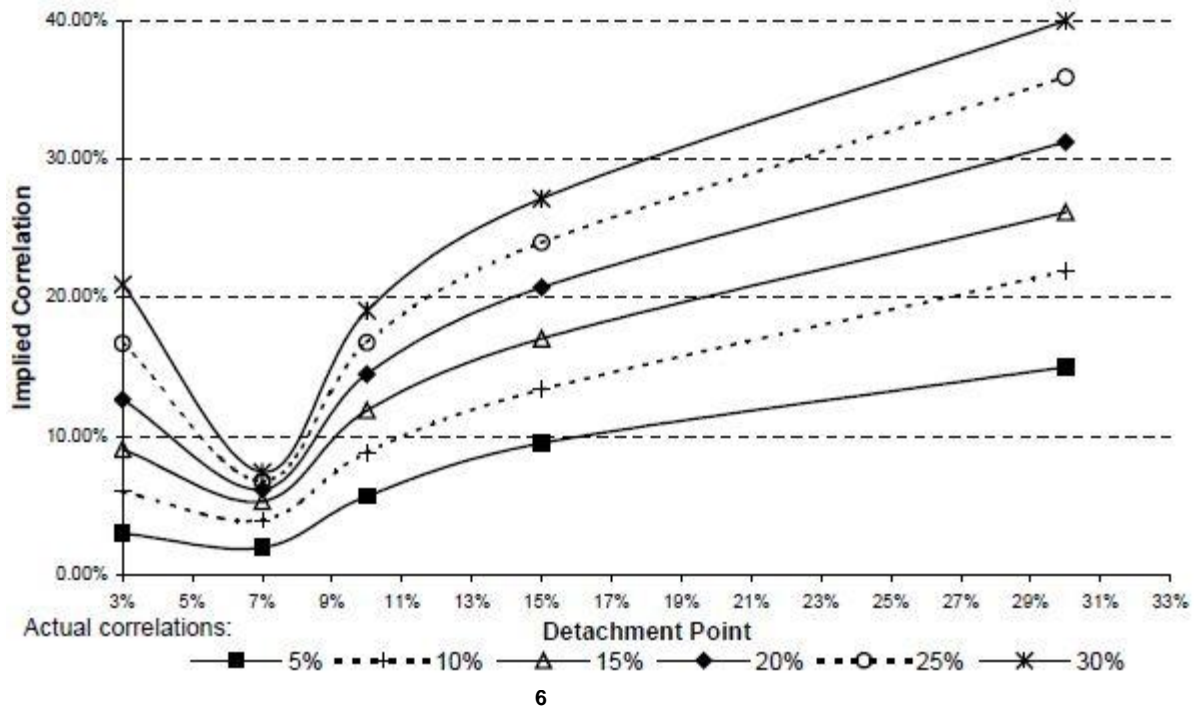
Donde Φ es la función de distribución acumulada de una normal estándar.

Condicionando a una realización de M , el deudor i entra en default si la siguiente desigualdad es verdadera:

Ecuación 5

$$Z_i < \frac{\Phi^{-1}(Q) - \sqrt{\rho}M}{\sqrt{1 - \rho}}$$

A pesar de que la cópula Gaussiana es intuitiva y conveniente, tiene una serie de desventajas. La principal de ellas es que la asignación de valor a través de los *tranches* no corresponde con los precios de mercado observables, y se observa una correlación en forma de "sonrisa". En otras palabras, las correlaciones implícitas de este modelo, dados los precios de mercado, no son constantes a través de los *tranches*. Esto significa que no es posible replicar los precios de mercado de todos los *tranches* de un CDO utilizando una misma especificación del modelo de cópula Gaussiana. Las principales causas detrás de la "sonrisa" de correlaciones implícitas son la carencia de correlación de *default* en la cola de la distribución de este modelo y la baja probabilidad de eventos extremos que muestra.



Se han propuesto diversas alternativas para lidiar con las imperfecciones de la cópula Gaussiana. En (Andersen & Sidenius, 2004) se introducen tasas de recuperación y factores aleatorios, cuyo valor depende del factor sistémico y por ende intenta imitar los efectos que tiene la situación macroeconómica en los parámetros de correlación y las tasas de recuperación. En (Burtshell, Gregory, & Laurent, 2007) se propone un parámetro de correlación aleatorio, que ayuda a mejorar la precisión de la cópula Gaussiana. Otros se han enfocado en encontrar especificaciones alternativas de cópulas, tales como la t de Student, Clayton o la Marshall-Olkin que se explican con detalle en (Embrechts, Lindskog, & McNeil, 2003). Sin embargo, la alternativa que ha ganado mayor popularidad por su relativa simplicidad y precisión es la cópula doble-t propuesta en (Hull & White, 2004). Comparada con la cópula Gaussiana, la doble-t tiene “colas” más pesadas y muestra correlación de los *defaults* en la cola, además de

⁶ (Agca, Agrawal, & Islam, 2008)

que es capaz de ajustar los precios de mercado de los CDO's de manera más precisa.

En la copula doble-t, tanto M como Z_i tienen una distribución t de Student (escalados de tal forma que la varianza sea unitaria) y un deudor entra en *default* si la siguiente ecuación es verdadera:

Ecuación 6

$$\sqrt{\rho} \left(\frac{v_1 - 2}{v_1} \right)^{\frac{1}{2}} M + \sqrt{1 - \rho} \left(\frac{v_2 - 2}{v_2} \right)^{\frac{1}{2}} Z_i < F^{-1}(Q)$$

Donde v_1 y v_2 son los grados de libertad de M y Z_i respectivamente, y F es la función de distribución acumulada de la siguiente ecuación:

Ecuación 7

$$\sqrt{\rho} \left(\frac{v_1 - 2}{v_1} \right)^{\frac{1}{2}} M + \sqrt{1 - \rho} \left(\frac{v_2 - 2}{v_2} \right)^{\frac{1}{2}} Z_i$$

En (Hull & White, 2004) los autores muestran que la cópula doble-t con 4 grados de libertad tanto para M como para Z_i (en adelante expresado como (4,4)) ajusta a los precios de mercado de CDO's sintéticos de manera adecuada.

En este artículo utilizo principalmente la cópula doble-t con (4,4) grados de libertad dada su relativa sencillez y su aceptación como un modelo "adecuado". También utilizo la cópula Gaussiana de un factor dada su importancia como modelo estándar del mercado de CDO's.

Simulación

La forma más flexible y relativamente simple de aproximar la distribución de pérdidas completa es utilizando simulación Monte Carlo de los modelos de

cópula de un factor. Debajo incluyo una breve descripción del proceso de simulación.

Tanto para la cópula Gaussiana como para la doble-t, un *default* ocurre, dado M , cuando la siguiente ecuación es verdadera:

Ecuación 8

$$Z_i < \frac{F^{-1}(Q) - \sqrt{\rho}M}{\sqrt{1-\rho}}, \quad i = 1, \dots, n$$

Para estimar los *defaults* de un portafolio con n créditos (y posteriormente las pérdidas a éste), el proceso de simulación es el siguiente:

- (2) Para obtener cada pseudo-pérdida del portafolio, las variables aleatorias M, Z_1, \dots, Z_n se simulan de manera independiente.
- (3) Para cada $i=1, \dots, n$; se aplica la Ecuación 8 para determinar si ha ocurrido un *default*.
- (4) En caso de *default*, se estima la pérdida aplicando la tasa de recuperación al principal del crédito que cayó en *default*.
- (5) Todas las pérdidas individuales de cada crédito se suman para obtener la pseudo-pérdida del portafolio (una observación simulada).
- (6) Este proceso se repite un número suficiente de veces (hasta la convergencia) para estimar la distribución del proceso de pérdidas del portafolio, utilizando para esto la distribución empírica de las pseudo-pérdidas simuladas.

En el caso de la cópula Gaussiana, la función de distribución inversa F^{-1} es simplemente la función de distribución inversa de la normal. Sin embargo, en el caso de la doble-t, la distribución es desconocida (suma de t's de Student). Por ello, la función de distribución inversa tiene que ser estimada mediante métodos numéricos. Siguiendo las ideas mostradas en (Vrins,

2009), para cada especificación de grados de libertad y coeficiente de correlación, simulé la doble-t y estimé la función inversa como el percentil empírico de las observaciones simuladas.

Para realizar las simulaciones utilicé la aplicación R 2.13.0⁷. Después de algunas pruebas de convergencia, así como de eficiencia, decidí utilizar 50,000 simulaciones para cada análisis.

Información

La información de mercado para CDO's no es muy extensa y la mayor parte no está disponible al público en general. El propósito de este artículo no es el ajustar los resultados a la información de mercado, sino el hacer una comparación relativa de las características de riesgo. Por ello no utilizo información real de mercado, sino supuestos de parámetros que replican en buena medida lo observado en el mercado. Siguiendo las metodologías utilizadas en diversos artículos de investigación, así como los métodos propuestos por Moody's y Standard and Poors sobre *defaults* de créditos, para mi análisis hago los siguientes supuestos base:

Probabilidad de default:	3%
Coefficiente de correlación (ρ):	20%
Tasa de recuperación:	35%
Número de créditos en el pool:	1,000

La probabilidad de *default* de 3% se basa en el supuesto de un *pool* homogéneo de bonos con calificación BBB y con 5 años de vigencia (de acuerdo con las cifras de S&P, Anexo A).

El coeficiente de correlación de 20% se basa en un promedio de valores comúnmente utilizado en artículos de investigación de CDO's, como los

⁷ (Team, 2011). En caso de requerir el código del análisis puede solicitarlo al autor.

mostrados en (Giaccherini & Pepe, 2008) y en (Hull & White, 2010) que van de 5% a 30%. Por otro lado, los coeficientes de correlación utilizados en Basilea II para exposiciones corporativas son de alrededor de 20%.

La tasa de recuperación de 35% se basa en los resultados de (Hamilton, Cantor, & Ou, 2002), donde se muestra que la mediana de la tasa de recuperación de bonos corporativos en *default* entre 1982 y 2001 es de 35%.

Finalmente, utilicé 1,000 créditos en el *pool* para obtener un portafolio suficientemente granular que permitiera tener resultados más robustos, además de que esta cifra no se aleja demasiado de diversos CDO's existentes en el mercado.

Para analizar la sensibilidad de las características de riesgo de los CDO's a cambios en parámetros, también llevo a cabo un análisis variando los supuestos base mencionados anteriormente.

Medidas de riesgo

Para el análisis de las características de riesgo de los *tranches* en los CDO's utilizo diversas medidas de riesgo. Una medida de riesgo es un mapeo de la variable aleatoria de pérdida asociada al riesgo a los números reales.⁸

⁸ (Klugman, Panjer, & Willmot, 2012)

En este artículo me enfoco en las medidas de riesgo mencionadas a continuación:

1. Desviación estándar
2. Valor en riesgo (VaR_p) (nivel de confianza p)
3. Valor en riesgo de cola ($TVaR_p$) (nivel de confianza p)

Ecuación 9

$$P(X > VaR_p(X)) \leq 1 - p$$

Ecuación 10

$$TVaR_p(X) = E(X|X > VaR_p(X))$$

Para mayores detalles sobre las medidas de riesgo ver (Klugman, Panjer, & Willmot, 2012) o (Artzner, Delbaen, Eber, & Heath, 1999).

A pesar de que la desviación estándar y el VaR son muy intuitivas y sencillas, en general no satisfacen una propiedad deseable para las medidas de riesgo llamada coherencia (Klugman, Panjer, & Willmot, 2012). En particular, el VaR puede violar la propiedad de subaditividad, que significa que, dada una medida de riesgo $\rho(X)$, se debe cumplir:

Ecuación 10

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

El TVaR es una medida de riesgo coherente⁹, además de que refleja correctamente los valores extremos que pueden tener las distribuciones con colas pesadas. Esta propiedad es particularmente valiosa al analizar el riesgo en los *tranches* de CDO's, ya que las distribuciones de pérdida de estos pueden tener colas muy pesadas.

Además de las tres medidas de riesgo mencionadas, también utilizo las versiones normalizadas de éstas para poder comparar el riesgo relativo

⁹ (Artzner, Delbaen, Eber, & Heath, 1999)

entre los diferentes *tranches*. Como parámetro de normalización utilizo la pérdida esperada de cada *tranche* (i.e. la media). De esta forma hago el cálculo del coeficiente de variación (C.V.), el VaR normalizado (Norm. VaR) y el TVaR normalizado (Norm. TVaR).

Resultados y Conclusiones

Los resultados y conclusiones de este análisis se muestran en la segunda parte de este artículo, que será publicado en la siguiente edición.

Anexo A

Standard and Poors: 2011 Annual U.S. Corporate Default Study and Rating

Transitions.

Comparison Of Corporate Average Cumulative Default Rates (1981-2011) (%)

Rating	--Time horizon (years)--														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
U.S.															
AAA	0.00 (0.00)	0.04 (0.01)	0.17 (0.07)	0.30 (0.14)	0.43 (0.20)	0.56 (0.26)	0.61 (0.26)	0.70 (0.24)	0.80 (0.21)	0.90 (0.20)	0.96 (0.19)	1.01 (0.18)	1.07 (0.17)	1.19 (0.17)	1.32 (0.19)
AA	0.04 (0.01)	0.09 (0.03)	0.19 (0.05)	0.34 (0.11)	0.48 (0.16)	0.64 (0.23)	0.78 (0.28)	0.90 (0.36)	0.99 (0.37)	1.10 (0.40)	1.20 (0.42)	1.29 (0.45)	1.38 (0.42)	1.45 (0.39)	1.54 (0.37)
A	0.08 (0.03)	0.23 (0.04)	0.41 (0.07)	0.62 (0.11)	0.84 (0.12)	1.08 (0.11)	1.36 (0.14)	1.62 (0.16)	1.90 (0.20)	2.19 (0.28)	2.44 (0.39)	2.64 (0.42)	2.84 (0.43)	3.02 (0.41)	3.25 (0.39)
BBB	0.27 (0.06)	0.71 (0.13)	1.18 (0.12)	1.81 (0.18)	2.48 (0.24)	3.16 (0.35)	3.76 (0.45)	4.38 (0.51)	4.99 (0.63)	5.58 (0.72)	6.16 (0.80)	6.63 (0.69)	7.09 (0.53)	7.58 (0.36)	8.07 (0.23)
BB	0.96 (0.31)	2.93 (0.53)	5.31 (0.73)	7.53 (1.07)	9.50 (1.58)	11.46 (2.18)	13.13 (2.15)	14.65 (2.27)	16.03 (2.61)	17.23 (2.87)	18.21 (3.33)	19.08 (3.35)	19.82 (3.33)	20.43 (3.12)	21.14 (2.98)
B	4.59 (0.90)	10.29 (1.90)	15.22 (2.13)	19.06 (2.35)	22.02 (2.87)	24.41 (2.87)	26.37 (3.05)	27.94 (3.26)	29.31 (3.21)	30.61 (2.85)	31.75 (2.27)	32.67 (2.21)	33.51 (2.09)	34.28 (2.26)	35.06 (2.46)
CCC/C	27.58 (6.97)	38.13 (7.58)	44.28 (8.83)	48.19 (9.85)	51.09 (9.95)	52.43 (8.62)	53.59 (8.87)	54.47 (8.89)	55.66 (8.51)	56.51 (7.16)	57.34 (7.33)	58.23 (7.42)	59.18 (7.22)	60.00 (5.90)	60.00 (5.90)
Investment grade	0.14 (0.03)	0.37 (0.06)	0.64 (0.10)	0.98 (0.14)	1.34 (0.17)	1.71 (0.18)	2.06 (0.20)	2.41 (0.20)	2.74 (0.27)	3.08 (0.34)	3.39 (0.42)	3.64 (0.41)	3.89 (0.37)	4.13 (0.31)	4.39 (0.25)
Speculative grade	4.49 (0.95)	8.91 (1.37)	12.81 (1.68)	15.95 (1.77)	18.47 (1.75)	20.60 (1.43)	22.37 (1.53)	23.88 (1.54)	25.23 (1.32)	26.46 (1.05)	27.50 (0.83)	28.39 (0.79)	29.19 (0.76)	29.88 (0.74)	30.58 (0.75)
All rated	1.83 (0.42)	3.66 (0.70)	5.30 (0.97)	6.69 (1.14)	7.83 (1.23)	8.84 (1.20)	9.68 (1.25)	10.42 (1.22)	11.10 (1.15)	11.73 (1.00)	12.27 (0.88)	12.73 (0.91)	13.15 (0.95)	13.52 (1.03)	13.92 (1.11)

Bibliografia

- 1) Agca, S., Agrawal, D., & Islam, S. (2008). Implied Correlations: Smiles or Smirks? *The Journal of Derivatives*, 16(2), 7-35.
- 2) Andersen, L., & Sidenius, J. (2004). Extensions to the Gaussian copula: random recovery and random factor loadings. *Journal of Credit Risk*, 1(1).
- 3) Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., & Heath, D. (1999). Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, 9(3), 203-228.
- 4) Barnett-Hart, A. K. (2009). *The Story of the CDO Market Meltdown: An Empirical Analysis*. Cambridge, Massachusetts: Harvard College.
- 5) Brothers, L. (2001, March). Credit Derivatives Explained. *Structured Credit Research*.
- 6) Burtschell, X., Gregory, J., & Laurent, J. (2007). Beyond the Gaussian copula: stochastic and local correlation. *Journal of Credit Risk*, 3(1), 31-62.
- 7) Burtschell, X., Gregory, J., & Laurent, J.-P. (2005). A comparative analysis of CDO pricing models. *Working Paper, BNP Paribas*.
- 8) Coval, J. D., Jurek, J. W., & Stafford, E. (2009). Economic Catastrophe Bonds. *American Economic Review*, 99(3), 628-666.
- 9) Das, S., Duffie, D., Kapadia, N., & Saita, L. (2007). Common failings: How corporate defaults are correlated. *Journal of Finance*, 62, 93-117.
- 10) Das, S., Freed, L., Geng, G., & Kapadia, N. (2006). Correlated Default Risk. *Journal of Fixed Income*, 16, 7-32.
- 11) Duffie, D., & Gârleanu, N. (2001). Risk and Valuation of Collateralized Debt Obligations. *Financial Analysts Journal*, 57(1), 41-59.
- 12) Duffie, D., & Singleton, K. (1999). Modeling Term Structures of Defaultable Bonds. *Review of Financial Studies*, 12, 687-720.
- 13) Embrechts, P., Lindskog, F., & McNeil, A. (2003). Modelling dependence with copulas and applications to risk management. *Handbook of heavy tailed distributions in finance*, 8(1), 329-384.
- 14) Finger, C. (2004). Issues in the pricing of synthetic CDOs. *The Journal of Credit Risk*, 1(1), 113-124.
- 15) Giaccherini, L., & Pepe, G. (2008). Basel II capital requirements for structured credit products and economic capital: a comparative analysis. *Working Paper, Banking Supervision Department, Banca d'Italia*.
- 16) Goodman, L. S. (2002). Synthetic CDOs: An Introduction. *Journal of Derivatives*, 9(3), 60-72.
- 17) Hamilton, D., Cantor, R., & Ou, S. (2002). Default & recovery rates of corporate bond issuers. *Moody's Investors Service*.
- 18) Heidorn, T., & Kahlert, D. (2010). Implied correlations of iTraxx tranches during the financial crisis. *Frankfurt School Working Paper Series*, 145.
- 19) Hull, J., & White, A. (2004). Valuation of a CDO and an nth to default CDS without Monte Carlo simulation. *The Journal of Derivatives*, 12(2), 8-23.
- 20) Hull, J., & White, A. (2010). The risk of tranches created from residential mortgages. *Financial Analysts Journal*, 66(5), 54-67.
- 21) Jarrow, R., & Yu, F. (2001). Counterparty risk and the pricing of defaultable securities. *Journal of Finance*, 56(5), 1765-99.

- 22) Kiff, J., & Fender, I. (2005). CDO rating methodology: some thoughts on model risk and its implications. *Journal of Credit Risk*, 1(3), 37-58.
- 23) Klugman, S., Panjer, H., & Willmot, G. (2012). *Loss models: from data to decisions*. Wiley.
- 24) Lando, D. (1994). Three Essays on Contingent Claims Pricing. *Ph. D. Thesis, Cornell University*.
- 25) Laurent, J.-P., & Gregory, J. (2005). Basket Default Swaps, CDO's and Factor Copulas. *Journal of Risk*, 7(4), 103-122.
- 26) Li, D. X. (2000). On default correlation: a copula function approach. *Journal of Fixed Income*, 9, 43-54.
- 27) Merton, R. (1974). On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates. *Journal of Finance*, 29(2), 449-470.
- 28) Philbrick, S. (1994). Accounting for Risk Margins. *Casualty Actuarial Society Forum*, 1, 1-87.
- 29) Team, R. D. (2011). R: A Language and Environment for Statistical Computing. Vienna, Austria: <http://www.R-project.org>.
- 30) Vrins, F. (2009). Double t Copula Pricing of Structured Credit Products: Practical aspects of a trustworthy implementation. *Journal of Credit Risk*, 5, 91-109.
- 31) Zeng, B., & Zhang, J. (2001). An empirical assessment of asset correlation models. *Moddy's KMV Research Paper*.